نشریه مهندسی عمران و نقشه برداری- دانشکده فنی، دوره ۴۵، شماره ۱، فروردین ماه ۱۳۹۰، از صفحه ۹۹ تا ۱۱۱

حل معادله موج SH در فضاي موجک براي مسائل مقادير مرزي

حسن يوسفي[1] و اسد ا... نورزاد *[2]

[1]دکتري عمران- زلزله دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

[2]دانشیار دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۵/۸/۱۴ ، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۹/۷/۲۷ ، تاریخ تصویب ۸۹/۸/۲۵)

چکیده

در اين مقاله سعي در به کارگيري تبديل موجک در حل معادله خطي اسکالر موج تحت شرايط مرزي واقعي (مسائل اندرکنش خاک و سازه) بوده است. وجود قدرت تحليل تحت دقت‌هاي متفاوت (وضوح متفاوت)، قدرت تشخيص رفتارهاي محلي و وجود الگوريتم‌هاي وفقي در ذات روش (برخلاف روش‌هاي عددي مرسوم مانند روش اجزاء محدود و روش تفاوت‌هاي محدود) با الگوريتم‌هاي سريع (تبديل اپراتور مشتق به ماتريس‌هاي نواري) و در نتيجه افزايش سرعت محاسبات در عين حفظ دقت مورد نظر از مزيت بزرگ حل در فضاي تبديل يافته موجک است.

واژه‌هاي کليدي: تبديل موجک، حل وفقي، معادلة موج، اندرکنش خاک و سازه

مقدمه

در اين مقاله حل معادله انتشار موج در محيط جامد بر پايه تبديل موجک به ازاء شرايط مرزي متفاوت از قبيل وجود حفره در محيط بي‌نهايت (مشابه تونل بي‌پوشش) و يا قرار گرفتن جسم انعطاف‌پذير در محيط نيمه محدود (مسائل اندرکنش خاک- سازه) مورد مطالعه قرار مي‌گيرد. در [۱] و [۲] انتشار امواج بدون حضور سازه (در حالت شرايط مرزي ساده‌تر از مسائل اندرکنش) در فضاي موجک مدل سازي شده است و در اين مقاله سعي در توسعه و بسط آن روش به حالت‌هاي کاربردي يعني انتشار امواج در حضور سازه بوده است.

در حل بر پايه موجک، مکان به فضاي موجک تصوير و معادله در زمان گسسته سازي مي‌شود. با توجه به طبيعت تبديل موجک مي‌توان اين روش را جزو روش‌هاي وفقي دسته‌بندي نمود [۳]. تلاش‌هاي بسياري براي بسط روش‌هايي به صورت وفقي براي ريز کردن نقاط و يا المان‌ها در اطراف نقاط با رفتار تکينه-گونه (نظير مسائل تمرکز تنش) با هدف کاهش زمان محاسبه انجام شده است. از عمده‌ترين عيب‌هاي اين روش‌ها اولاً تعريف معياري مناسب از رفتار تکينه گونه، ثانيا ابزار اعمال معيار و در نهايت احتمال ورود خطا در انتقال اطلاعات از مش ريز به درشت و يا بالعکس است. در حالي که در روش حل بر پايه موجک، شناسايي، اعمال و انتقال اطلاعات تحت مقياس‌هاي متفاوت، جز ذات روش است.

در اين روش ضرايب موجک در اطراف نقاط تکينه به حداکثر مقدار خود مي‌رسند [۴] و اين خود به عنوان معياري در شناسايي نقاط تکينه مي‌تواند به کار برده شود. به عبارتي به صورت ذاتي محل نقاط تکينه با تمرکز ضرايب بزرگ تبديل موجک (بدون توجه به مقياس) حول آن نقاط و حذف ضرايب کوچک تبديل در قسمت‌هاي هموار تابع قابل شناسايي است [۳]. همچنين با توجه به خاصيت قدرت بيان با درجه وضوح متفاوت[1] اطلاعات (ضرايب تبديل موجک در مقياس‌هاي مختلف) به راحتي با الگوريتم‌هاي سريع [۴] که ريشه در پردازش اطلاعات دارند، در مقياس‌هاي متفاوت بيان مي‌شوند. علاوه بر اين اغلب اپراتورها (نظير اپراتور مشتق در حل معادلات ديفرانسيل) در فضاي موجک به صورت ماتريس‌هاي نواري در آمده و عرض اين نوارها بسته به دقت مورد نظر تغيير مي‌نمايد که اين از بزرگ‌ترين مزيت‌هاي انجام محاسبات در فضاي تبديل يافته موجک است: زيرا که نواري بودن خود منجر به سرعت بالاي محاسبات مي‌شود[۷-۵]. در اين مقاله در حالت کلي با حل معادلات بر پايه موجک به صورت زير روبرو هستيم[۳] و [۸]:

$$u_{,t} = ☹u + ☠ f(u) \qquad (۱)$$

که در رابطة فوق $☹u$ و $☠ f(u)$ به ترتيب جمله‌هاي خطي و غيرخطي معادله ديفرانسيل ضمني و☹ و ☠ اپراتورهاي ديفرانسيلي مستقل از زمان، t هستند. در حالت کلي تابع $f(u)$ از نوع غير-خطي بوده و $u_{,t}$ تغييرات u نسبت

* نويسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۲۱۸۱ ، فاکس : ۶۶۴۰۳۸۰۸ ، Email: norzad@ut.ac.ir

به زمان است. براي حل در طول زمان، گسسته سازي در زمان به روش Semi group انجام ميپذيرد که داراي پايداري بالايي بوده و دقت حل با اين روش در حالت صريح قابل قياس با حل به صورت ضمني در روش‌هاي ديگر است [۸]. در ادامه ابزارهاي معرفي شده در بالا براي حل عددي انتشار امواج تخت برشي از نوع SH با انواع شرايط مرزي منجمله حضور سازه به کار گرفته شده است.

آناليز توسط درجه وضوح چندگانه

مقدمه

در حقيقت مي‌توان يک سيگنال يا هر تابع فيزيکي را ترکيب يک تابع هموار، همراه با جزئياتي که بطور محلي نوساناتي را در آن تابع هموار ايجاد مي‌نمايد در نظر گرفت. اختلاف با قسمت هموار سيگنال يعني جزئيات، توسط قدرت بيان با وضوح متفاوت[۲] تعيين مي‌شود. به بيان ديگر در يک درجه تفکيک پذيري يا مقياس (گام نمونه گيري خاص) مورد نظر، يک سيگنال با حذف بعضي جزئيات تقريب زده مي‌شود.

مي‌توان اين‌گونه تصور نمود که با افزايش درجه تفکيک پذيري (سطح دقت) در هر مرحله، جزئياتي ريزتر به وضوح ديد با سطح دقت درشت‌تر اضافه مي‌شود که خود باعث بهبود تقريب مي‌شود. در نهايت وقتي که درجه تفکيک پذيري به سمت بي‌نهايت ميل مي‌کند، سيگنال اصلي به صورت دقيق بازيابي مي‌شود. در ادامه، توضيحات بالا به صورت دقيق‌تري مورد مطالعه قرار مي‌گيرد.

اگر مرتبه درجه وضوح توسط j نشان داده شود، آنگاه مقياس (گام) متناسب با حالت $j = 0$ را برابر واحد در نظر مي‌گيريم. در اين صورت مقدار مقياس يا گام نمونه‌گيري براي تفکيک‌پذيري از مرتبه j، برابر با $1/2^j$ خواهد بود که موجب افزايش جزئيات بيشتر در تابع تصوير شده، مي‌شود.

تابع $f(t)$ را در نظر مي‌گيريم. در سطح دقت j تابع با $f_j(t)$ تقريب زده مي‌شود. در مقياس بعدي از سطح دقت، يعني مرتبه $j+1$، جزئيات اضافه شده با $d_j(t)$ نشان داده مي‌شوند؛ در نتيجه تقريب $f(t)$ در مرتبه $j+1$ به صورت زير خواهد بود:

$$f_{j+1}(t) = f_j(t) + d_j(t) \qquad (۲)$$

تابع اصلي هنگامي که مرتبه تفکيک‌پذيري به سمت بي‌نهايت ميل کند به دست مي‌آيد، يعني:

$$f(t) = f_j(t) + \sum_{k=j}^{+\infty} d_k(t) \qquad (۳)$$

کلمه " وضوح چندگانه" اشاره به وجود همزمان سطوح دقت يا وضوح از درجه‌هاي تفکيک مختلف دارد. بيان فوق يک روش براي نمايش يک تابع به صورت مجموع تابع هموار و دنباله‌اي از جزئيات است.

در حالت کلي فضاي تابعي انتگرال پذير از مرتبه ۲، $L^2(R)$ (يا توابع داراي انرژي محدود) که به صورت $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$ تعريف مي‌شود، را مي‌توان ترکيبي از دنباله‌هايي از زير فضاهاي $\{w_k\}$ و v_j در نظر گرفت، به صورتي‌که تقريب تابع $f(t)$ در سطح دقت از مرتبه j در زير فضاي v_j با $f_j(t)$ نشان داده مي‌شود. جزئيات در اين سطح و بالاتر (مقياس‌هاي کوچک‌تر) را با $d_k(t)$ در w_k که $k = j, \cdots, \infty$ است، نشان مي‌دهند.

تعريف آناليز وضوح چندگانه

فضاي تابعي انتگرال پذير از مرتبه ۲ را در نظر مي‌گيريم. دنباله‌اي از سطوح دقت از مرتبه j به صورتي که در آنها از جزئيات کوچک‌تر از مقياس 2^{-j} صرفنظر شده باشد را تعريف مي‌کنيم. زير فضاي تابعي v_j به صورت تمام اطلاعات مربوط به سيگنال تا حداقل مقياس (با حداکثر گام) 2^{-j} را تعريف مي‌کنيم. آناليز وضوح چندگانه شامل تجزيه فضاي تابعي به صورت دنباله‌اي از v_j ها است.

شرط اول وجود وضوح چندگانه، وجود زير فضاي v_j در زير فضاهاي بالاتر (سطح دقت بالاتر) است، يعني: $v_j \subset v_{j+1}; j \in Z$؛ آنگاه $f_j(t) \in v_j \Leftrightarrow f_{j+1}(t) \in v_{j+1}$.

اختلاف $f_{j+1}(t)$ با $f_j(t)$ اطلاعات اضافي (جزئيات) با مقياس $2^{-(j+1)}$ است که به صورت زير تعريف مي‌شود:

$$d_j(t) = f_{j+1}(t) - f_j(t); \quad d_j(t) \in w_j \qquad (۴)$$

بنابراين رابطه زيرفضاها با هم به صورت زير خواهد بود:

$$v_{j+1} = v_j \oplus w_j \qquad (۵)$$

که در آن w_j فضاي جزئيات با سطح دقت از مرتبه j و متعامد با v_j است. منظور از متعامد بودن آن است که ضرب داخلي هر المان در w_j با v_j برابر صفر است يعني:

$$\varphi(x-k) \in v_0, \psi(x-k') \in w_0 \Rightarrow$$
$$\int \varphi(x-k) * \psi(x-k') dx = 0$$

با ادامه تجزيه زير فضاها داريم:

$$v_{j+1} = w_j \oplus w_{j-1} \oplus v_{j-1} = \dots = w_j \oplus w_{j-1} \oplus w_{j-2} \oplus \dots \oplus w_{j-J} \oplus v_{j-J} \quad (۶)$$

دومين شرط، امکان بيان دقيق يک سيگنال در ريزترين مقياس و تقريب برابر با صفر در درشت‌ترين مقياس است، يعني:

$$\lim_{j \to -\infty} v_j = \{0\} \quad (۷)$$

$$\lim_{j \to \infty} v_j = L^2(R) \quad (۸)$$

شرط سوم، تغير ناپذيري تحت انبساط است، يعني:

$$f(t) \in v_j \Leftrightarrow f(2*t) \in v_{j+1} \quad (۹)$$

شرط چهارم تغيير ناپذيري تحت جابجايي است، يعني:

$$f(t) \in v_j \Leftrightarrow f(t-k) \in v_j \quad (۱۰)$$

شرط آخر وجود تابعي مانند φ (به نام تابع مقياس) است به گونه‌اي که تحت جابجايي، پايه‌هاي متعامد پديد آورنده فضاي v_0 را ايجاد نمايد، يا به عبارتي امکان بسط هر تابع در فضاي v_0 بر حسب اين توابع پايه وجود داشته باشد، يا:

$$;\; v_0 = \overline{\underset{k}{span}\{\varphi_k(t)\}} \quad \varphi_k(t) = \varphi(t-k) \quad (۱۱)$$

در رابطه فوق تابع مقياس اوليه به اندازه k واحد جابجا شده و کل خط با طول بينهايت را پوشش مي‌دهد، يا به بيان ديگر:

$$f(t) = \Sigma_k a_k . \varphi_k(t) \quad f(t) \in v_0 \text{ for} \quad (۱۲)$$

و در حالت کلي $\varphi_{j,k}(t)$ پديد آورنده فضاي v_j است و توابع وسيع‌تري را پوشش مي‌دهد:

$$v_j = \overline{\underset{k}{span}\{\varphi_{j,k}(t)\}} \quad (۱۳)$$

که در آن

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \quad (۱۴)$$

يا به بيان ديگر

$$\text{if } f(t) \in v_j \Rightarrow f(t) = \Sigma_k a_k \varphi(2^j t - k) \quad (۱۵)$$

در روابط فوق $\varphi_{j,k}(t)$ به اندازه 2^j مقياس شده و به اندازه $k \times 2^{-j}$ روي محور اعداد حقيقي جابجا شده است. براي $j > 0$ مجموعه پديد آمده توسط $\varphi_{j,k}(t)$ مجموعه وسيع‌تري است، زيرا که توابع $\varphi_{j,k}(t)$ نسبت به $\varphi_k(t)$ فشرده‌تر است و با گام‌هاي کوچک‌تري انتقال مي‌يابد. در نتيجه مي‌تواند جزئيات زيادتري را بيان نمايد و براي $j < 0$ عرض تابع مقياس بزرگ‌تر مي‌شود و اطلاعات جامع با جزئيات کمتري را مي‌تواند بيان نماييد. رابطه بين زير فضاهاي v_j به صورت شماتيک در شکل (۱) نشان داده شده است.

با توجه به شکل (۱) مي‌توان فهميد که اگر $\varphi(t) \in v_0$ آنگاه $\varphi(t)$ در v_1 نيز مي‌باشد. يعني مي‌توان $\varphi(t)$ را بر حسب $\varphi(2t)$ به صورت زير بيان کرد:

$$\phi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}.\phi(2t-n),\; n \in Z \quad (۱۶)$$

که در آن $h(n)$ ضرايب تابع مقياس است و ضريب $\sqrt{2}$ موجب ثابت ماندن مقدار نرم (انرژي) تابع مقياس تحت مقياس۲ مي‌شود، و يا در حالت سيگنال دو بعدي (تصوير) مقدار متوسط رنگ در درجات متفاوت وضوح حفظ مي‌شود. اين معادله بازگشتي پايه تئوري توابع مقياس است. همان-گونه که در بالا توضيح داده شد اختلاف بين زير فضاي v_{j+1} و v_j زير فضاي جزئيات بوده و با w_j نشان داده مي‌شود. رابطه فوق به صورت شماتيک در شکل (۲) نشان داده شده است. همان‌گونه که از شکل (۲) مشخص است w_0 اختلاف بين زير فضاي v_1 و v_0 است. اگر دسته توابع متعامد حاصل از جابجايي يک تابع که پديد آورنده w_0 است را با $\psi_k(t) = \psi(t-k)$ نشان دهيم آنگاه چون w_0 زير مجموعه v_1 است داريم:

$$\psi(t) = \sum h_1(n).\sqrt{2}.\varphi(2t-n) \qquad n \in Z \quad (۱۷)$$

براي برقراري شرط تعامد بين زير فضاهاي v_j و w_j يعني:

$$< \varphi_{j,k}(t), \psi_{j,k}(t) > = \int \varphi_{j,k}(t).\psi_{j,k}(t)dt = 0$$
$$j,k,l \in Z \quad (۱۸)$$

مي‌توان نشان داد که $h(n)$ با $h_1(n)$ طبق رابطه زير به هم مرتبط هستند[۴]:

$$h_1(n) = (-1)^n h(N-1-n) \quad (۱۹)$$

به $\psi(t)$ موجک مادر گفته مي‌شود و موجک‌هاي ديگر به صورت زير از آن توليد مي‌شوند:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (۲۰)$$

در شکل (۳) به عنوان مثال تابع مقياس و موجک از خانواده Daubechies از مرتبه ۱۲ [۴] در فضاي زماني و فرکانسي و مشتق مرتبه اول تابع مقياس نشان داده شده است. همانگونه که ملاحظه مي‌شود تابع مقياس و موجک هم در فضاي زماني و هم فرکانسي داراي محمل[۳] فشرده[۴] يا محدود هستند. تابعي داراي محمل فشرده است که مقدار غير صفر تابع در بازه کوچک تعريف شده باشد. اين نوع توابع کاربرد زيادي در روش‌هاي عددي دارند (مشابه توابع شکلي در روش المان‌هاي محدود که محمل فشرده دارند و کلمه محدود در المان محدود بيانگر محمل فشرده است).

به این علت در کل به آن موجک یا موج کوچک گفته می‌شود در نتیجه با توجه به محدود بودن محمل توابع مقیاس و موجک این تبدیل قابلیت بیان مشخصات محلي و موضعي توابع تحت وضوح مختلف را دارا است. با توجه به توضیحات بالا هر تابع متعلق به $L^2(R)$ (داراي انرژي محدود) را مي‌توان به صورت زیر نمایش داد:

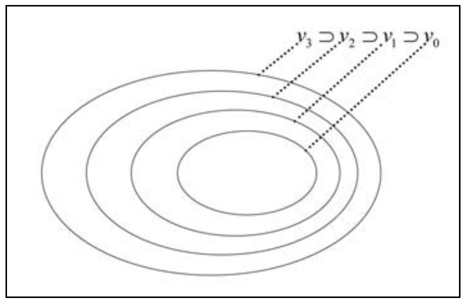
$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c(k).\varphi_k(t)+\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d(j,k).\psi_{j,k}(t) \quad (۲۱)$$

که با توجه به وجود تعامد داریم:

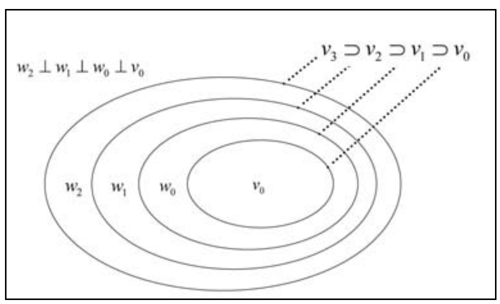
$$c(k)=c_0(k)=<g(t),\varphi_k(t)>=\int g(t).\varphi_k(t)dt \quad (۲۲)$$

$$d_j(k)=d(j,k)=<g(t),\psi_{j,k}(t)>=\int g(t).\psi_{j,k}(t)dt \quad (۲۳)$$

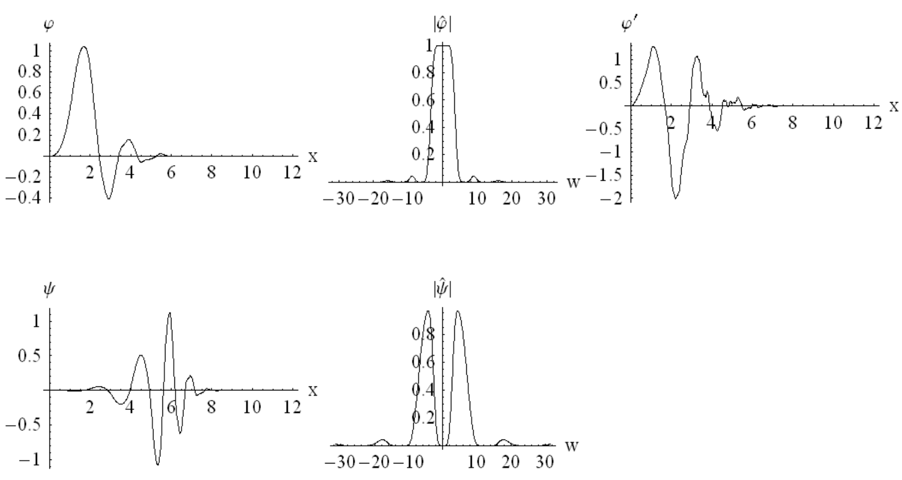
در حقیقت در رابطه بالا $g_0=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c(k).\varphi_k(t)$ تقریب یا نگاشت تابع g در فضاي v_0 است و $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d(0,k).\psi_{0,k}(t)$ دنباله‌اي از جزئیاتي است که به v_0



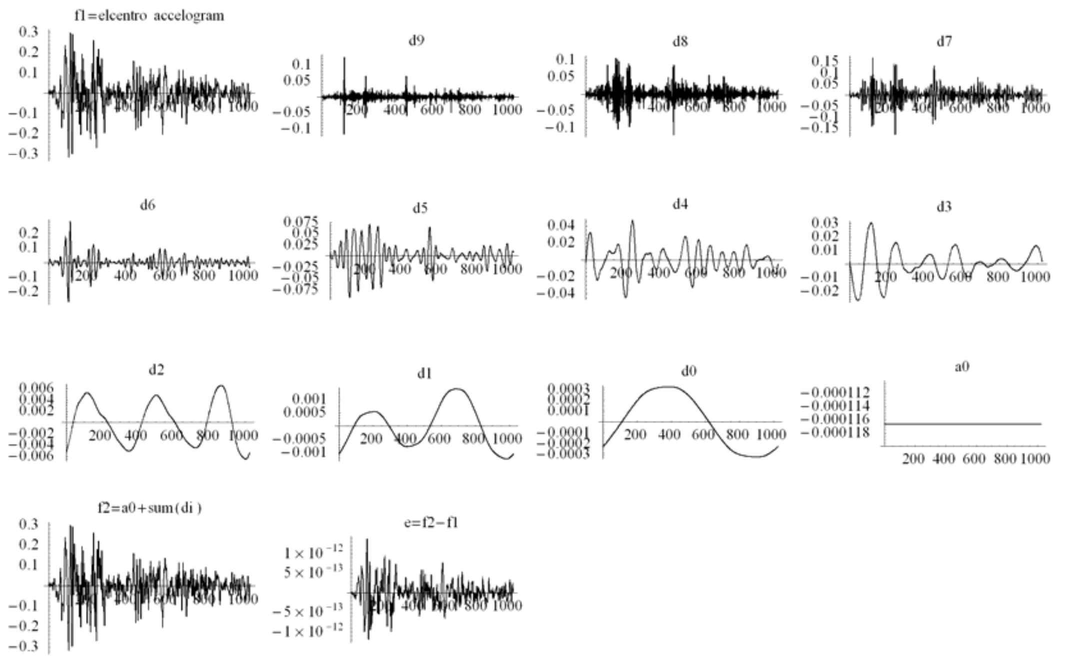
شکل ۱: رابطه بین فضاهاي پدید امده توسط دسته توابع متعامد مقیاس که $v_i; i=0,1,2,3,...$ توسط دسته توابع مقیاس $\varphi_{i,k}$ پدید آمده است [۴].



شکل ۲: رابطه بین فضاهاي متعامد v_i و w_i که هر دو زیر فضاي v_{i+1} مي‌باشند[۴].



شکل ۳: تابع مقیاس و موجک در فضاي فیزیکي و فرکانسي و مشتق تابع مقیاس از خانواده **Db** از مرتبه ۱۲**.**



شكل۴: شتاب نگاشت السنترو، تصوير تقريب و جزييات همراه تابع بازسازي شده و اختلاف با سيگنال اول. تابع مقياس از خانواده **Db** از مرتبه ۱۲.

افزوده مي‌شود تا تابع g در فضاي v_1 نگاشت يابد. با افزايش j و اضافه كردن جزئيات تا J، تابع g را به v_J نگاشت داده‌ايم. توضيحات بالا براي شتاب نگاشت ال-سنترو به صورت گرافيكي در شكل (۴)، در ادامه، بيان مي‌شود: همان‌گونه كه ملاحظه مي‌شود تقريب شتاب‌نگاشت، يعني a_0 در زير فضاي v_0 تقريبا برابر صفر است و با جمع زدن جزئيات از d_0 تا d_9 با a_0 تقريب سيگنال در زير فضاي v_9 به دست مي‌آيد. در انتها، اختلاف مابين سيگنال ورودي (اطلاعات اصلي) با تقريب در زير فضاي v_9 نشان داده شده است، كه نشان دهنده خطا از مرتبه $O(-12)$ است.

بيان اپراتورها در فضاي موجك با محمل محدود به صورت فرم غير استاندارد[۵] [۷-۵]

در اين قسمت به صورت خيلي خلاصه بيان اپراتورها در فضاي موجک بر حسب درجه وضوح مختلف بيان مي-شود. براي مطالعه مفصل‌تر مي‌توان به مراجع [۷-۵] مراجعه نمود.

فرض مي‌كنيم T يک اپراتور (نگاشت) به صورت زير است:

$$T : L^2(R) \rightarrow L^2(R) \qquad (۲۴)$$

بيان آن به فرم غيراستاندارد (NS form) در فضاي موجک با بكارگيري اپراتورهاي $\{A_j, B_j, \Gamma_j\}$ در هر مرتبه از سطح دقت j كه از اعمال اپراتور T بر زير فضاهاي (w_j, v_j) به دست آمده، انجام مي‌پذيرد. (در فرم غيراستاندارد ضرايب تبديل موجک به صورت $\{\hat{d}^j, \hat{s}^j\}$ (شكل (۵)) و در فرم استاندارد به صورت $\{\{d^j\}, s_0\}$ كه $j = 0,1,...,n-1$، است. به عبارتي لفظ غيراستاندارد به اين جهت به اين روش گفته مي‌شود كه هر دو ضرايب توابع مقياس و موجک يعني d^i, s^i را به صورت همزمان، مطابق شكل (۵) در فرمول‌بندي داريم. تصوير اپراتور با در نظر گرفتن اندركنش بين زير فضاهاي v_j و w_j به صورت زير است:

$$A_j = Q_j T Q_j; \qquad (۲۵)$$

$$A_j : w_j \rightarrow w_j ;$$

$$B_j : v_j \rightarrow w_j ; \qquad B_j = Q_j T P_j ;$$

$$\Gamma_j = P_j T Q_j \qquad \Gamma_j : w_j \rightarrow v_j ;$$

$$T_j = P_j T P_j \qquad T_j : v_j \rightarrow v_j ;$$

تصوير اپراتور به زير فضاي v_j به صورت زير تعريف مي‌شود:

$$P_j : L^2(R) \rightarrow v_j \qquad (۲۶)$$

يعني

$$(P_j f)(x) = \sum_k < f, \varphi_{j,k} > \varphi_{j,k}(x) \qquad (۲۷)$$

همچنين براي تصوير اپراتور به زير فضاي w_j داريم:

$$Q_j = P_{j+1} - P_j \quad Q_j : L^2(R) \rightarrow w_j ;$$

آنگاه اپراتور T در فضاي موجک به صورت زنجيره‌اي از اپراتورهاي تصوير شده به صورت زير خواهد شد:

$$T=\{A_j,B_j,\Gamma_j\}_{j\in Z} \qquad (۲۸)$$

اگر صفر درشت‌ترين مقياس باشد، آنگاه رابطه فوق به صورت زير خواهد شدکه در آن 2^n طول آرايه ورودي است:

$$T=\{\{A_j,B_j,\Gamma_j\}_{j\in Z;\, j\le n-1},T_0\} \qquad (۲۹)$$

که

$$T_0=P_0TP_0 \qquad (۳۰)$$

يا به عبارتي ديگر داريم

$$T=\sum_{j=1}^{+\infty}(Q_jTQ_j+Q_jTP_j+P_jTP_j)+P_0TP_0 \qquad (۳۱)$$

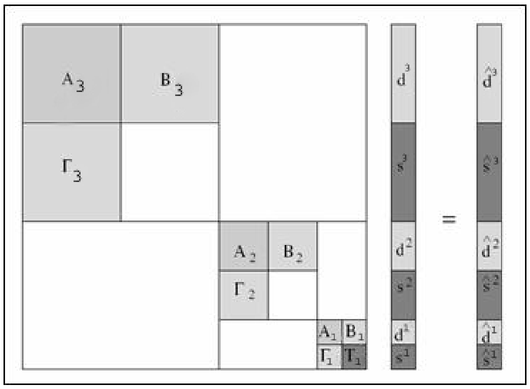
شکل شماتيک بيان غيراستاندارد (ماتريس NS) يک اپراتور در شکل (۵) نشان داده شده است، که d^i,s^i همان ضرايب تبديل به ترتيب تابع مقياس و تابع موجک مي‌باشند و $\hat{d}^i,\hat{s}^i$ نمايش NS است. در شکل (٦) فرم غيراستاندارد ماتريسي اپراتور d/dx براي آرايه با طول ١٠٢٤ که از موجک Db12 استفاده شده، به عنوان مثال نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه مي‌شود اين اپراتور در فضاي موجک به صورت نواري است که خود باعث افزايش سرعت محاسبات و کاهش فضاي ذخيره سازي مي-شود؛ همچنين عرض اين نوار را مي‌توان با صرفنظر کردن از ضرايب کوچک بر حسب دقت مورد نياز باريک‌تر نمود و در نتيجه سرعت محاسبات را افزايش داد. اين حالت نواري شدن اپراتور در فضاي موجک براي اکثر اپراتورها برقرار است [٦]. در نتيجه محاسبات در فضاي موجک داراي کارآمدي بالايي است. چنانچه اپراتور ما مشتق اول يعني $\frac{d}{dx}$ باشد و المان‌هاي اپراتورهاي A_j,B_j,Γ_j,T_j را به ترتيب با $\alpha^j,\beta^j,\gamma^j,s^j$ نشان دهيم، داريم:

$$\alpha_{il}^j=2^j\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(2^jx-i)\psi'(2^jx-l).2^j\,dx=2^j\alpha_{i-l}$$
$$\beta_{il}^j=2^j\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(2^jx-i)\varphi'(2^jx-l).2^j\,dx=2^j\beta_{i-l}$$
(۳۲)
$$\gamma_{il}^j=2^j\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(2^jx-i)\psi'(2^jx-l).2^j\,dx=2^j\gamma_{i-l}$$
$$s_{il}^j=2^j\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(2^jx-i)\varphi'(2^jx-l).2^j\,dx=2^j s_{i-l}$$

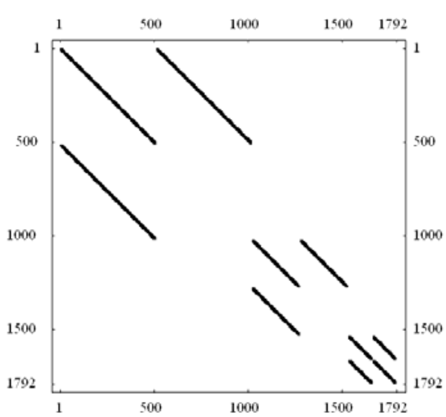
که

$$\beta_l=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-l)\frac{d}{dx}\varphi(x)dx$$
$$\alpha_l=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-l)\frac{d}{dx}\psi(x)dx;$$
$$s_l=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-l)\frac{d}{dx}\varphi(x)dx$$
$$\gamma_l=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-l)\frac{d}{dx}\psi(x)dx;$$
(۳۳)

براي نحوه بازنويسي فرم غير استاندارد ضرايب تبديل موجک يعني $\{\hat{d}^j,\hat{s}^j\}$ به صورت استاندارد يعني $\{\{d^j\},s_0\}$ که $j=0,1,...,n-1$ است و در آن 0 درشت‌ترين فضا است، مي‌توان به مرجع [۹] رجوع کرد.



شکل ۵: بيان غير استاندارد اپراتورها در فضاي موجک. ضرايب $\{\{d^j\},\{s^j\}\}$ با استفاده از تبديل مو جک بر ورودي به دست مي‌آيد و ضرايب $\{\{\hat{d}^j\},\{\hat{s}^j\}\}$ نتيجه عمل اپراتور است که براي بيان به صورت استاندارد نياز به تصوير کردن مجدد به فضاهاي v_j و w_j دارد [۵].



شکل ۶: نمايش غير استاندارد ي اپراتور d/dx در فضاي موجک با **Db12** با آرايه ورودي به طول ۱۰۲۴.

روش **semi group** به عنوان روش جديد براي گسسته سازي زماني براي حل معادله غير خطي **PDEs** [۸]

معادله غيرخطي زير را در نظر مي‌گيريم:

$$\text{In } u_{,t} = ☹u + ☠ f(u) \quad \Omega \in R^{d} \qquad (۳۴)$$

$$\text{In } \; t \in [0,T] \;, \partial\Omega \in R^{d-1} \quad \text{On } \; ✍u(x,t) = 0 \;\; \Omega;$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

که ☹ نماينگر اپراتور خطي ديفرانسيل و ☠ نمايانگر اپراتور غيرخطي ديفرانسيلي؛ Ω ناحية حل و $\partial\Omega$ مرز ناحية حل بوده و $Bu(x,t)$ مقدار تابع در مرز و $u(x,0)$ شرايط اوليه است. آنگاه پاسخ به روش semi group استاندارد به صورت زير است:

$$u(x,t) = e^{t.☹}.u(x,0) + \int_0^t e^{(t-\tau)☹} ☠ (u(x,\tau))d\tau \qquad (۳۵)$$

رابطه بالا، با توجه به وجود انتگرال غير خطي، براي كاربردهاي عملي مناسب نمي‌باشد. چنانچه اپراتور خطي ☹ عدد ثابتي باشد و تابع $u(x,t)$ را در لحظه گسسته شده $u_n = u(x,t_n)$ با گام زماني است Δt كه $t_n = t_0 + n.\Delta t$ و قسمت غيرخطي را به صورت $N_n \equiv ☠ (u(x,t_n))$ نشان دهيم، آنگاه مي‌توان نشان داد كه گسسته شده رابطه(۳۵) به صورت زير است:

$$u_{n+1} = e^{q.l.\Delta t} u_{n+1-l} + \Delta t(\gamma.N_{n+1} + \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m.N_{n-m}) \qquad (۳۶)$$

كه در آن $M+1$ تعداد كل زمان‌هاي گسسته شده و $l \le M$ است. ضرايب γ و β_m تابع $q.\Delta t$ است. چنانچه در رابطه بالا $\gamma = 0$ باشد آنگاه روش، به روش صريح و در حالات ديگر به روش ضمني تبديل مي‌شود.

در جدول (۱) براي حالت صريح، يعني $\gamma = 0, l = 1$ و $M = 1,2,3$ ضرايب γ و β_n آورده شده است. در جدول‌هاي (۱) و (۲) داريم:

$$Q_j(x) = \frac{e^x - E_j(x)}{x^j} \qquad (۳۷)$$

$$E_j(x) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{x^k}{k!} \qquad (۳۸)$$

$$Q_k = Q_k(☹ \times \Delta t) \qquad (۳۹)$$

چنانچه در روابط فوق اپراتور☹ عدد ثابتي نباشد، آنگاه:

$$Q_j(☹.\Delta t) = \frac{e^{☹\Delta t} - E_j(☹\Delta t)}{(☹\Delta t)^j} \qquad (۴۰)$$

$$E_j(☹.\Delta t) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(☹.\Delta t)^k}{k!}; \; j = 0,1,... \qquad (۴۱)$$

يعني

$$Q_0(☹\Delta t) = e^{☹\Delta t}$$

(۴۲)

$$Q_1(☹\Delta t) = (e^{☹\Delta t} - ✋)(☹\Delta t)^{-1}$$

$$Q_2(☹\Delta t) = (e^{☹\Delta t} - ✋ - ☹\Delta t)(☹\Delta t)^{-2}$$

حل معادله ۲ بعدي موج برشي اسكالر براي امواج حجمي SH

براي اين امواج مؤلفه‌هاي جابجايي، سرعت، دانسيته، مدول برشي و نيروي حجمي تابع دو متغيير (x,z) است، يعني به ترتيب

$f_y(x,z), \mu(x,z), \rho(x,z), v_y(x,z), u_y(x,z)$. معادله دو بعدي موج براي امواج SH را مي‌توان به صورت زير نمايش داد:

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + f_y \qquad (۴۳)$$

با تعريف اپراتور $☹_y$ مي‌توان رابطه فوق را به صورت زير بازنويسي كرد:

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = ☹_y + \frac{f_y}{\rho} \qquad (۴۴)$$

$$☹_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \qquad (۴۵)$$

براي به كاربردن روشsemi group معادله موج را به صورت زير بازنويسي مي‌نماييم:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = ☹_y.u_y + \frac{f_y}{\rho} \quad , \frac{\partial u_y}{\partial t} = v_y \qquad (۴۶)$$

و در حالت نمايش برداري داريم:

$$\mathbf{U} = \mathbf{LU} + \mathbf{F} \qquad (۴۷)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix}; \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ ☹_y & 0 \end{pmatrix}; F = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} 0 \\ f_y \end{pmatrix} \qquad (۴۸)$$

گسسته شده رابطه فوق براي حالت صريح در ساده‌ترين حالت به صورت زير است:

$$\mathbf{U}_{n+1} = e^{\Delta t\mathbf{L}}\mathbf{U}_n + \Delta t.\beta_0.\mathbf{F}_n \;\; \gamma = 0 \,\&\, M = 1 \Rightarrow \qquad (۴۹)$$

جدول ۱: ضرايب براي حالت صريح با فرض $\gamma = 0, l = 1$.

M	β_0	β_1	β_2	order
۱	Q_1	0	0	۱
۲	$Q_1 + Q_2$	$-Q_2$	0	۲
۳	$Q_1 + 3Q_2/2 + Q_3$	$-2(Q_2 + Q_3)$	$Q_2/2 + Q_3$	۳

براي به كارگيري روابط فوق در روشsemi group اپراتور نمايي $e^{\Delta t \mathbf{L}}$ به صورت زير تقريب زده مي‌شود(بسط تيلور)[۱]:

$$e^{\Delta t \mathbf{L}} = \mathbf{I} + \Delta t.\mathbf{L} + \frac{\Delta t^2}{2!}\mathbf{L}^{2} + \frac{\Delta t^3}{3!}\mathbf{L}^{3} + \frac{\Delta t^4}{4!}\mathbf{L}^{4} + \dots$$
(۵۰)

در رابطه (۴۹) ضريب β_0 به صورت زير است:

$$\beta_0 = Q_1(\mathbf{L}\Delta t) = (e^{\mathbf{L}\Delta t} - \mathbf{I})(\mathbf{L}\Delta t)^{-1} \quad \gamma = 0 \;\&\; M = 1 \Rightarrow$$
(۵۱)

كه آن را با استفاده از بسط تيلور مي‌توان به صورت زير تقريب زد[۱] :

$$\beta_0 = \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2}.\mathbf{L} + \frac{\Delta t^2}{6}\mathbf{L}^{2} + \frac{\Delta t^3}{24}\mathbf{L}^{3} + \dots \qquad (۵۲)$$

مرزهاي جاذب انرژي[۱، ۲]

در مدل‌هاي عددي با محدوديت وجود مرزهاي مجازي روبرو هستيم. با اين حال براي مطالعه پديده‌هاي گذرا به عنوان مثال انتشار امواج در محيط‌هاي نيمه محدود يا بي‌نهايت به علت محدود بودن مدل عددي قادر به مدل‌سازي تمام محيط نمي‌باشيم و به علت وجود مرزهاي مجازي تحميلي به صورت مصنوعي با پديده برگشت انرژي به داخل محيط روبرو هستيم كه در حالت واقعي وجود ندارد زيرا كه در حالت واقعي امواج به سمت بي‌نهايت حركت مي‌كنند و انرژي كه به محيط داده شده بازگشت نمي كند. بنابراين بايستي در محل اين مرزهاي مجازي، مرزهايي را تعريف كرد كه باعث جذب انرژي و عدم بازگشت آن به محيط مدل عددي گردنند. روش‌هاي گوناگوني براي اعمال اين شرايط در مرزهاي مجازي وجود دارد كه مبناي آنها به حداقل رساندن انرژي بازگشتي به محيط است. يكي از اين روشها، شرايط جذب را به صورت ضمني با استفاده از ضرايب اضافي تضعيف كه وارد معادله حركت موج مي‌نمايد، اعمال مي‌كند و بدين صورت است كه در مرزهاي مجازي مقدار اين ضرايب غير صفر ودر داخل محيط مقدار آنها صفر است. ضرايب تضعيف به گونه‌اي طراحي مي‌شوند كه داراي كران و تا مرتبه ۲ مشتق پذير بوده و به اندازه كافي مشتق هموار داشته باشند به گونه‌اي كه بتواند به صورت تدريجي انرژي در حال حركت به سوي مرز را جذب نمايد.

چنانچه اين ضرايب را با Q_y نشان دهيم، معادله اصلاح شده موج به صورت زير خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + Q_y \times \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\right) + \frac{f_y}{\rho}$$
(۵۳)

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix}; \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \text{☹}_y & -Q_y \end{pmatrix}; F = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} 0 \\ f_y \end{pmatrix} \qquad (۵۴)$$

مرزهاي آزاد

يكي از روش‌هاي اعمال شرايط مرزي از نوع آزاد، منظور ساختن آن به صورت ضمني در معادله مي‌باشد. روش ديگر اختصاص مشخصات مكانيكي صفر به محيط پيوسته در ناحيه آزاد است كه از روش دوم در اين مقاله استفاده شده است.

اعمال تبديل موجک به اپراتورهاي دو بعدي

در حالت كلي مي‌توان به دو صورت تبديل موجک را به اپراتورها از بعد بالاتر اعمال نمود. تصوير اپراتور به صورت مستقيم به فضاي موجک [۱۰] همان‌گونه كه براي اپراتور يک بعدي مانند اپراتور مشتق انجام پذيرفت و يا به عنوان مثال در حالت مشتق ضمني در جهت x، با ثابت فرض كردن جهت y به صورت يک بعدي در جهت x عمل نمود. در اين مقاله از روش دوم استفاده شده است.

مثال‌ها

براي كنترل صحت حل در فضاي موجک در مثال ۱ كه داراي شرايط مرزي آسان‌تري نسبت به مثال ۲ است، حل با روش تفاوت‌هاي محدود نيز ارايه شده است.

مثال ۱: در اين مثال برخورد يک قطار موج تخت هارمونيک SH با يک حفره استوانه‌اي در محيط بي‌نهايت مورد مطالعه قرار گرفته است. مدل سازي امواج تخت توسط ايجاد تغيير شكل اوليه سينوسي در محيط انجام پذيرفته است. بنابراين پس از انتشار، در محيط دو دسته موج تخت با نصف دامنه اوليه در دو جهت مخالف هم در حال انتشار مي‌باشند. تغيير شكل اوليه از نوع سينوسي با عدد موج ۶۴ با دامنه واحد است.

چهار مرز از نوع جذبي و ضريب تضعيف Qy طبق رابطه زير است

$$Q_y(x,z) = ax.\left(e^{bx.x^2} + e^{bx.(x-nx)^2}\right) + az.\left(e^{bz.z^2} + e^{bz.(z-zn)^2}\right)$$

$$ax = az = 10000; bx = bz = -0.02; nx = nz = 128 \qquad (٥٦)$$

در رابطه فوق nx و ny تعداد نقاط نمونه گيري در جهت-هاي x و y است. مشخصات مكانيكي محيط عبارت است از:

$$\rho = 2\frac{ton}{m^3} \text{ و } \mu = 1.8\times10^4 kPa$$

در شكل (۷) برخورد قطار امواج تخت با يک تونل دايره‌اي شكل، قبل و بعد از برخورد امواج تابيده، نشان داده شده است. در شكل (۸) پاسخ در زمان t=0.0048 نشان داده شده است. زمان كل محاسبه ۵۶۹ ثانيه است. در شكل (۹) حل بر پايه روش تفاوت‌هاي محدود از نوع صريح رانگ-گوتا براي دو حالت حداكثر فاصله نقاط شبكه ۰.۰۰۷ و ۰.۰۰۵ آورده شده است (يعني شبكه با حداقل نقاط به ترتيب ۱۴۳*۱۴۳ و ۲۰۰*۲۰۰). همان‌گونه كه ملاحظه مي‌شود با ريز شدن شبكه حل بر پايه تفاوت‌هاي محدود به حل بر پايه موجک نزديک مي‌شود. در زير شكل‌هاي (۸) و (۹) زمان كل لازم در محاسبات آورده شده است. همان‌گونه كه ملاحظه مي‌شود روش بر پايه موجک با تعداد نقاط شبكه كمتر با زمان مناسب پاسخ با دقت مناسب را داده است.

مثال۲: در اين مثال اندركنش ديوار با پي نيم دايره‌اي با خاک تحت اثر امواج تخت SH بر پايه موجک آورده شده است.

فرض مسئله محيط همگن و همسان‌گرد است. ديوار و پي نيم دايره‌اي آن به صورت محيط پيوسته مدل شده‌اند. براي مطالعه تاثير صلبيت پي بر پاسخ ديوار، دو مدل متفاوت براي پي نيم-دايره‌اي فرض شده است. همچنين در هر حالت، براي بررسي اثر وزن سازه، دو چگالي متفاوت براي پي و سازه مدنظر بوده است.

مدول‌هاي برشي پي نيم دايره‌اي در دو حالت عبارتند از $\mu_1 = 4\times10^7 kPa$ و $\mu_2 = 100\times10^7 kPa$. حالت اول براي مدل‌سازي پي انعطاف پذير و دومي براي شبيه سازي پي نسبتا صلب به كار گرفته شده است. مدول برشي ديوار در هر دو حالت $\mu_1 = 4\times10^7 kPa$ است. چگالي خاک $\rho = 1.8\ (ton/m^3)$ و چگالي ديوار و پي در دو حالت $\rho_1 = 0.5\times2.5\ (ton/m^3)$ و $\rho_2 = 1.5\times2.5\ (ton/m^3)$ در نظر گرفته شده است. شبكه به كار گرفته شده در روش موجک داراي ابعاد ۱۲۸*۱۲۸ و موجک از خانواده Daubechies از مرتبه۱۲ است. امواج تخت مانند مثال قبل است و زاويه تابش آن ۴۵ درجه است.

در شكل (۱۰) اثر عبور موجSH بر ديوار در حين و بعد از عبور امواج نشان داده شده است و براي اين مثال $\rho_{wall,found} = 1.5\times2.5 ton/m^3$ و $\mu_{wall,found.} = 4\times10^7 kPa$ است. عدد موج، موج تابيده شده برابر k=128 و دامنه موج رسيده به ديوار برابر ۰.۵ است.

همان‌گونه كه از شكل (۱۰) مشخص است بعد از عبور امواج تخت، انرژي ذخيره شده در ديوار به علت تشعشع زايل گرديده است به گونه‌اي كه تقريبا در دو برابر زمان عبور موج، ارتعاش ديوار صفر گرديده است. به طور كلي بسته به طول موج تابيده شده و نوع صلبيت پي، در امتداد ديوار يک و يا چندين موج ايستا تشكيل شده است كه با افزايش عدد موج و يا كاهش طول موج ميل به تشكيل چندين موج ايستا به موازات هم در طول ديوار وجود دارد.

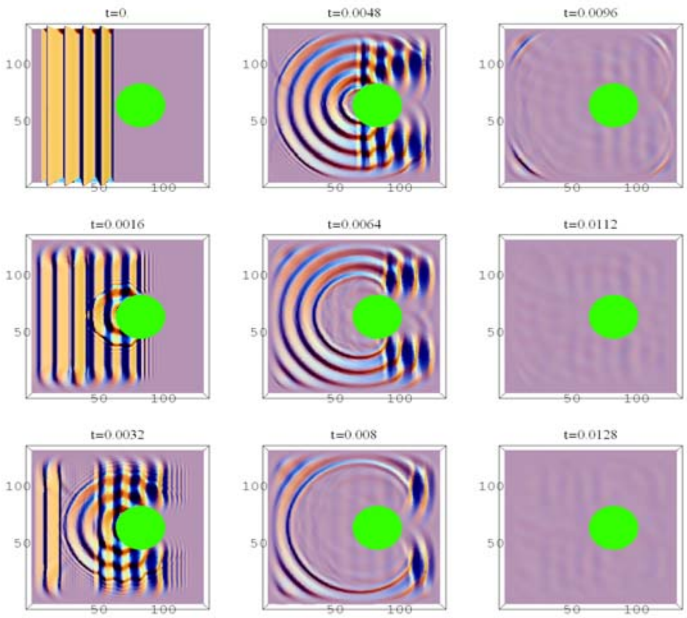
در شكل (۱۱) يک نمونه از امواج ايستاده ايجاد شده در ديوار بعد از گذر امواج تخت ترسيم گشته است. توجه شود كه دامنه موج تابيده ۰.۵ است.

در شكل (۱۲)، مقايسه نسبت مقادير حداكثر مطلق جابجايي انتهاي ديوار به امواج تخت با دامنه ۰.۵ برخوردي به ديوار ولي با اعداد موج متفاوت در دو حالت پي صلب (نيمه صلب) و انعطاف پذير براي دو چگالي متفاوت (اثر وزن ديوار) $\rho_1 = 0.5*2.5\frac{ton}{m^3}$ و $\rho_2 = 1.5*2.5\frac{ton}{m^3}$ آورده شده است. عملا مي‌توان مشاهده نمود كه بخصوص در حالت پي صلب برعكس انتظار، پاسخ ديوار سنگين‌تر كمتر از ديوار سبک‌تر است (حل تحليلي نيز اين را نشان مي‌دهد[۱۱]).

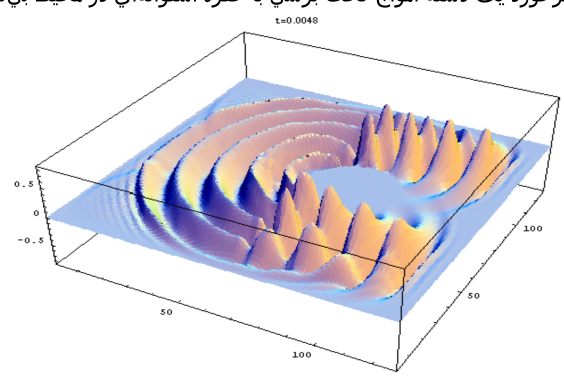
همچنين در حالت پي انعطاف پذير پاسخ از حالت پي صلب (حالت نزديک به گيردار) مي‌تواند خيلي بيشتر باشد كه نتايج فوق اهميت مساله اندركنش خاک و سازه را مي‌رساند. در ادامه رفتار نقطه مياني از انتهاي ديوار مطابق شكل (۱۳) مورد مطالعه قرار مي‌گيرد.

در شكل (۱۴) پاسخ نقطه c در شكل‌هاي بالايي و توزيع چگالي انرژي آن در فضاي موجک پيوسته نشان داده شده است.

همان‌گونه كه ملاحظه مي‌شود با بالا رفتن عدد موج، انرژي در مقياس‌هاي كوچک‌تر متمركز مي‌شود. علاوه بر اين پاسخ پس از عبور امواج سريعاً نزول پيدا مي‌كند.

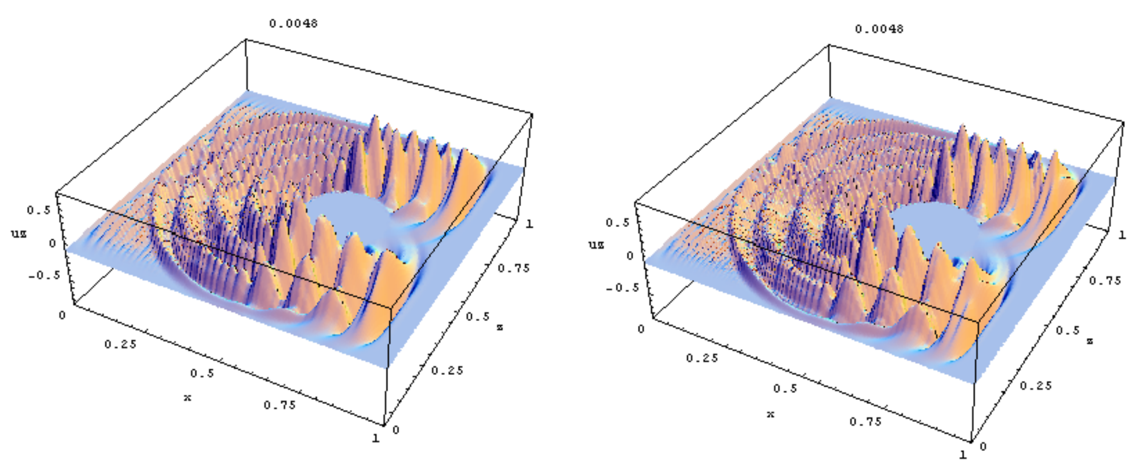


شکل ۷ : برخورد یک دسته امواج تخت برشي با حفره استوانه‌اي در محیط بي‌نهایت.



n*n=128*128, t(calculate)=569 sec

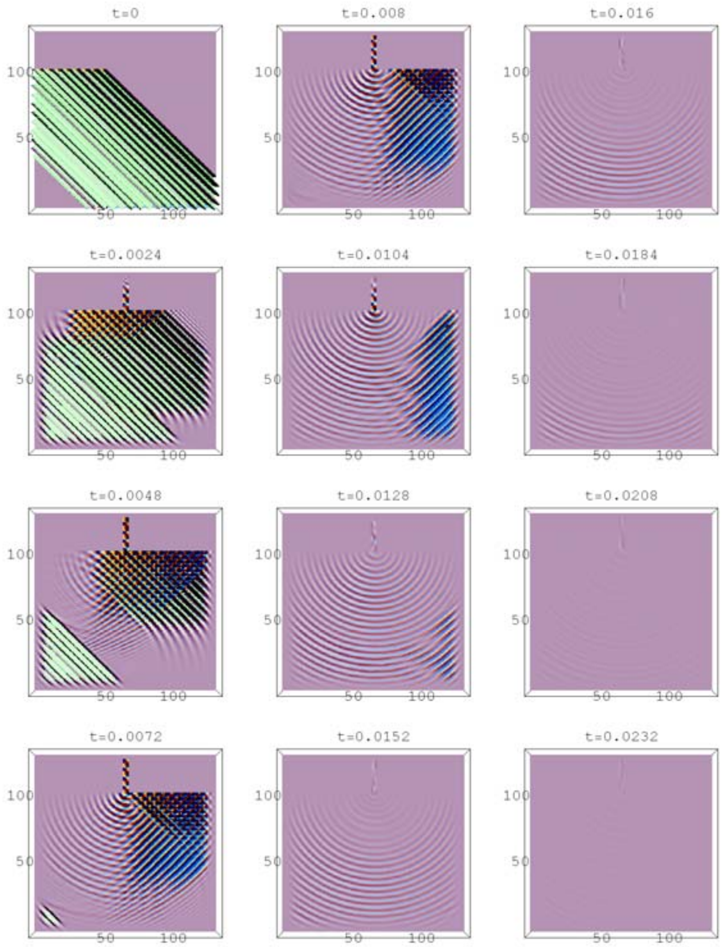
شکل ۸: پاسخ در زمان ۰.۰۰۴۸ ثانیه. حل بر اساس تئوري موجک. زمان ذکر شده در زیر شکل‌ها زمان کل محاسبه است.



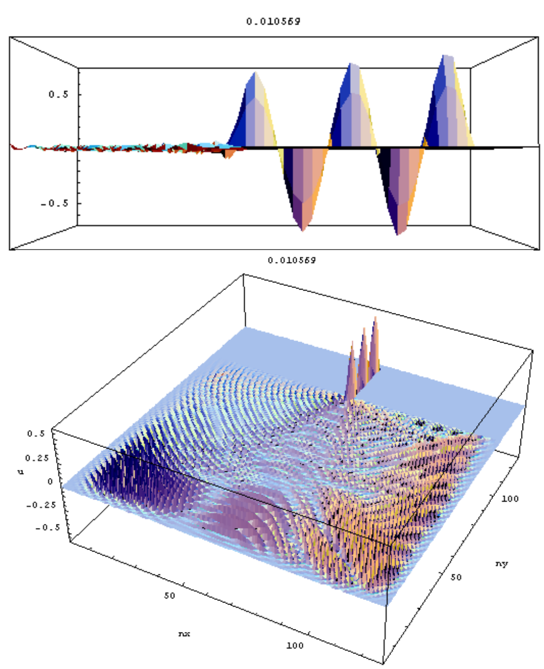
dx(max)=0.007 ,t=370 sec

dx(max)=0.005, t=932 sec

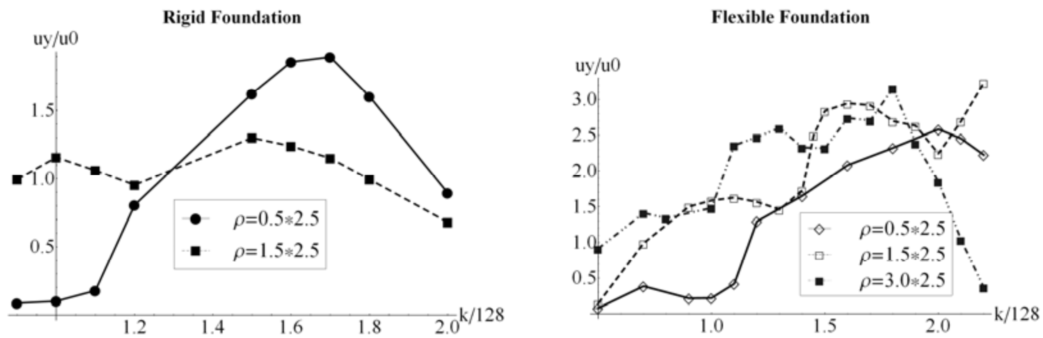
شکل ۹: پاسخ در زمان ۰.۰۰۴۸ ثانیه. حل بر اساس روش تفاوت‌هاي محدود. زمان ذکر شده در زیر شکل‌ها زمان کل محاسبه است و منظور از **dx** حداکثر فاصله نقاط مش محاسبات است.



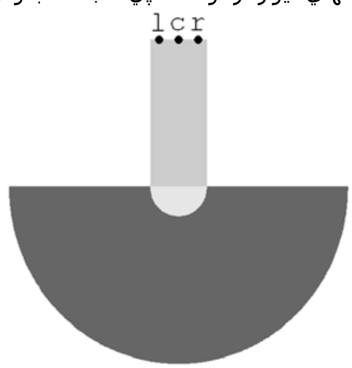
شکل ۱۰: پاسخ سازه به برخورد قطار امواج تخت.همانگونه که ملاحظه می‌شود بعد از عبور امواج دیوار به منبع ارتعاش تبدیل می‌شود.



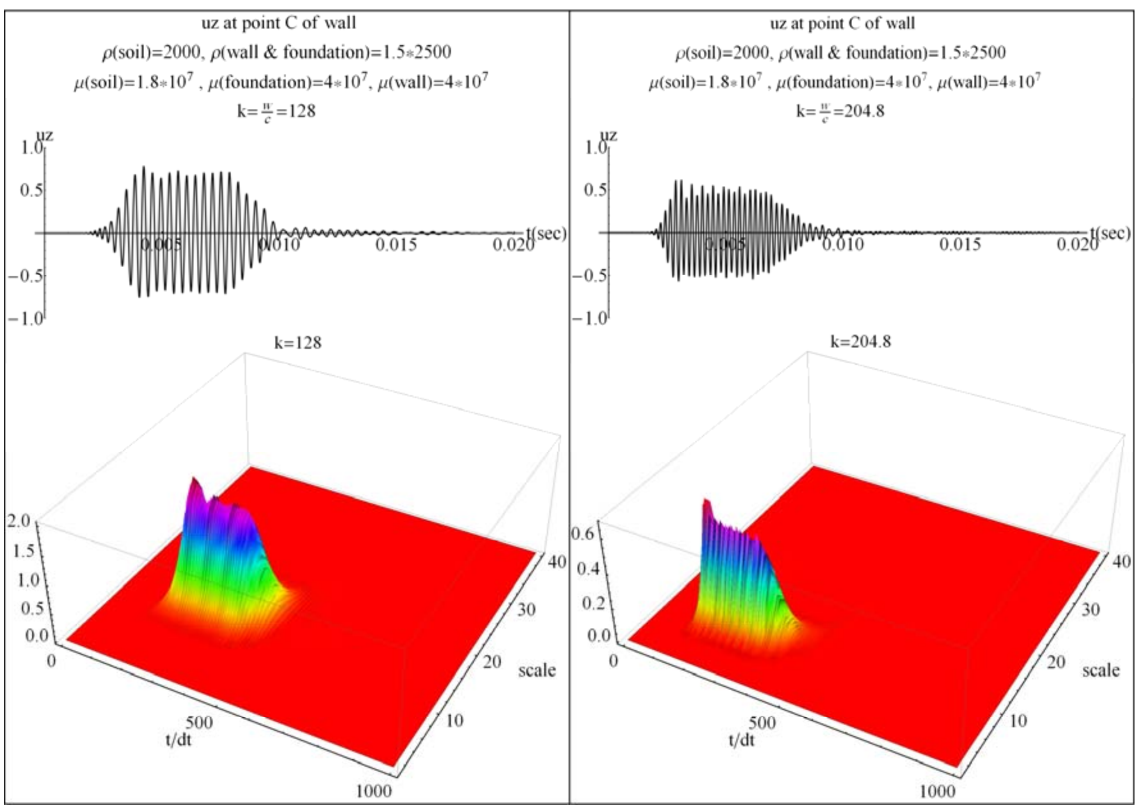
شکل ۱۱: تشکیل امواج ایستاده در دیوار در اثر برخورد دسته امواج تخت پیش‌رونده.



شکل ١٢: مقايسه نسبت جابجايي حداکثر انتهاي ديوار در دو حالت پي نسبتا صلب و نرم براي دو حالت ديوار با وزن‌هاي متفاوت.



شکل ١٣: شکل شماتيک ديوار برشي با طول بينهايت با پي نيم دايره و نقاط مورد مطالعه.



شکل ١۴: جابجايي نقطه وسط انتهاي ديوار در طول زمان و چگالي انرژي در فضاي موجک پيوسته.

نتيجه گيري

همان‌طور كه نشان داده شد مي‌توان با تصوير مستقيم اپراتورها (اپراتور مشتق) به فضاي موجک از مزيت‌هاي حل به صورت وفقي (کنترل عرض نوارها در فرم ماتريسي اپراتورها در فضاي موجک) بهره مند شد. بيان به صورت فرم ماتريسي اپراتورها در فضاي موجک با عرض کم از مزيت‌هاي اصلي اين روش است ليکن تصوير مستقيم اپراتور به فضاي موجک داراي دو عيب نيز است. اولاً عدم توانايي ارضاء انواع شرايط مرزي؛ و ثانياً مشکل بودن تصوير اپراتورهاي غير خطي مانند $e^{\Delta tL}$ به فضاي موجک (به عنوان مثال تقريب با بسط تيلور و لزوم در نظر گرفتن جملات زياد براي دقت مورد نظر). عيب‌هاي فوق باعث محدوديت در کاربرد روش تصوير مستقيم اپراتورها به فضاي موجک مي‌شود.

مراجع

1 - Tae-Kyung Hong, and Kennett, B. L. N. (2002). “On a wavelet-based method for the numerical simulation of wave propagation.” *J. Comput. Phys.,* PP. 577-622.

2 - Tae-Kyung Hong, and Kennett, B.L.N. (2002). “A wavelet-based method for simulation of two-dimensional elastic wave propagation.” *Geophys. J. int*, Vol. 150, PP. 610-638.

3 - Beylkin, G. and Keiser, J. M. (1997). *An adaptive pseudo-wavelet approach for solving nonlinear partial differential equations*. Volume 6 in the Wavelet Analysis and Application Series, Academic Press.

4 - Burrus, C. Sidney, Ramesh A.Gopinath, Haitao Gao, (1998). *Introduction to Wavelets and Wavelet Transform*, PRENTIC HALL.

5 - Gordon Erlebache, Hussaini, M. Yousuff. and Jameson, Leland M. (1996). *Wavelets Theory and Applications*, Edited by Oxford University Press.

6 - Beylkin, G. (1992). “On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets.” *SIAM J. Numer. Anal*.

7 - Beylkin, G. and Rokhlin, R. Coifman, (1991). “Fast wavelet transforms and numerical algorithms 1.” *Comm. Pure and Appl. Math,* Vol. 44, PP. 141-183.

8 - Beylkin, G. Keiser, J. M. and Vozovoi, L. (1998). “A new class of time discretization schemes for the solution of nonlinear PDEs.” *J. Comput. Phys.* Vol. 147, PP. 362.

9 - Gines, David L., Beylkin, G. and Dunn, J. (1998). “LU factorization of non-standard forms and direct multiresolution solvers.” *Applied and Computational Harmonic Analysis,* Vol. 5, PP. 156-201.

10 - Hajji, M. A. Melkonia, S. and Vaillancourt, R. (2004). “Representation of Differential Operators in Wavelet Basis”, Computer and Mathematics with Applications, Vol. 47, PP. 1011-1033.

11 - Trifunac, M. D. (1972). *Interaction of a shear wall with the soil for incident plane SH waves.* Bulletin of the Seismological Society of America”, Vol. 62, No. 1, PP. 63-85.

واژه‌هاي انگليسي به ترتيب استفاده در متن

1 - Multiresolution
2 - Resolution
3 - Support
4 - Compact
5 - NS-Form