تحلیل نیم فضای ایزوتروپ جانبی تحت اثر خمش شالوده مدور صلب مستقر بر سطح

عمار میرزاپور[۱]، مرتضی اسکندری‌قادی*[۲] و عزیزالله اردشیربهرستاقی[۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشگاه علوم و فنون مازندران، بابل

[۲] گروه علوم پایه مهندسی، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران

[۳] دانشجوی دکتری سازه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

(تاریخ دریافت ۱۳۸۹/۰۲/۱۵، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۱۳۹۰/۰۶/۱۴، تاریخ تصویب ۱۳۹۰/۰۹/۳۰)

چکیده

در این مقاله به تحلیل دقیق و عمیق یک نیم فضا با رفتار همسان جانبی (ایزوتروپ جانبی) تحت اثر تغییرمکان خمشی صفحه مدور صلب مستقر بر روی سطح نیم‌فضا پرداخته می‌شود. بدین منظور معادلات حاکم بر سیستم در مختصات استوانه‌ای بیان شده و برای مجزاسازی از یک دسته توابع پتانسیل اسکالر استفاده می‌شود. همچنین برای حل معادلات حاکم از سری فوریه و تبدیل هنکل استفاده شده و معادلات نهایی در فضای تبدیل یافته حل می‌شوند. برای تعیین ثابت‌های جواب، شرایط مرزی تنش و تغییرمکان به‌صورت معادلات انتگرالی دوگانه نوشته شده و سپس معادلات انتگرالی دوگانه به صورت تحلیلی حل می‌شوند. با حل معادله انتگرالی، توابع پتانسیل، توابع تغییرمکان و تنش و نیروی تماسی برای دوران خمشی صفحه به‌صورت تحلیلی تعیین می‌شوند. با برآورد عددی و انطباق نتایج در حالت ساده‌تر مربوط به محیط همسان (ایزوتروپ)، صحت و دقت نتایج اثبات می‌شود.

واژه‌های کلیدی: نیم فضا، ایزوتروپ جانبی، شالوده مدور صلب، تغییر مکان خمشی، معادلات انتگرالی دوگانه.

مقدمه

تحلیل محیط‌ها تحت اثر تغییرمکان‌ها و حرکت‌های صفحات صلب مدت‌ها است که ذهن محققان مکانیک مهندسی، تئوری ارتجاعی و ریاضیات کاربردی را اشغال کرده است که از آن جمله می‌توان به ریسنر[۱] و ساگوسی[۲] [۱]، اسنیدن[۳] [۲ و ۳]، رابرتسون[۴] [۴]، پک[۵] و گوبرت[۶] [۵] و پک و اشلاک[۷] [۶] اشاره کرد.

نتایج بررسی محیط‌ها تحت تغییرمکان‌ها و حرکت‌های صفحات صلب می‌تواند در شکل دادن فلزات در مهندسی مکانیک و در تحلیل تنش‌ها و تغییرمکان‌های زیر شالوده در مهندسی عمران مورد استفاده قرار گیرد. همواره تماس یک صفحه صلب با یک محیط ارتجاعی ایجاد رفتار تکین[۸] در لبه‌های تماس می‌نماید. این موضوع به علت مقاومت محدود اجسام مورد علاقه مهندسان و به علت مشکلات تحلیلی مورد علاقه محققان ریاضیات کاربردی بوده‌است [۲، ۳، ۶، ۷ و ۸]. از آنجایی‌که معادلات حرکت در تئوری ارتجاعی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی و درگیر می‌باشند، حل تحلیلی و بررسی دقیق جواب‌ها نیاز به مجزاسازی آنها دارد. یکی از ابزارهای قوی و کاربردی در این زمینه استفاده از توابع پتانسیل[۹] می‌باشد. توابع پتانسیل متعددی برای جداسازی معادلات تعادل در محیط‌های همسان[۱۰] ارائه شده‌اند که از آن میان می‌توان به توابع پتانسیل لامه[۱۱]، لاو[۱۲]، بوسینسک[۱۳]، نوبر و پاپکویچ[۱۴]، گالرکین[۱۵] [۹] و تابع پتانسیل اسکندری قادی و پک [۱۰] اشاره کرد. برخی از این توابع پتانسیل قادر به حل همهٔ مسائل تئوری ارتجاعی نیستند. توابع پتانسیلی که قادر به حل همه مسائل باشند را توابع پتانسیل کامل گویند و در مقابل توابع پتانسیلی که برخی از مسائل را حل نمایند، توابع پتانسیل ناکامل نامیده می‌شوند. از طرفی بررسی محیط‌های ناهمسان[۱۶] اجتناب ناپذیر است. شاید اولین بررسی یک نیم‌فضای ناهمسان تحت اثر نیروی سطحی مربوط به میشل[۱۷] [۱۱] باشد. از توابع پتانسیل کامل ارائه شده برای محیط‌های همسان‌جانبی[۱۸] می‌توان به توابع الیوت [۱۲]، هو- نواکی- لخنیتسکی[۱۹] [۱۳ و ۱۴] در حالت استاتیکی و اسکندری قادی [۱۵] در حالت دینامیکی اشاره کرد.

*نویسنده مسئول: تلفن: فاکس: Email: ghadi@ut.ac.ir

حل دقیق اثر تغییرمکان صفحات صلب روی نیم‌فضاها با استفاده از تبدیلات انتگرالی[۲۰] به حل معادلات انتگرالی دوگانه[۲۱] می‌انجامد [۳ و ۵]. معمولاً برای حل معادلات انتگرالی، با استفاده از تبدیلات انتگرالی، معادلات انتگرالی دو گانه به معادلات انتگرالی فردهلم نوع دوم[۲۲] [۱۶] و یا هر معادله قابل حل دیگر تبدیل می‌شوند.

دراین مقاله یک صفحه صلب دایره‌ای مستقر بر نیم فضای ارتجاعی خطی با رفتار همسان جانبی چنان در نظر گرفته می‌شود که محور همسانی محیط، عمود بر صفحه باشد. صفحه تحت تغییر مکان خمشی ثابت حول محور افقی قرار می‌گیرد. تحت این شرایط معادلات حاکم بر محیط با استفاده از توابع پتانسیل هو- نواکی- لخنیتسکی مجزا سازی شده و با استفاده از تبدیل هنکل[۲۳] در دستگاه مختصات استوانه‌ای حل می‌شوند. از بین مجموعه جواب موجود، جواب وابسته به شرایط مسئله با توجه به رفتار شاخه‌ای مجموعه جواب، چنان اختیار می‌گردد که شرایط مرزی در فواصل دور از صفحه برقرار گردد. شرایط پیوستگی در محل وجود صفحه به معادلات انتگرالی دوگانه تبدیل شده و به کمک روش نوبل[۲۴] [۱۶] به معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم تبدیل می‌شود. معادله انتگرالی بدست آمده به صورت تحلیلی حل می‌شود. نتایج گرافیکی نشان می‌دهند که میزان نا ایزوتروپی در اندازه پاسخ تأثیر بسزایی داشته و عدم در نظر گرفتن آن به نتایج نادقیق می‌انجامد.

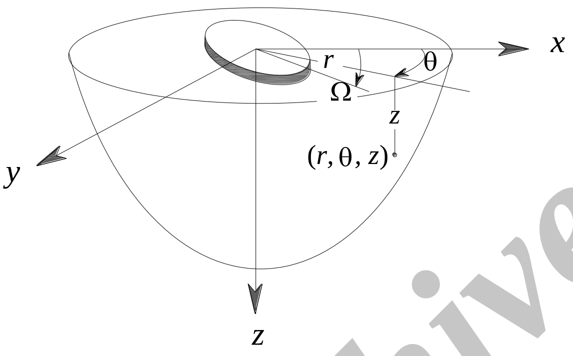
معادلات حاکم و حل آنها

یک نیم‌فضای همسان جانبی به همراه یک صفحهٔ صلب دایره‌ای[۲۵] طوری در نظر گرفته می‌شود که محور ایزوتروپی (همسانی) آن عمود بر سطح صفحه صلب باشد. دستگاه مختصات استوانه‌ای $(o:\theta,z,r)$ طوری قرار داده می‌شود که در آن امتداد z موازی محور همسانی بوده و نیم فضا با $0 \le z < \infty$ تعریف شود (شکل ۱). معادلات تعادل برای حالتی که نیروی حجمی وجود نداشته باشد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A_{11}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right)+\frac{A_{11}-A_{12}}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + A_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{A_{11}+A_{12}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) -2A_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}=0,$$

$$\frac{A_{11}-A_{12}}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right)+A_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + A_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{A_{11}+A_{12}}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) +2A_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+(A_{13}+A_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial z}=0,$$

$$A_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+A_{44}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right) +(A_{13}+A_{44})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+(A_{13}+A_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta\partial z}=0. \quad (۱)$$



شکل۱: نیم فضای همسان جانبی به همراه صفحه صلب دایره‌ای

در این رابطه u، v و w مؤلفه‌های بردار تغییرمکان به ترتیب در امتدادهای r، θ و z بوده و $A_{ij}=(i,j=r,\theta,z)$ ضرایب ارتجاعی می‌باشند که تانسور تنش[۲۶] σ_{ij} را به تانسور کرنش[۲۷] ε_{ij} مربوط می‌سازند:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}&=A_{11}\varepsilon_{rr}+A_{12}\varepsilon_{\theta\theta}+A_{13}\varepsilon_{zz},\\
\sigma_{\theta\theta}&=A_{12}\varepsilon_{rr}+A_{11}\varepsilon_{\theta\theta}+A_{13}\varepsilon_{zz},\\
\sigma_{zz}&=A_{13}\varepsilon_{rr}+A_{13}\varepsilon_{\theta\theta}+A_{33}\varepsilon_{zz},\\
\sigma_{rz}&=2A_{44}\varepsilon_{rz},\ \ \sigma_{\theta z}=2A_{44}\varepsilon_{\theta z},\ \ \sigma_{r\theta}=2A_{66}\varepsilon_{r\theta}
\end{aligned} \quad (۲)$$

در این روابط $A_{66}=(A_{11}-A_{12})/2$ بوده و ε_{ij} مؤلفه‌های تانسور کرنش می‌باشند. ضرایب ارتجاعی A_{ij} برحسب E (مدول یانگ در صفحه ایزوتروپی)، $\overline{E}$ (مدول یانگ عمود بر صفحه ایزوتروپی)، υ (ضریب پواسون در

صفحه ایزوتروپی، جمع شدگی در صفحه ایزوتروپی به علت کشش در همین صفحه)، $\bar{\upsilon}$ (ضریب پواسون عمود بر صفحه ایزوتروپ، جمع شدگی عمود بر صفحه ایزوتروپی به علت کشش در این صفحه)، μ (مدول برشی در صفحه ایزوتروپی) و $\bar{\mu}$ (مدول برشی در صفحات عمود بر صفحه ایزوتروپی) به صورت زیر نوشته می‌شوند [۱۴]:

$$A_{11}=\frac{E(1-\frac{E}{\bar{E}}\bar{\upsilon}^2)}{(1+\upsilon)(1-\upsilon-2\frac{E}{\bar{E}}\bar{\upsilon}^2)}, A_{13}=\frac{E\bar{\upsilon}}{1-\upsilon-2\frac{E}{\bar{E}}\bar{\upsilon}^2},$$
$$A_{33}=\frac{\bar{E}(1-\upsilon)}{1-\upsilon-2\frac{E}{\bar{E}}\bar{\upsilon}^2}, A_{44}=\bar{\mu}, A_{66}=\frac{E}{2(1+\upsilon)}=\mu. \qquad (۳)$$

برای مواد همسان (ایزوتروپ) ضرایب ارتجاعی A_{ij} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_{11}=A_{33}=2\mu(1-\upsilon)/(1-2\upsilon),$$
$$A_{12}=A_{13}=2\mu\upsilon/(1-2\upsilon),\ A_{44}=A_{66}=\mu. \qquad (۴)$$

که در رابطه فوق μ معرف مدول برشی و υ معرف ضریب پواسون می‌باشد.

مؤلفه‌های بردار تغییرمکان بر حسب تابع پتانسیل هو-نواکی- لخنیتسکی F و χ در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$u=-\alpha_3\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta},\ v=-\alpha_3\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial z}+\frac{\partial\chi}{\partial r},$$
$$w=(1+\alpha_1)[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}]F \qquad (۵)$$

که در آن:

$$\alpha_1=\frac{A_{66}+A_{12}}{A_{66}},\ \alpha_2=\frac{A_{44}}{A_{66}},\ \alpha_3=\frac{A_{13}+A_{44}}{A_{66}},\ \beta=\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \qquad (۶)$$

با جایگزینی روابط (۵) در (۱)، معادلات تعادل به معادلات زیر برای توابع پتانسیل تبدیل می‌شوند:

$$\nabla_1^2\nabla_2^2\,F(r,\theta,z)=0, \qquad \nabla_0^2\chi(r,\theta,z)=0, \qquad (۷)$$

که در آن:

$$\nabla_i^2=\nabla_i=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (i=0,1,2) \qquad (۸)$$

و پارامترهای s_1^2 و s_2^2 ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$A_{33}A_{44}s^4+(A_{13}^2+2A_{13}A_{44}-A_{11}A_{33})s^2+A_{11}A_{44}=0. \qquad (۹)$$

$s_2 s_1$ می‌توانند اعداد مختلط باشند اما نمی‌توانند اعداد موهومی خالص باشند [۱۴]. به علاوه $s_0^2=A_{66}/A_{44}$. به منظور حل معادلات (۷)، می‌توان توابع F و χ را نسبت به θ به صورت سری فوریه[۲۸] نوشت. سری فوریه مختلط این توابع به صورت زیر هستند[۲]:

$$F(r,\theta,z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}F_m(r,z)e^{im\theta},$$
$$\chi(r,\theta,z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\chi_m(r,z)e^{im\theta}, \qquad (۱۰)$$

که در آن F_m و χ_m ضرایب mام سری فوریه توابع F و χ هستند [۲]:

$$\left[F_m,\chi_m(r,z)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[F,\chi(r,\theta,z)\right]e^{-im\theta}d\theta. \qquad (۱۱)$$

با قرار دادن روابط (۱۰) و (۱۱) در معادلات (۷) این معادلات به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\nabla_{1m}^2\nabla_{2m}^2\,F_m(r,z)=0,$$
$$\nabla_{0m}^2\chi_m(r,z)=0, \qquad (۱۲)$$

که در آن برای $i=(0,1,2)$:

$$\nabla_{im}^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}+\frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (۱۳)$$

با توجه به هندسه و شرایط مرزی مسئله بسیار مناسب می‌باشد که از تبدیل هنکل مرتبه mام نسبت به امتداد شعاعی r استفاده شود [۲]. با استفاده از تبدیل هنکل مرتبه mام، معادلات (۱۲) به معادلات دیفرانسیل معمولی

تبـدیل شـده و جـواب آن بـا توجـه بـه شـرایط مـرزی در دوردست به صورت زیر در می آیند:

$$F_m{}^m(\xi,z)=A_m(\xi)e^{-\lambda_1 z}+B_m(\xi)e^{-\lambda_2 z},\qquad \chi_m^m(\xi,z)=C_m(\xi)e^{-\lambda_3 z},\tag{۱۴}$$

که در آن ξ یک عدد حقیقی مثبـت بـوده و پـارامتر هنکل نامیـده مـی‌شـود. توابـع $F_m^m(\xi,z)$ و $\chi_m^m(\xi,z)$ بـه ترتیـب تبـدیل هنکـل مرتبـهٔ mام توابـع $F_m(r,z)$ و $\chi_m(r,z)$ می‌باشند. به علاوه

$$\lambda_1=s_1\xi,\qquad \lambda_2=s_2\xi,\qquad \lambda_3=s_0\xi.\tag{۱۵}$$

با نوشتن روابط (۵) در فضای تبدیل یافته و قـرار دادن روابـط (۱۴) در آن و اسـتفاده از قضـیه تبـدیل معکـوس هنکـل، ضـرایب سـری فوریـه توابـع تغییرمکـان و از آن ضرایب سری فوریه تنش‌هـای $\sigma_{z\theta}$، σ_{zr} و σ_{zz} در فضـای واقعی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$u_m(r,z)=\int_0^\infty \frac{\xi^2}{2}[\alpha_3\frac{dF_m^m}{dz}(J_{m+1}(\xi r)-J_{m-1}(\xi r))$$
$$-i\chi_m^m(J_{m-1}(\xi r)+J_{m+1}(\xi r)]d\xi,$$
$$v_m(r,z)=\int_0^\infty \frac{\xi^2}{2}[-i\alpha_3\frac{dF_m^m}{dz}(J_{m-1}(\xi r)+J_{m+1}(\xi r))$$
$$+\chi_m^m(J_{m-1}(\xi r)-J_{m+1}(\xi r)]d\xi,$$
$$w_m(r,z)=\int_0^\infty \xi(1+\alpha_1)\left(-\xi^2+\beta\frac{d^2}{dz^2}\right)F_m^m J_m(\xi r)d\xi,$$
$$\sigma_{zzm}(r,z)=\int_0^\infty \frac{d}{dz}[\xi^2\left(A_{13}\alpha_3-A_{33}(1+\alpha_1)\right)$$
$$+A_{33}\alpha_2\frac{d^2}{dz^2}]F_m^m\,\xi J_m(\xi r)d\xi,$$
$$\sigma_{zrm}(r,z)=\frac{A_{44}}{2}\int_0^\infty \xi^2[(\alpha_3-\alpha_2)\frac{d^2}{dz^2}+\xi^2(1+\alpha_1)]$$
$$\times F_m^m(J_{m+1}(\xi r)-J_{m-1}(\xi r))d\xi$$
$$\frac{-A_{44}i}{2}\int_0^\infty \xi^2\frac{d\chi_m^m}{dz}(J_{m+1}(\xi r)+J_{m-1}(\xi r)d\xi,$$

$$\sigma_{z\theta m}(r,z)=\frac{-A_{44}i}{2}\int_0^\infty \xi^2[(\alpha_3-\alpha_2)\frac{d^2}{dz^2}+\xi^2(1+\alpha_1)]$$
$$\times F_m^m\left(J_{m+1}(\xi r)+J_{m-1}(\xi r)\right)d\xi$$
$$-\frac{A_{44}}{2}\int_0^\infty \xi^2\frac{d\chi_m^m}{dz}\left(J_{m+1}(\xi r)-J_{m-1}(\xi r)\right)d\xi.$$
(۱۶)

شرایط مرزی مسئله در $z=0$ برای تعیین توابع $A_m(\xi)$، $B_m(\xi)$ و $C_m(\xi)$ عبارتند از:

$$\begin{aligned}
&w(r,\theta,z=0)=\Omega r\cos(\theta), && r\le a\ ,\ \theta\in[0,2\pi]\\
&\sigma_{z\theta}(r,\theta,z=0)=0, && r\ge 0\ ,\ \theta\in[0,2\pi]\\
&\sigma_{rz}(r,\theta,z=0)=0, && r\ge 0\ ,\ \theta\in[0,2\pi]\\
&\sigma_{zz}(r,\theta,z=0)=-R(r,\theta), && r\le a\ ,\ \theta\in[0,2\pi]\\
&\sigma_{zz}(r,\theta,z=0)=0, && r> a\ ,\ \theta\in[0,2\pi]
\end{aligned}\tag{۱۷}$$

که در آن Ω زاویه چرخش دیسک صلب در صـفحه xz (حول محور y) بوده و $R(r,\theta)$ تابع تنش تماسی می‌باشد که باید تعیین شود.

شرایط مرزی داده شده در روابط (۱۷) بایـد در فضـای هنکل-فوریه نوشته شوند، تا با جایگزینی معادلات (۱۵) در آنها، بتوان ۳ تابع A_m، B_m و C_m را به‌دست آورد. بدین منظور تنش‌ها به صورت زیر با هم ترکیب شده تا بر حسب توابع F_m^m و χ_m^m نوشته شوند:

$$\sigma_{zrm}^{m-1}-i\sigma_{z\theta m}^{m-1}=-A_{44}\xi\left[\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\frac{d^2}{dz^2}+\xi^2\left(1+\alpha_1\right)\right]F_m^m$$
$$-A_{44}\xi i\frac{d\chi_m^m}{dz},$$
$$\sigma_{zrm}^{m+1}+i\sigma_{z\theta m}^{m+1}=A_{44}\xi\left[\left(\alpha_3-\alpha_2\right)\frac{d^2}{dz^2}+\xi^2\left(1+\alpha_1\right)\right]F_m^m$$
$$-A_{44}\xi i\frac{d\chi_m^m}{dz},$$
$$\sigma_{zzm}^m=\frac{d}{dz}\left[\alpha_3A_{13}\xi^2-A_{33}\xi^2\left(1+\alpha_1\right)+A_{33}\alpha_2\frac{d^2}{dz^2}\right]F_m^m.$$
(۱۸)

کـه در آن σ_{zrm}^{m-1}، $\sigma_{z\theta m}^{m+1}$ و ... تبـدیل هنکـل مرتبـه $m-1$، $m+1$ و ... ضرایب mام سری فوریـه مؤلفـه‌هـای تانسور تنش می‌باشند.

با ترکیب شرایط مرزی (۱۷) مطابق طرف چپ روابط (۱۸)، معادلات لازم برای تعیین توابع A_m، B_m و C_m به صورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned}&\eta_1 A_m+\eta_2 B_m+i\lambda_{m3}C_m=0,\\&-\eta_1 A_m-\eta_2 B_m+i\lambda_{m3}C_m=0,\\&A_{33}[\nu_1 A_m+\nu_2 B_m]=-R_m^m.\end{aligned}\qquad(۱۹)$$

از حل دستگاه معادلات (۱۹) توابع مجهول A_m، B_m و C_m عبارتند از:

$$\begin{aligned}&A_m(\xi)=\frac{\eta_2}{\xi^3 A_{33}(\eta_1\nu_2-\eta_2\nu_1)}R_m^m,\\&B_m(\xi)=\frac{-\eta_1}{\xi^3 A_{33}(\eta_1\nu_2-\eta_2\nu_1)}R_m^m,\qquad C_m(\xi)=0,\end{aligned}\qquad(۲۰)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}&\eta_i=[(\alpha_3-\alpha_2)s_i^2+1+\alpha_1],\\&\nu_i=[1+\alpha_1-\alpha_2 s_i^2-\frac{A_{13}}{A_{33}}\alpha_3]s_i,\ i=(1,2).\end{aligned}\qquad(۲۱)$$

روابط ۱(۱۷) و ۵(۱۷) با استفاده از ۳(۱۶) و ۴(۱۶) به صورت معادلات انتگرالی دو گانه در می آیند:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty(\varphi_1 A_m+\varphi_2 B_m)\xi^3 J_m(\xi r)d\xi=k_m,\ r\le a\\&\int_0^\infty R_m^m\,\xi\,J_m(\xi r)d\xi=0,\qquad r>a\end{aligned}\qquad(۲۲)$$

که در آن k_m ضریب فوریه تابع $\Omega r\cos(\theta)$ بوده و برای $m=\pm1$ برابر $\Omega r/2$ بوده و برای بقیه mها برابر صفر است. و توابع φ_i در (۲۲)به صورت زیر می باشند:

$$\varphi_i=[\alpha_2 s_i^2-1-\alpha_1],\qquad i=(1,2).\qquad(۲۳)$$

با توجه به ارتباط A_m و B_m با R_m^m، تابع مجهول در رابطه (۲۲) فقط تابع R_m^m می‌باشد که با حل همزمان جفت معادلات انتگرالی (۲۲) تعیین می‌شود. این جفت معادلات به معادلات انتگرالی دوگانه مشهور هستند[۱۷ و ۳]. حل معادلات انتگرالی دوگانه بسیار مشکل بوده و به همین علت تحقیقات چندانی در این زمینه وجود ندارد. از این بین می‌توان از نوبل [۱۶] و اسنیدن [۳] نام برد. نوبل در مقاله خود [۱۶] دسته‌ای از معادلات انتگرالی دوگانه که شامل توابع بسل[۲۹] هستند را به معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم تبدیل کرده است. در این مقاله معادلات انتگرالی دوگانه (۲۲) را به فرم معادلات انتگرالی دوگانه‌ای در می‌آوریم که توسط تیچمارش[۳۰] [۱۸] ارائه شده و به صورت تحلیلی برای تابع R_m^m قابل حل می‌باشد. پس از تعیین R_m^m، با استفاده از رابطه (۲۰) توابع $B_m(\xi)$ و $A_m(\xi)$ به‌دست می‌آیند که با جای‌گذاری آنها در روابط (۱۶) تغییرمکان‌ها و تنش‌ها به دست می‌آیند.

حل معادلات انتگرالی دوگانه

در این قسمت معادلات انتگرالی دوگانه (۲۲) حل می‌شوند. بدین منظور این معادلات به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \xi^{-1}G_m(\xi)J_1(\xi r)d\xi=\frac{mk_m}{P},\qquad r\le a\\&\int_0^\infty G_m(\xi)J_1(\xi r)d\xi=0,\qquad r>a\end{aligned}\qquad(۲۴)$$

که در آن:

$$G_m(\xi)=\xi R_m^m(\xi),\qquad P=\frac{(\varphi_1\eta_2-\varphi_2\eta_1)}{A_{33}(\eta_1\nu_2-\eta_2\nu_1)}.\qquad(۲۵)$$

با استفاده از روابط بازگشتی بین توابع بسل این معادلات به فرم زیر در می آیند [۱۶]:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \xi^{-1/2}G_m(\xi)\,J_{1/2}(\xi r)\,d\xi=\\&\qquad\frac{r^{-3/2}}{2^{-1/2}\Gamma(1/2)}\int_0^r\frac{m\Omega x^3}{2P}(r^2-x^2)^{-1/2}dx,\quad 0\le r<a\\&\int_0^\infty \xi^{-1/2}G_m(\xi)\,J_{1/2}(\xi r)\,d\xi=0,\qquad r>a\end{aligned}$$

(۲۶)

جواب این معادلات برای تابع $G_m(\xi)$ عبارت است از [۱۸]:

$$G_m(\xi)=\frac{\sqrt{2\xi^3}}{\Gamma(1/2)}\int_0^a r^{-1/2} f_m(r)J_{1/2}(r\xi)dr$$
$$=\frac{2m\Omega}{\pi P}(-a\cos(a\xi)+\frac{1}{\xi}\sin(a\xi)), \quad (۲۷)$$

که در آن:

$$f_m(r)=\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{m\Omega r^3}{2P\sqrt{r^2-\gamma^2}}d\gamma=\frac{m\Omega r^2}{P}. \quad (۲۸)$$

این رابطه و اولین معادله (۲۵) نتیجه می‌دهند:

$$R_m^m(\xi)=\frac{2m\Omega}{\pi P\xi}(-a\cos(a\xi)+\frac{1}{\xi}\sin(a\xi)). \quad (۲۹)$$

در نهایت با داشتن تابع $R_m^m(\xi)$ و با توجه به معادلات (۱۶) توابع تغییر مکان و تنش در فضای واقعی به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$u,v,w,\sigma_{zz},\sigma_{zr},\sigma_{z\theta}(r,\theta,z)=\sum_{m=1,-1} u_m,v_m,w_m,\sigma_{zzm},\sigma_{zrm},\sigma_{z\theta m}(r,z)e^{im\theta}. \quad (۳۰)$$

با دقت در عملگر (۱۳) مشاهده می‌شود که جواب معادله (۱۲) برای حالتهای $s_1=s_2$ و $s_1\neq s_2$ با یکدیگر متفاوت بوده و در نتیجه تغییرمکان‌ها و تنش‌ها برای این دو حالت متفاوت به‌دست می‌آیند. در اینجا با داشتن جواب برای حالت $s_1\neq s_2$ و با استفاده از آنالیز حدی، جواب برای حالت $s_1=s_2$ به‌دست آمده و ارائه می‌شوند. توابع تغییرمکان و تنش ارائه شده در رابطه (۱۶) به صورت زیر می‌باشد:

$$u(r,\theta,z)=\alpha_3\cos(\theta)$$
$$\times\int_0^\infty \xi^2\left(\lambda_1 A_1 e^{-s_1\xi z}+\lambda_2 B_1 e^{-s_2\xi z}\right)\left[J_0(r\xi)-J_2(r\xi)\right]d\xi,$$
$$v(r,\theta,z)=-\alpha_3\sin(\theta)$$
$$\times\int_0^\infty \xi^2\left(\lambda_1 A_1 e^{-s_1\xi z}+\lambda_2 B_1 e^{-s_2\xi z}\right)\left[J_0(r\xi)+J_2(r\xi)\right]d\xi,$$

$$w(r,\theta,z)=2\cos(\theta)$$
$$\times\int_0^\infty \xi\left(\varphi_1 A_1 e^{-s_1\xi z}+\varphi_2 B_1 e^{-s_2\xi z}\right)J_1(r\xi)d\xi,$$

$$\sigma_{zz}(r,\theta,z)=2A_{33}\cos(\theta)$$
$$\times\int_0^\infty \xi\left(\nu_1 A_1 e^{-s_1\xi z}+\nu_2 B_1 e^{-s_2\xi z}\right)J_1(r\xi)d\xi,$$
$$\sigma_{rz}(r,\theta,z)=A_{44}\cos(\theta)$$
$$\times\int_0^\infty \xi^2\left(\eta_1 A_1 e^{-s_1\xi z}+\eta_2 B_1 e^{-s_2\xi z}\right)\left[J_2(r\xi)-J_0(r\xi)\right]d\xi,$$
$$\sigma_{\theta z}(r,\theta,z)=A_{44}\sin(\theta)$$
$$\times\int_0^\infty \xi^2\left(\eta_1 A_1 e^{-s_1\xi z}+\eta_2 B_1 e^{-s_2\xi z}\right)\left[J_2(r\xi)+J_0(r\xi)\right]d\xi. \quad (۳۱)$$

با توجه به وجود $J_1(r\xi)$ در معادلات (۳۱)، تابع w و σ_{zz} در $r=0$ صفر می‌باشند.

برای حالت $s_1\neq s_2$ معادلات (۳۱) به صورت زیر می‌باشند:

$$u(r,\theta,z)=\frac{4\cos(\theta)\Omega\alpha_3}{\pi\left(\varphi_1\eta_2-\varphi_2\eta_1\right)}$$
$$\times\left\{a\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^2(-1)^j s_j\eta_k\int_0^\infty\frac{e^{-p_j\xi}}{\xi}\left[J_0(\xi r)-\frac{J_1(\xi r)}{\xi r}\right]d\xi\right.$$
$$\left.-\mathrm{Im}\sum_{j=1}^2(-1)^j s_j\eta_k\int_0^\infty\frac{e^{-p_j\xi}}{\xi^2}\left[J_0(\xi r)-\frac{J_1(\xi r)}{\xi r}\right]d\xi\right\},$$

$$v(r,\theta,z)=\frac{4\sin(\theta)\Omega\alpha_3}{\pi r\left(\varphi_1\eta_2-\varphi_2\eta_1\right)}$$
$$\times\left\{a\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^2(-1)^j s_j\eta_k\int_0^\infty\frac{e^{-p_j\xi}}{\xi^2}J_1(\xi r)\,d\xi\right.$$
$$\left.-\mathrm{Im}\sum_{j=1}^2(-1)^j s_j\eta_k\int_0^\infty\frac{e^{-p_j\xi}}{\xi^3}J_1(\xi r)\,d\xi\right\},$$
$$w(r,\theta,z)=\frac{4\cos(\theta)\Omega}{\pi\left(\varphi_1\eta_2-\varphi_2\eta_1\right)}$$
$$\times\left\{a\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^2(-1)^j\varphi_j\eta_k\frac{\sqrt{r^2+{p_j}^2}-p_j}{r}\right.$$
$$\left.-\mathrm{Im}\sum_{j=1}^2(-1)^j\varphi_j\eta_k\int_0^\infty\frac{e^{-p_j\xi}}{\xi^2}J_1(\xi r)\,d\xi\right\},$$

$$\sigma_{zz}(r,\theta,z)=\frac{4A_{33}\cos(\theta)\Omega}{\pi\left(\varphi_1\eta_2-\varphi_2\eta_1\right)}$$
$$\times\left\{a\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\nu_j\eta_k\frac{\sqrt{r^2+{p_j}^2}-p_j}{r\sqrt{r^2+{p_j}^2}}\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\nu_j\eta_k\frac{\sqrt{r^2+{p_j}^2}-p_j}{r}\right\},$$

$$\sigma_{rz}(r,\theta,z)=\frac{-4A_{44}\cos(\theta)\Omega}{\pi\left(\varphi_1\eta_2-\varphi_2\eta_1\right)}$$
$$\times\left\{a\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j p_j\frac{\sqrt{r^2+p_j^2}-p_j}{r^2\sqrt{r^2+p_j^2}}\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\int_0^\infty\frac{e^{-p_j\xi}}{\xi}\left[J_0(\xi r)-\frac{J_1(\xi r)}{\xi r}\right]d\xi\right\},$$

$$\sigma_{\theta z}(r,\theta,z)=\frac{-4A_{44}\sin(\theta)\Omega}{\pi r\left(\varphi_1\eta_2-\varphi_2\eta_1\right)}$$
$$\times\left\{a\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\frac{\sqrt{r^2+p_j^2}-p_j}{r}\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{Im}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\int_0^\infty\frac{e^{-p_j\xi}}{\xi^2}J_1(\xi r)\,d\xi\right\},$$

(۳۲)

و برای $s_1=s_2=s$ عبارتند از:

$$u(r,\theta,z)=\frac{2\cos(\theta)\Omega}{\pi s(1+\alpha_1)}$$
$$\times\left\{\mathrm{Im}\left(\left(1+\alpha_1-(\alpha_3-\alpha_2)s^2\right)\int_0^\infty\frac{e^{-p\xi}}{\xi^2}\left[J_0(\xi r)-\frac{J_1(\xi r)}{\xi r}\right]d\xi\right.\right.$$
$$\left.-\eta sz\int_0^\infty\frac{e^{-p\xi}}{\xi}\left[J_0(\xi r)-\frac{J_1(\xi r)}{\xi r}\right]d\xi\right)$$
$$-a\,\mathrm{Re}\left(\left(1+\alpha_1-(\alpha_3-\alpha_2)s^2\right)\int_0^\infty\frac{e^{-p\xi}}{\xi}\left[J_0(\xi r)-\frac{J_1(\xi r)}{\xi r}\right]d\xi\right.$$
$$\left.\left.-\eta szp\frac{\sqrt{r^2+p^2}-p}{r^2\sqrt{r^2+p^2}}\right)\right\},$$

$$v(r,\theta,z)=\frac{4\sin(\theta)\Omega}{\pi rs(1+\alpha_1)}$$
$$\times\left\{\mathrm{Im}\left(\left(1+\alpha_1-(\alpha_3-\alpha_2)s^2\right)\int_0^\infty\frac{e^{-p\xi}}{\xi^3}J_1(\xi r)\,d\xi\right.\right.$$
$$\left.-\eta sz\int_0^\infty\frac{e^{-p\xi}}{\xi^2}J_1(\xi r)\,d\xi\right)$$
$$-a\,\mathrm{Re}\left(\left(1+\alpha_1-(\alpha_3-\alpha_2)s^2\right)\int_0^\infty\frac{e^{-p\xi}}{\xi^2}J_1(\xi r)\,d\xi\right.$$
$$\left.\left.-\eta szp\frac{\sqrt{r^2+p^2}-p}{r}\right)\right\},$$

$$w(r,\theta,z)=\frac{2\Omega\cos(\theta)}{\pi s\alpha_3(1+\alpha_1)}$$
$$\times\left\{\mathrm{Im}\left[2s\alpha_3(1+\alpha_1)\int_0^\infty\frac{e^{-P\xi}}{\xi^2}J_1(\xi r)\,d\xi\right.\right.$$
$$\left.-\eta\varphi z\frac{\sqrt{(r^2+p^2)}-p}{r}\right]$$
$$-a\,\mathrm{Re}\left[2s\alpha_3(1+\alpha_1)\frac{\sqrt{(r^2+p^2)}-p}{r}\right.$$
$$\left.\left.-\eta\varphi z\frac{\sqrt{(r^2+p^2)}-p}{r\sqrt{(r^2+p^2)}}\right]\right\},$$

$$\sigma_{zz}(r,\theta,z)=\frac{2\Omega A_{33}\cos(\theta)}{\pi s\alpha_3(1+\alpha_1)}$$
$$\times\left\{\mathrm{Im}\left[\left(\eta(\frac{\nu}{s}-2\alpha_2s^2)-2\nu s(\alpha_3-\alpha_2)\right)\frac{\sqrt{(r^2+p^2)}-p}{r}\right.\right.$$
$$\left.-\eta\nu z\frac{\sqrt{(r^2+p^2)}-p}{r\sqrt{(r^2+p^2)}}\right]$$
$$-a\,\mathrm{Re}\left[\left(\eta(\frac{\nu}{s}-2\alpha_2s^2)-2\nu s(\alpha_3-\alpha_2)\right)\frac{\sqrt{(r^2+p^2)}-p}{r\sqrt{(r^2+p^2)}}\right.$$
$$\left.\left.-\eta\nu z\frac{r}{(r^2+p^2)^{3/2}}\right]\right\},$$

$$\sigma_{rz}(r,\theta,z)=\frac{2A_{44}z\cos(\theta)\Omega\eta^2}{\pi s\alpha_3\left(1+\alpha_1\right)}\left\{\mathrm{Im}\left[P\frac{\sqrt{r^2+p^2}-p}{r^2\sqrt{r^2+p^2}}\right]\right.$$
$$\left.-\,a\,\mathrm{Re}\left[\frac{p(2r^2+p^2)-(r^2+p^2)^{3/2}}{r^2(r^2+p^2)^{3/2}}\right]\right\},$$

$$\sigma_{\theta z}(r,z)=\frac{2A_{44}z\sin(\theta)\Omega\eta^2}{\pi rs\alpha_3(1+\alpha_1)}\left\{\mathrm{Im}\left[\frac{\sqrt{r^2+p^2}-p}{r}\right]-a\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{r}-\frac{p}{r\sqrt{r^2+p^2}}\right]\right\}, \quad (۳۳)$$

که در آن برای $j=۱$ مقدار k برابر ۲ و برای $j=۲$ مقدار k برابر واحد بوده و:

$$\begin{aligned}&\eta=[(\alpha_3-\alpha_2)s^2+1+\alpha_1],\\ &\nu=[1+\alpha_1-\alpha_2s^2-\frac{A_{13}}{A_{33}}\alpha_3]s,\\ &\varphi=[\alpha_2s^2-1-\alpha_1],\ \ p=sz+ia,\\ &p_j=s_jz+ia.\ \ (j=1,2)\end{aligned} \quad (۳۴)$$

سختی خمشی[۳۱] فنر متمرکز معادل خاک از رابطه $K_{RR}=M_y/\Omega$ به‌دست می‌آید به‌طوری‌که M_y گشتاور کل تماسی بوده و از رابطه زیر بدست می آید:

$$M_y=\int_0^a\int_0^{2\pi}R(r,\theta)\,r^2\cos(\theta)\,d\theta dr, \quad (۳۵)$$

که در آن تابع $R(r,\theta)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$R(r,\theta)=\frac{-4\cos(\theta)\Omega}{P\pi}\left[a\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{r}-\frac{ia}{r(r^2-a^2)^{0.5}}\right)+\mathrm{Im}\left(\frac{(r^2-a^2)^{0.5}-ia}{r}\right)\right]. \quad (۳۶)$$

با بی‌بعد کردن سختی خمشی می‌توان نوشت:

$$\bar{K}_{RR}=K_{RR}\big/(A_{66}a^3)=M_y\big/(A_{66}\Omega a^3). \quad (۳۷)$$

بنابراین $\bar{K}_{RR}$ برابر است با:

$$\bar{K}_{RR}=\frac{8}{3A_{66}P}. \quad (۳۸)$$

در رابطه فوق تابع P درحالت $s_1\neq s_2$ از رابطه (۲۵) و در حالت $s_1=s_2=s$ عبارت است از:

$$P=\frac{2\alpha_3(1+\alpha_1)s/A_{33}}{t}, \quad (۳۹)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}t=&-(1+\alpha_1)[1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}}-3\alpha_2s^2]\\ &+(\alpha_3-\alpha_2)[(1+\alpha_1-\alpha_3\frac{A_{13}}{A_{33}})s^2+\alpha_2s^4].\end{aligned} \quad (۴۰)$$

همچنین با قرار دادن خواص محیط ایزوتروپ مطابق روابط (۴) می‌توان نشان داد که در حالت ایزوتروپ تابع سختی خمشی بی‌بعد[۳۲] به صورت ساده زیر در می‌آید:

$$\bar{K}_{RR}=\frac{8}{3(1-\upsilon)}. \quad (۴۱)$$

این نتیجه منطبق بر جواب به دست آمده به وسیله پک و سافرز [۱۹] می‌باشد که نشان از صحت نتایج این تحقیق دارد.

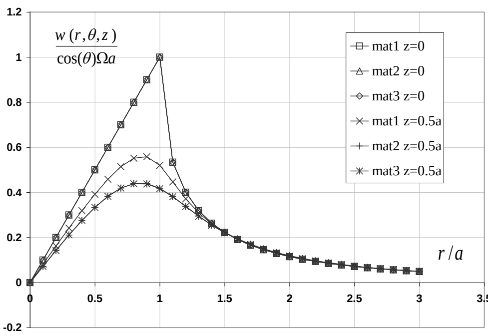
نتایج عددی

برآورد عددی انتگرال‌های ارائه شده در بخش‌های قبلی نیاز به دقت خاصی دارد، چرا که برآورد این انتگرال‌ها با توجه به وجود توابع بسل و رفتار نوسانی آن آسان نیست. به‌علاوه حد بالای انتگرال‌ها محدود نبوده و باید با دقت مناسب تعیین شوند. برای برآورد عددی، ۳ نوع محیط مطابق جدول ۱ درنظر گرفته می‌شود. در این جدول محیط سوم ایزوتروپ با ضریب پواسون ۰/۲۵ بوده و مابقی با رفتار ایزوتروپ جانبی می‌باشند. محیط‌های ایزوتروپ جانبی چنان اختیار شده‌اند که در یکی از آنها نسبت $\bar{E}/E$ برابر ۳ و در دیگری این نسبت برابر نیم می‌باشد. با توجه به نکات فوق‌الذکر انتگرال مربوط به تغییرمکان قائم به‌دست آمده و برای عمق‌های مختلف در شکل (۲) رسم شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود تغییرمکان قائم در سطح برای کلیهٔ محیط‌ها مطابق شرایط مرزی زیر دیسک بوده و این شرط به صورت ایده‌آل برقرار می‌باشد. در روی سطح، تغییرمکان قائم بی‌بعد در خارج دیسک صلب نیز برای کلیه محیطها بر هم منطبق شده‌اند، حال آنکه با فاصله گرفتن از سطح اختلاف تغییرمکان محیط‌های متفاوت بیشتر شده به‌طوری که در عمق $z=0.5a$ این منحنی‌ها از هم جدا شده‌اند. از آنجا که شرایط مرزی در سطح مربوط به تغییرمکان می‌باشد، اختلاف نتایج مربوط به محیط‌های مختلف با ضرایب

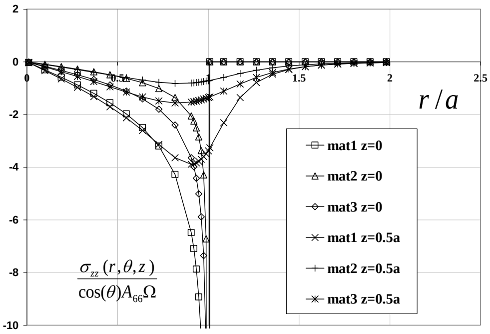
ارتجاعی متفاوت بیشتر در نتایج مربوط بـه تـنش‌هـا دیـده مـی‌شـوند، تـنش قـائم σ_{zz} در سـطح و نیـز در عمـق $z = 0.5a$ در شکل(۳) نشان داده شده‌انـد. همـان‌طورکـه مشاهده می‌شود اولاً در کلیهٔ محیطهـا تـنش σ_{zz} در لبـهٔ دیسک صلب رفتاری تکین از خود نشان می‌دهد و ثانیاً بـه علت اختلاف ضریب ارتجاعی $\bar{E}$ در محـیطهـای متفـاوت، اندازه σ_{zz} در این محیطها متفاوت هستند و این اخـتلاف در سـطح و در $z = 0.5a$ در شـکل (۳) بـه طـور واضـح مشاهده می‌شود. به علاوه مطابق شکل (۳) با دور شـدن از سطح $z = 0$، تنش σ_{zz} رفته رفته یکنواخت می‌شـود کـه دلالت بر اصل سن‌ونان[۳۳] دارد. در شکل (۴) تنش قـائم بـر حسب عمق در rهای متفـاوت نشـان داده شـده‌اسـت. بـه خوبی همگرایی نتایج تنش قائم مربوط به rهـای متفـاوت در اعماق زیاد مشاهده می‌شـود. بـه‌عـلاوه توزیـع هندسـی تنش در عمق‌های زیاد در این شکل دیده می‌شود.

جدول ۱: مشخصات مکانیکی مصالح انتخابی

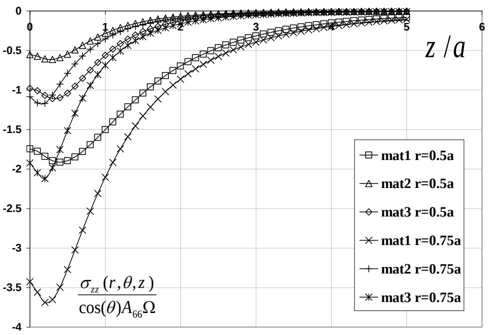
Mat	$E\times10^{-4}$ N/mm^2	$\bar{E}\times10^{-4}$ N/mm^2	$G\times10^{-4}$ N/mm^2	$\bar{G}\times10^{-4}$ N/mm^2	$\upsilon=\bar{\upsilon}$
1(T. I)	5	15	2	2	0.25
2(T. I)	10	5	4	2	0.25
3(I)	5	5	2	2	0.25



شکل ۲: تغییرات تغییرمکان قائم نسبی بر حسب فاصله افقی



شکل ۳: تغییرات تنش قائم نسبی بر حسب فاصله افقی



شکل ۴: تغییرات تنش قائم نسبی بر حسب عمق

نتیجه‌گیری

در این مقاله نتایج تحلیلی مربوط به اثـرات قرارگیـری یک صفحه صلب با خمش حول یک محور افقـی در سـطح نیم فضای ایزوتروپ جانبی ارائه شده‌است. به علـت شـرایط مـرزی دوگانـه در سـطح نـیم فضـا و بـه علـت اسـتفاده از تبدیلات انتگرالـی بـرای حـل، معـادلات مـرزی حـاکم بـه معادلات انتگرالی دوگانه تبدیل شده‌انـد. ایـن معـادلات بـا استفاده از روش نوبـل مبتنـی بـر قضـیه تبـدیل معکـوس انتگرالـی بـه معـادلات انتگرالـی دوگانـه تیچمـارش [۱۸] تبدیل شده‌اند و به صورت تحلیلی حل شده‌انـد. در نهایـت نتایج مربوط به تغییرمکان و تنش به صـورت انتگـرال‌هـای خطی ارائه شده‌اند. با استفاده از تنش قائم بـه‌دسـت آمـده تابع سختی خمشی فنر متمرکز معادل نیم‌فضا بـه صـورت تحلیلی به‌دست آمده و نشان داده شده‌است که این تابع در حالت ایزوتروپ منطبق بر جواب موجود در ادبیات مربوطـه می‌باشد. برآورد عددی این انتگرال‌ها به علـت وجـود توابـع نوسانی بسل و حدود بی‌نهایت به دقت خاصـی نیـاز دارد و برآورد عددی به‌دست آمده در این مقاله ارضاء عالی شرایط مرزی و اصول تئوری ارتجاعی را نشان می‌دهد.

مراجع

1. Reissner, E. and Sagoci, H. F. (1944). “Forced torsional oscillations of an elastic half-space.” *Int. J. Appl. Phys*. **15** (9), pp 652-654.
2. Sneddon, I. N. (1951). *Fourier transforms*. McGraw-Hill, New York, N. Y.
3. Sneddon, I. N. (1966b). *Mixed boundary value problems in potential theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
4. Robertson, I. A. (1966). “Forced vertical vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite elastic solid.” *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **62** A, 547-553.
5. Pak, R. Y. S. and Gobert, A. T. (1991). “Forced vertical vibration of rigid discs with an arbitrary embedment.” *Journal of Engineering Mechanics*, **117** (11), pp. 2527-2548.
6. Pak, R. Y. S. and Ashlock, J. C. (2007). “Method of adaptive-gradient elements for computational mechanics.” *Journal of Engineering Mechanics*, **133** (1), pp. 87-97.
7. Luco, J. E. and Mita, A. (1987). “Response of a circular foundation on a uniform half- space to elastic waves.” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **15**, pp 105-118.
8. Eskandari-Ghadi, M. Fallahi, M. And Ardeshir-Behrestaghi, A. (2010). “Forced vertical vibration of rigid circular disc on a transversely isotropic half-space.” ASCE *Journal of Engineering Mechanics*, **136** (7), pp 913-922.
9. Rahimian, M. and Eskandari-Ghadi, M. (2001). *Theory of Elasticity*. Tehran University Press. In Persian.
10. Eskandari-Ghadi, M. and Pak, R. Y. S. (2008). “Elastodynamics and Elastostatics by a Unified Method of Potentials for x 3-Convex Domains” *J. of Elasticity*, **92**, 187-194.
11. Michell, J. H. (1900). “ The stress in an aeolotropic elastic solid with an infinite plane boundary. ” *Proceeding of the London mathematical society*, **32**, pp 247-258.
12. Elliott, H. A. (1948). “Three dimensional stress distribution in hexagonal aeolotropic crystals.” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **44**, 522-533.
13. Wang, M. Z. and Wang, W. (1995). “Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity.” *International Journal of Solids and Structures*, **32** (374) 501-513.
14. Lekhnitskii, S. G. (1981). *Theory of anisotropic elastic bodies*. Holden-Day Publishing Mir Publication.
15. Eskandari-Ghadi, M. (2005). “A complete solutions of the wave equations for transversely isotropic media.” J. of Elasticity, **81**, 1-19.
16. Noble, B. (1963). “The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method.” *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **59**, pp 351-371.
17. Mandal, B. N. and Mandal, N. (1999). *Advances in dual integral equations*, CHAMPMAN & HALL/CRS.
18. Titchmarsh, E. c., (1937), *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford, New York, p.337
19. Pak, R.Y.S. and Saphores, J.D.M. (1990). “Rocking rotation of a rigid disc in a half-space.”, *J. Mech. Appl. Math.*,**45**(3), pp. 435-449

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1. Reissner
2. Sagoci
3. Sneddon
4. Roberson
5. Pak
6. Gobert
7. Ashlock
8. Singular
9. Potential Function
10. Isotropic
11. Lame
12. Love
13. Bussinesque
14. Neuber-Papkovich
15. Galerkin
16. Anisotropic
17. Michell
18. Transversely isotropic
19. Hu-Nowacki-Lekhnitskii
20. Integral Transform
21. Dual integral equations
22. Fredholm integral equation of 2nd kind
23. Hankel transform
24. Noble
25. Rigid circular plate
26. Stress tensor
27. Strain tensor
28. Fourier series
29. Bessel functions
30. Titchmarsh
31. Bending impedance
32. Dimensionless bending impedance function
33. Saint-Venant principle