استفاده از تئوري كلاسيک صفحات در تحليل ارتعاشات صفحه تابعي دايروي كوپل شده با لايه هاي پيزوالكتريک

فرزاد ابراهيمي[i]; عباس راستگو[ii]

چكيده

تحليل ارتعاشي صفحات دايروي نازک از جنس مواد تابعي (FGM) كوپل شده با لايه هاي پيزوالكتريک براساس تئوري صفحات كرشهف ارائه شده است. مشخصات صفحه تابعي مطابق تابع تواني از جزء حجمي مواد تشكيل دهنده در راستاي ضخامت صفحه و ميدان پتانسيل الكتريكي با يک تابع درجه دو طوري مدل شده است كه معادله ماكسول برآورده شود. معادلات ديفرانسيل حركت براي اولين بار به صورت تحليلي براي صفحه دايروي با تكيه گاه گيردار حل شده است. درستي روش تحليلي ارائه شده از طريق مقايسه نتايج با تحقيقات مشابه و نيز با نتايج روش المان محدود سه بعدي تاييد شده است. در مطالعات عددي تاكيد اصلي، بررسي اثر تغيير شاخص گراديان صفحه تابعي بر روي ارتعاشات سازه مركب مي‌باشد. پاسخهاي تحليلي و نتايج حاصل مدل ساده شده اي براي مطالعه پارامتري و درک مشخصات ارتعاشي صفحات دايروي ايزوتروپ كوپل با لايه هاي پيزوالكتريک ارائه مي‌دهد.

كلمات كليدي

مواد تابعي، لايه هاي پيزوالكتريک، تئوري صفحات كرشهف

Vibration Analysis of Thin Circular FGM Plate Coupled with Piezoelectric Layers

Farzad Ebrahimi , Abbas Rastgo

ABSTRACT

Analytical investigation of the vibration behavior of thin circular functionally graded (FG) plates integrated with two uniformly distributed piezoelectric actuator layers based on the classical plate theory (CPT) is presented. The material properties of the FG substrate plate are assumed to be graded in the thickness direction according to the power-law distribution. The differential equations of motion are solved analytically for clamped edge boundary condition of the plate. The detailed mathematical derivations are presented and numerical investigations are performed while the emphasis is placed on investigating the effect of varying the gradient index of FG plate on the vibration characteristics of the structure.

KEYWORDS

Functionally graded material, Piezoelectric, Circular plate, Classical plate theory

[i] دانشجوی دكتری دانشكده مهندسی مكانيک – پرديس دانشكده های فنی – دانشگاه تهرانEmail:febrahimy@ut.ac.ir
[ii] دانشيار دانشكده مكانيک – پرديس دانشكده های فنی – دانشگاه تهران:Email:arastgo@ut.ac.ir

۱- مقدمه

به تازگي رده جديدي از مواد تحت عنوان مواد تابعي (FGM) که در آنها خواص ماده به صورت تابعي پيوسته نسبت به مکان و بخصوص در راستاي ضخامت سازه تغيير مي‌کند، معرفي شده اند. اين مواد از ديدگاه ميکروسکوپي غير همگن بوده و معمولا از ترکيب فلز و سراميک ساخته مي‌شوند. مواد مرکب لايه‌اي جهت استفاده در سازه هاي پيشرفته طراحي مي‌شوند اما تغييرات زياد بين خواص هر لايه در سطح تماس دو لايه مجاور، باعث ايجاد تنشهاي برشي بين لايه‌اي بسيار بزرگ و در نتيجه منجر به پديده جداشدگي لايه هامي‌گردد. اين نقطه ضعف با ايجاد تغييرات پيوسته در خواص مواد همانند آنچه در مواد تابعي ديده مي‌شود برطرف مي‌گردد. بنابراين مواد تابعي قابليت استفاده در سازه هاي پيشرفته را خواهند داشت. تحقيقات گسترده‌اي در زمينه‌هاي مختلف از جمله تحليل کمانش [۱] ، تحليل دقيق تنش [۲] ، تحليل ديناميکي [۳] و تحليل غيرخطي ترمووالاستيک سازه هاي ساخته شده از مواد تابعي [۴] گزارش شده است. همچنين در سالهاي اخير به علت قابليت و رواج استفاده از مواد پيزوالکتريک به عنوان حسگر يا محرک، مطالعه و بررسي اين مواد که بر روي سازه‌هاي مختلف تعبيه شده اند مورد اقبال بسيار زياد پژوهشگران قرار گرفته است. در اين راستا، براي بهره برداري بهينه از خواص حسگري/ محرکي اين مواد،بايد اندرکنش بين سازه اصلي و ماده پيزوالکتريک به خوبي شناخته شود. به تازگي مطالعاتي برروي قابليتهاي مختلف مواد پيزوالکتريک براي نصب بر روي صفحات ساخته شده از مواد تابعي نيز ارائه شده است. به عنوان نمونه اوتاوا و تانيگاوا [۵] صفحه مستطيلي تابعي به همراه لايه پيزوالکتريک تحت بار گذاري گرمايي گذرا را مورد بررسي قرار داده‌اند.يک حل سه بعدي نيز براي صفحه مستطيلي تابعي کوپل شده با لايه محرک پيزوالکتريک توسط ردي و چنگ[۶] با استفاده از روشهاي ماتريس انتقال و گسترش مجانبي پيشنهاد شده است. وانگ و نودا[۷] يک سازه هوشمند مرکب از سه لايه شامل يک لايه فلزي و يک لايه پيزوالکتريک و يک لايه تابعي بين آنها را تحليل کرده اند. در حاليکه يک مدل اجزاء محدود براي مطالعه کنترل شکل و ارتعاشات صفحه مستطيلي تابعي به همراه لايه هاي حسگرو محرک پيزوالکتريک توسط هي و همکاران[۸] پيشنهاد شده است.به تازگي نيز رفتار غير خطي ديناميک صفحه مستطيلي تابعي کوپل شده با لايه هاي پيزوالکتريک در بالا و پايين آن که در محيط گرمايي ارتعاشات غيرخطي خواهد داشت توسط هوانگ و شن[۹] مورد مطالعه قرار گرفته است. تمامي مطالعات اشاره شده بر روي صفحات تابعي با شکل مستطيلي صورت گرفته است. از مقدمه ارائه شده و بررسي تحقيقات صورت گرفته در اين حوزه ديده مي‌شود که تاکنون تحقيقي براي بررسي و مطالعه رفتار ارتعاشي و مشخصات ديناميکي صفحه حلقوي يا دايروي تابعي کوپل شده با لايه هاي پيزوالکتريک ارائه نشده است.

در همين راستا، تحقيق حاضربه دنبال يافتن پاسخي تحليلي براي رفتار ارتعاشي صفحه دايروي نازک ساخته شده از مواد تابعي به همراه دو لايه بر مبناي تئوري کلاسيک تغيير شکل صفحات مي‌باشد،، معادله ديفرانسيل حرکت به صورت تحليلي حل شده است. علاوه بر نتايج عددي مربوطه، روش بدست آوردن معادلات نيز به صورت کامل ارائه شده است. کاربرد مدل پيشنهاد شده با مطالعه اثرات مربوط به تغيير شاخص گراديان صفحه تابعي بر روي مشخصات ارتعاشي سازه بررسي شده است. درستي و دقت نتايج حاصل از روش پيشنهادي با مقايسه نتايج آن با نتايج موجود در تحقيقات مشابه براي صفحه فلزي و همچنين با مقايسه آن با نتايج حاصل از تحليل سه بعدي اجزاء محدود اثبات شده است.

۲- مواد تابعي و پيزوالکتريک

مدلهاي تحليلي و محاسباتي مختلفي براي توزيع مکاني خواص فيزيکي و مکانيکي مواد تابعي پيشنهاد شده است. در اين تحقيق از تابع تواني ساده جزء حجمي مواد تشکيل دهنده در راستاي ضخامت صفحه استفاده خواهد شد. لذا براي ماده تابعي ساخته شده از مخلوط فلز و سراميک رابطه (۱) برقرار است:

$$V_m + V_c = 1 \qquad (۱)$$

که در آن V_m و V_c به ترتيب جزء حجمي سراميک و فلز مي‌باشند. همچنين تغييرات V_c در راستاي ضخامت صفحه به صورت رابطه(۲) بيان مي‌گردد:[۱۰]

$$, V_c = (z/2h_f + 1/2)^g \quad , g \ge 0 \qquad (۲)$$

که در آن $2h_f$ ضخامت صفحه تابعي و g شاخص گراديان اين ماده مي‌باشد . فرض مي‌شود که مدول الاستسيته E و چگالي ρ ماده تابعي در راستاي ضخامت صفحه و بر مبناي رابطه (۳) تغيير کند در حاليکه نسبت پواسون υ در راستاي ضخامت ثابت فرض مي‌گردد[۱۱].

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c(z) + E_m$$
$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)V_c(z) + \rho_m \qquad (۳)$$
$$\nu(z) = \nu$$

که در آن زيرنويس هاي m و c به ترتيب به اجزاء فلز وسراميک مربوط مي‌شوند. پس از جاگذاري از معادله (۲) در

معادله (۳) ، تغييرات خواص در صفحه تابعي با تـابع تـواني (۴) که همانند تـابع پيـشنهادي ردي و پـراوين[۱۰] اسـت مـشخص مي‌شود:

$$E(z) = (E_c - E_m)(z/2h_f + 1/2)^g + E_m$$
$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)(z/2h_f + 1/2)^g + \rho_m \qquad (۴)$$

معادلـه اساسـي دو بعـدي الاسـتو-اسـتاتيک بـراي يـک مـاده پيزوالکتريک در مختصات قطبي و بـر مبنـاي تئـوري کلاسـيک صفحات به صورت رابطه (۵) است[۱۲]:

$$\sigma_{rr}^p = \overline{C}_{11}^E \varepsilon_{rr} + \overline{C}_{12}^E \varepsilon_{\theta\theta} - \overline{e}_{31} E_z \qquad (۵)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^p = \overline{C}_{12}^E \varepsilon_{rr} + \overline{C}_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta} - \overline{e}_{31} E_z \qquad (۶)$$

$$\tau_{r\theta}^p = \left(\overline{C}_{11}^E - \overline{C}_{12}^E\right)\varepsilon_{r\theta} = -z\left(\overline{C}_{11}^E - \overline{C}_{12}^E\right) \qquad (۷)$$

که در آن σ_i و ε_k به ترتيب معرف اجزاي تـنش و کـرنش و E_k اجزاي ميدان الکتريکي مي‌باشند. همچنين $\overline{C}_{ij}^E$ اجـزاي مـاتريس سختي و $\overline{e}_{31}$ ثابت کاهيده نفوذ پذيري ماده پيزوالکتريـک بـوده و به صورت رابطه (۱۲) داده شده اند [۱۲]:

$$\overline{C}_{11}^E = C_{11}^E - \left(C_{13}^E\right)^2 / C_{33}^E \qquad \overline{C}_{12}^E = C_{12}^E - \left(C_{13}^E\right)^2 / C_{33}^E$$
$$\overline{e}_{31} = e_{31} - C_{13}^E e_{33} / C_{33}^E$$

که در آن e معرف ثابت نفوذ پـذيري مـاده پيزوالکتريـک و C_{ij} درايه هاي ماتريس مدول الاستسسيته هستند.

۳- معادلات اساسي در ميدان پتانسيل الکتريکي

در بيشتر کاربردهاي عملي نسبت شعاع به ضخامت صفحه بيشتر از ۱۰ بوده و از فرضيات کرشهف که در آن اثر تغيير مکان برشي و اينرسي دوراني قابل چشم پوشي است، مي‌توان استفاده نمود. براساس اين تئوري کلي ترين حالت ميدان تغيير مکان براي صفحات ياد شده به صورت رابطه (۸) است[۱۲]:

$$u_z = u_z(r,\theta,t) = w(r,\theta,t) \qquad (۸)$$

$$u_r = u_r(r,\theta,t) = -z\frac{\partial u_z}{\partial r} \qquad (۹)$$

$$u_\theta = u_\theta(r,\theta,t) = -z\frac{\partial u_z}{r\partial\theta} \qquad (۱۰)$$

که در آن u_r و u_θ و u_z به ترتيب تغيير مکانها در راستاي r و θ و z هستند. همچنين فرض مي‌شود که جهت قطـب در لايـه هـاي پيزوالکتريک در راستاي z مي‌باشد و در صورت اعمال پتانسيل الکتريکي خارجي در اين لايه ها، يک ديفرانسيل کرنش که خـود خمش صفحه را به دنبـال خواهـد داشـت ، ايجـاد مـي‌گـردد. در اينــصورت اجــزاي کــرنش در صــفحه تــابعي و لايــه هــاي پيزوالکتريک به صورت روابط (۱۱)و(۱۲) داده مي‌شوند[۱۳]:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \qquad (۱۱)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r} = -z\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial w}{r\partial r}\right) \qquad (۱۲)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) = z\left(\frac{\partial w}{r^2\partial\theta} - \frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial\theta}\right) \qquad (۱۳)$$

حال بر اساس قانون هوک مولفه هاي تنش در صفحه تابعي بـه صورت روابط(۱٤)-(١٦) بيان مي‌شوند [۳۸]:

$$\sigma_{rr}^f = \frac{E(z)}{1-\nu^2}(\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}) = -\frac{zE(z)}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial w}{r\partial r}\right)\right] \qquad (۱۴)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^f = \frac{E(z)}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\theta\theta} + \nu\varepsilon_{rr}) = -\frac{zE(z)}{1-\nu^2}\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial w}{r\partial r}\right] \qquad (۱۵)$$

$$\tau_{r\theta}^f = -\frac{zE(z)}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial\theta} - \frac{\partial w}{r^2\partial\theta}\right) \qquad (۱۶)$$

که در آن بالانويس f نشان دهنـده متغيـر در صـفحه تـابعي و E(z) مدول يانگ صفحه FG است که در معادلـه (۴) بيـان شـده است.

مدلهاي مختلفي براي توزيع پتانسيل الکتريکي در لايه پيزوالکتريک وجود دارد. در اين تحقيق از تابع درجه دوم زير که توسط وانگ و همکاران [١٤] پيشنهاد شده است استفاده مي‌شود:

$$\phi = \left[1 - \left(\left(2z - 2h_f - h_p\right)/h_p\right)^2\right]\varphi(r,\theta,t) \qquad (۱۷)$$

که در آن $\varphi(r,\theta,t)$ پتانسيل الکتريکـي در صـفحه ميـاني لايـه پيزوالکتريک و $2h_f$ و h_p به ترتيب ضخامت صـفحات تـابعي و پيزوالکتريک مي‌باشند. حال شـدت ميـدان الکتريکـي E و تغييـر مکان الکتريکي D در مختصات اسـتوانه اي بـه صـورت روابـط (۱۸)-(۲۰) خواهد بود[۱۵]:

$$D_r = \overline{\Xi}_{11} E_r = \overline{\Xi}_{11}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) \qquad (۱۸)$$

$$D_\theta = \overline{\Xi}_{11} E_\theta = \overline{\Xi}_{11}\left(-\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}\right) \qquad (۱۹)$$

$$D_z = \overline{\Xi}_{33} E_z + \overline{e}_{31}\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}\right) \qquad (۲۰)$$

کـــه در آن $\overline{\Xi}_{11}$, $\overline{\Xi}_{33}$ ثابتهـــاي کاهيـــده دي الکتريـــک لايـــه پيزوالکتريک بوده و به صورت رابطه (۲۱) داده شده اند[۱۴]:

$$\overline{\Xi}_{33} = \Xi_{33} + (e_{33}^2 / C_{33}^E) \qquad \overline{\Xi}_{11} = \Xi_{11} \qquad (۲۱)$$

و Ξ_{33} , Ξ_{11} ثابتهاي دي الکتريک لايه پيزوالکتريک هستند.

٤- معادلات حاکم

براي بدست آوردن معادلات حاکم بر سيستم صفحه دايروي تابعي کوپل با لايه هاي پيزوالکتريک ابتدا اجزاي گشتاور خمشي و نيروي برشي را به صورت (۲۲) بدست آورده مي‌شود [۱۳]:

$$M_{rr}=\int_{-h_f}^{h_f} z\sigma_{rr}^{f}dz+2\int_{h_f}^{h_f+h_p} z\sigma_{rr}^{p}dz \qquad (۲۲)$$

$$M_{\theta\theta}=\int_{-h_f}^{h_f} z\sigma_{\theta\theta}^{f}dz+2\int_{h_f}^{h_f+h_p} z\sigma_{\theta\theta}^{p}dz \qquad (۲۳)$$

$$M_{r\theta}=\int_{-h_f}^{h_f} z\tau_{r\theta}^{f}dz+2\int_{h_f}^{h_f+h_p} z\tau_{r\theta}^{p}dz \qquad (۲۴)$$

$$q_r=\frac{\partial M_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial M_{r\theta}}{r\partial\theta}+\frac{M_{rr}-M_{\theta\theta}}{r} \qquad (۲۵)$$

$$q_\theta=\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial M_{\theta\theta}}{r\partial\theta}+\frac{2M_{r\theta}}{r} \qquad (۲۶)$$

حال با جايگذاري معادلات (۱۱) تا (۱۳) در معادلات (۵) تا (۷) و (۱۴) تا (۱۶) و جايگذاري معادلات حاصـل در معـادلات (۲۲) تـا (۲۶) و جايگـذاري روابـط پايـاني در معادلـه حـاكم بـر صـفحه كرشهف :

$$\frac{\partial q_r}{\partial r}+\frac{\partial q_\theta}{r\partial\theta}+\frac{q_r}{r}-\left(\int_{-h_f}^{h_f}\rho_f(z)\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}dz+2\int_{h_f}^{h_f+h_p}\rho_p\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}dz\right)=0 \qquad (۲۷)$$

معادله ديفرانسيل حركت به صورت رابطه (۲۸) بدست مي‌آيد:

$$(D_1+D_2)\Delta\Delta w+\frac{4}{3}h_p\bar{e}_{31}\Delta\varphi+P_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (۲۸)$$

كه در آن Δ اپراتور لاپلاسين در مختصات استوانه اي بوده و

$$\tilde{\rho}_f=\frac{1}{2h_f}\int_{-h_f}^{h_f}\rho_f(z)dz \quad ,$$

$$D_1=\int_{-h_f}^{h_f}\frac{z^2E(z)}{1-\nu^2}dz\ ,$$

$$D_2=\frac{2}{3}h_p\left(3{h_f}^2+3h_fh_p+{h_p}^2\right)\bar{C}_{11}^{E}$$

$$P_0=2(\tilde{\rho}_fh_f+\rho_ph_p)$$

كه درآن ρ_f و ρ_p به ترتيب چگـالي صـفحه تـابعي و لايـه هـاي پيزوالكتريک مي‌باشند. توجه شود كه بر مبناي معادله ماكسول، ديورژانس چگالي شار الكتريكي در تمـامي نقـاط داخـل محـيط مي‌بايستي صفر گردد. اين شرايط بـا صـفر قـرار دادن انتگـرال ديورژانس چگالي شار الكتريكي در راستاي ضخامت لايه هـاي پيزوالكتريک بـراي هـر r و θ بـه صـورت رابطـه (۲۹) بـرآورده مي‌گردد[۱۵]:

$$\int_{h_f}^{h_f+h_p}\vec{\nabla}.\vec{D}dz=\int_{h_f}^{h_f+h_p}\left(\frac{\partial(rD_r)}{r\partial r}+\frac{\partial D_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)dz=0 \qquad (۲۹)$$

اپراتـور $\vec{\nabla}$ در معادلـه (۲۹) اپراتـور گراديـان در مختـصات استوانه اي مي‌باشد. حال با جايگذاري معادلات (۱۸) تا (۲۰) در معادله (۲۹) رابطه (۳۰) حاصل مي‌شود:

$$\frac{h_p^2\bar{\Xi}_{11}}{12\bar{\Xi}_{33}}\Delta\varphi-\varphi+\frac{h_p^2\bar{e}_{31}}{8\bar{\Xi}_{33}}\Delta w=0 \qquad (۳۰)$$

۵- روش حل

در آغاز با حل همزمان معادلات (۲۸) و (۳۰) مي‌توان ϕ را برحسب w به صورت رابطه (۳۱) بدست آورد:

$$\varphi(r,\theta,t)=-\frac{(D_1+D_2)h_p\bar{\Xi}_{11}}{16\bar{e}_{31}\bar{\Xi}_{33}}\Delta\Delta w+\frac{h_p^2\bar{e}_{31}}{8\bar{\Xi}_{33}}\Delta w-\frac{h_p(\tilde{\rho}_fh_f+\rho_ph_p)\bar{\Xi}_{11}}{8\bar{e}_{31}\bar{\Xi}_{33}}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۳۱)$$

اينک با اعمال اپراتور لاپلاسين به معادله(۳۱) و جايگذاري رابطه بدست آمده در معادله (۲۸) ،معادله ديفرانسيل از نوع معادله با مشتقات جزئي دي كوپله از مرتبه شش به صورت رابطه(۳۲) حاصل مي‌شود:

$$P_3\Delta\Delta\Delta w-P_2\Delta\Delta w+P_1\Delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)-P_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (۳۲)$$

كه در آن:

$$P_1=h_p^2\bar{\Xi}_{11}P_0/12\bar{\Xi}_{33} \qquad P_2=D_1+D_2+h_p^3\bar{e}_{31}^2/6\bar{\Xi}_{33}$$

$$P_3=(D_1+D_2)h_p^2\bar{\Xi}_{11}/12\bar{\Xi}_{33} \qquad (۳۳)$$

براي حل معادله (۳۲) ابتدا فرض مي‌شود [۳۹]:

$$w(r,\theta,t)=w_1(r)e^{i(m\theta-\omega t)} \qquad (۳۴)$$

كه در آن ω فركانس طبيعي زاويه اي صـفحه مركـب و m عـدد موج در راستاي محيطي است. بـا بـاز نويـسي معادلـه (۳۲) بـر مبناي $w_1(r)$ و استفاده از معادله (۳٤) و پس از حـذف جمـلات نمايي رابطه ۳۵ حاصل مي‌شود:

$$P_3\overline{\Delta\Delta\Delta}w_1-P_2\overline{\Delta\Delta}w_1-\omega^2P_1\overline{\Delta}w_1+\omega^2P_0w_1=0 \qquad (۳۵)$$

كه در آن:

$$\overline{\Delta}=d^2/dr^2+d/rdr-m^2/r^2$$

معادله (۳۵) را مي‌توان با استفاده از روش جداسازي حل كـرد. با در نظر گرفتن اين نكتـه كـه w_1 در مركـز صـفحه غيـر تكـين مي‌باشد، راه حل كلي (۳٦) را مي‌توان براي آن پيشنهاد كرد:

$$w_1=\sum_{n=1}^{3}A_{nm}Z_{nm}(\alpha_nr) \qquad (۳۶)$$

كه در آن:

$$\alpha_1=\sqrt{|x_1|}\ ,\alpha_2=\sqrt{|x_2|}\ ,\alpha_3=\sqrt{|x_3|} \qquad (۳۷)$$

x_1, x_2, x_3 در رابطه (۳۷) ريـشه هـاي معادلـه مشخـصه (۳۸) مي‌باشند:

$$P_3x^3-P_2x^2-\omega^2P_1x+\omega^2P_0=0 \qquad (۳۸)$$

و

$$Z_{im}(\alpha_ir)=Z_{im}(\alpha_i,r)=\begin{cases}J_m(\alpha_ir) & ,x_i<0\\ I_m(\alpha_ir) & ,x_i>0\end{cases} \qquad (۳۹)$$

كـه در آن۳و۲و۱=i و $J_m(\alpha_ir)$ و $I_m(\alpha_ir)$ بـه ترتيـب توابـع بسل مرتبه اول معمولي و اصلاح شده مـي‌باشـند. اينـک بـراي

بدست آوردن جواب مناسبي براي $\varphi(r,\theta,t)$ ، فرض مي‌شود:

$$\varphi(r,\theta,t)=\varphi_1(r)e^{i(m\theta-\omega t)} \quad (۴۰)$$

اينک با جايگذاري معادله (٣٦) در معادله (٣١) حل بر طبق رابطه (٤١) براي $\varphi_1(r)$ حاصل مي‌شود:

$$\varphi_1(r)=\left[16\bar{e}_{31}\Xi_{33}\right]^{-1}\sum_{n=1}^{3}\left[A_{nm}h_p(2s_n\alpha_n^2h_p\bar{e}_{31}^2-(D_1+D_2)\alpha_n^4\Xi_{11}+P_0\omega^2\Xi_{11})\right]\times Z_{nm}(\alpha_n r) \quad (۴۱)$$

٦- حل معادلات

حال معادلات مربوط به شرايط مرزي در حالت گيردار به صورت رابطه (۴۲) بيان مي‌گردد:

$$w_1=dw_1/dr=d\varphi_1/dr=0 \quad at\ (r=r_0) \quad (۴۲)$$

و معادله مشخصه به صورت رابطه (۴۳) خواهد بود:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{aligned} c_{1i}&=Z_{im}(\alpha_i r_0) \\ c_{2i}&=\alpha_i r_0 Z'_{im}(\alpha_i r_0) \end{aligned} \quad (۴۳)$$

$$c_{3i}=\left(\frac{h_p^2r_0s_i\alpha_i^3}{8}-\frac{(D_1+D_2)h_pr_0\alpha_i^5\Xi_{11}}{16\bar{e}_{31}^2}+\frac{(D_1+D_2)h_p\alpha_i\lambda^4\Xi_{11}}{16\bar{e}_{31}^2r_0^3}\right)Z'_{im}(\alpha_i r_0) \quad (۴۴)$$

$$\lambda=r_0\left[\frac{2\left(\tilde{\rho}_fh_f+\rho_ph_p\right)\omega^2}{D_1+D_2}\right]^{\frac{1}{4}} \quad (۴۵)$$

$$\omega=\frac{\lambda^2}{r_0^2}\sqrt{\frac{D_1+D_2}{2\left(\tilde{\rho}_fh_f+\rho_ph_p\right)}} \quad (۴۶)$$

که در آن علامت پرايم معرف مشتق نسبت به r و λ فرکانس طبيعي زاويه‌اي بي بعد مي‌باشد. پس از محاسبه ω از معادله (۴۳) و استفاده از معادلات (۳۶) و (۴۲) شکلهاي مد w_1 به صورت (۴۷) بدست مي‌آيد:

$$w_1(r)=A_{3m}\times\left[\left(\frac{\alpha_3Z_{2m}(\alpha_2r_0)Z'_{3m}(\alpha_3r_0)-\alpha_2Z_{3m}(\alpha_3r_0)Z'_{2m}(\alpha_2r_0)}{\alpha_2Z_{1m}(\alpha_1r_0)Z'_{2m}(\alpha_2r_0)-\alpha_1Z_{2m}(\alpha_2r_0)Z'_{1m}(\alpha_1r_0)}\right)\times Z_{1m}(\alpha_1r)+\left(\frac{\alpha_1Z_{3m}(\alpha_3r_0)Z'_{1m}(\alpha_1r_0)-\alpha_3Z_{1m}(\alpha_1r_0)Z'_{3m}(\alpha_3r_0)}{\alpha_2Z_{1m}(\alpha_1r_0)Z'_{2m}(\alpha_2r_0)-\alpha_1Z_{2m}(\alpha_2r_0)Z'_{1m}(\alpha_1r_0)}\right)\times Z_{2m}(\alpha_2r)+Z_{3m}(\alpha_3r)\right] \quad (۴۷)$$

به علاوه با استفاده از معادلات (۳۶) ، (۴۱) و (۴۲) پتانسيل الکتريکي به صورت رابطه (۴۸) ارائه مي‌گردد:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(r)=A_{3m}\times&\left[\left(\frac{\alpha_3Z_{2m}(\alpha_2r_0)Z'_{3m}(\alpha_3r_0)-\alpha_2Z_{3m}(\alpha_3r_0)Z'_{2m}(\alpha_2r_0)}{\alpha_2Z_{1m}(\alpha_1r_0)Z'_{2m}(\alpha_2r_0)-\alpha_1Z_{2m}(\alpha_2r_0)Z'_{1m}(\alpha_1r_0)}\right)\times Z_{1m}(\alpha_1r)\right.\\ &\times\left[h_p(2s_1\alpha_1^2h_p\bar{e}_{31}^2-(D_1+D_2)\alpha_1^4\Xi_{11}+P_0\omega^2\Xi_{11})\right]\left[16\bar{e}_{31}\Xi_{33}\right]^{-1}\\ &+\left(\frac{\alpha_1Z_{3m}(\alpha_3r_0)Z'_{1m}(\alpha_1r_0)-\alpha_3Z_{1m}(\alpha_1r_0)Z'_{3m}(\alpha_3r_0)}{\alpha_2Z_{1m}(\alpha_1r_0)Z'_{2m}(\alpha_2r_0)-\alpha_1Z_{2m}(\alpha_2r_0)Z'_{1m}(\alpha_1r_0)}\right)\times Z_{2m}(\alpha_2r)\\ &\times\left[h_p(2s_2\alpha_2^2h_p\bar{e}_{31}^2-(D_1+D_2)\alpha_2^4\Xi_{11}+P_0\omega^2\Xi_{11})\right]\left[16\bar{e}_{31}\Xi_{33}\right]^{-1}\\ &\left.+\left[h_p(2s_3\alpha_3^2h_p\bar{e}_{31}^2-(D_1+D_2)\alpha_3^4\Xi_{11}+P_0\omega^2\Xi_{11})\right]\left[16\bar{e}_{31}\Xi_{33}\right]^{-1}Z_{3m}(\alpha_3r)\right]\end{aligned} \quad (۴۸)$$

قبل ازشروع بحث و بررسي نتايج، براي تاييد نتايج حاصل به مقايسه آنها با نتايج ارائه شده توسط وانگ و همکاران [١٤] که براي صفحه دايروي فولادي ارائه شده، پرداخته مي‌شود. همچنين از آنجا که تاکنون نتايجي براي صفحه تابعي کوپل شده با لايه‌هاي پيزوالکتريک در تحقيقات موجود ارائه نشده است به تاييد نتايج با مقايسه آنها با نتايج حاصل از تحليل اجزاء محدود سه بعدي پرداخته مي‌شود. مدل اجزاء محدود ارائه شده شامل المانهاي سه بعدي ۸ گره اي با تعداد کل ۲۶۹۵۰ گره و تعداد ۲۴۲۷۶ المان و با سه درجه آزادي (جابجايي) براي هر گره در مورد المان مربوط به صفحه تابعي و ۶ درجه آزادي (سه درجه جابجاي ، دما ، ولتاژ و خواص مغناطيسي) براي المان مربوط به لايه هاي پيزوالکتريک خواهد بود.

جدول (١): خواص مواد تابعي و پيزوالکتريک

FGM Plate	E_c = ۲۰۵ Gpa , ν= ۰,۳	E_m = ۲۰۰
	ρ_c =۸۹۰۰ (kg/m^3)	ρ_m =۷۸۰۰
	e_{31} (C/m^2)= -۴,۱	e_{33}= ۱۴,۱
PZT4 Layers	ρ_p =۷۵۰۰ (kg/m^3)	e_{15} = ۱۰,۵
	C_{11}^E = ۱۳۲ Gpa	C_{12}^E = ۷۱
	Ξ_{11} =۷,۱۲۴ (nF/m)	Ξ_{33} =۵,۸۴۱
	C_{13}^E = ۷۳, C_{55}^E = ۲۶	C_{33}^E = ۱۱۵

۷- ارائه نتايج حاصل و بحث و بررسي آنها

در اين بخش، صفحه دايروي از جنس مواد تابعي کوپل شده با لايه‌هاي پيزوالکتريک تحت شرايط تکيه گاهي گيردار و داراي خواص فيزيکي مطابق جدول(١) مورد بررسي قرار خواهد گرفت. شعاع خارجي صفحه دايروي برابر۰/۶ متر و نسبت ضخامت هر لايه پيزوالکتريک به ضخامت صفحه تابعي برابر ۰/۱ در نظر گرفته شده است. اولين سه فرکانس طبيعي صفحه دايروي تابعي بدون و يا لايه هاي پيزوالکتريک که با استفاده از روش تحليلي ارائه شده در مقاله حاضر محاسبه شده اند، در جداول ۲و۳ ارائه شده‌اند. اين نتايج با نتايج حاصل از تحليل اجزاء محدود سه بعدي نيز مقايسه شده است.

جدول (۲) : فرکانس هاي طبيعي صفحه دايروي تابعي

Power Index g	Mode no. m	FGM plate Present Method	Present (FEM)	Diff. (%)	Wang et al.[14]
۰	۰	۱۳۸,۴۲	۱۳۹,۲۷	۰,۶۱	۱۳۸,۴۸
	۱	۲۸۸,۰۵	۲۸۹,۷۰	۰,۵۷	۲۸۸,۲۰
	۲	۴۷۲,۵۵	۴۷۳,۴۵	۰,۱۹	۴۷۲,۷۹
۱	۰	۱۳۴,۶۳	۱۳۵,۴۳	۰,۵۹	-
	۱	۲۸۰,۱۷	۲۸۱,۷۸	۰,۵۷	-
	۲	۴۵۹,۶۲	۴۶۰,۴۵	۰,۱۸	-
۳	۰	۱۳۲,۷۰	۱۳۳,۶۳	۰,۶۹	-
	۱	۲۷۶,۱۹	۲۷۸,۰۴	۰,۶۷	-
	۲	۴۵۳,۰۹	۴۵۴,۳۴	۰,۲۸	-
۵	۰	۱۳۲,۱۲	۱۳۳,۰۶	۰,۷۰	-
	۱	۲۷۴,۹۶	۲۷۶,۸۵	۰,۶۹	-
	۲	۴۵۱,۰۶	۴۵۲,۳۹	۰,۲۹	-
۷	۰	۱۳۱,۸۵	۱۳۲,۷۸	۰,۷۰	-
	۱	۲۷۴,۳۹	۲۷۶,۲۵	۰,۶۷	-
	۲	۴۵۰,۱۳	۴۵۱,۴۶	۰,۲۹	-
۹	۰	۱۳۱,۶۹	۱۳۲,۷۰	۰,۷۶	-
	۱	۲۷۴,۰۷	۲۷۶,۰۹	۰,۷۳	-
	۲	۴۴۹,۶۰	۴۵۰,۸۴	۰,۲۸	-
۱۰	۰	۱۳۱,۶۴	۱۳۲,۵۵	۰,۶۸	-
	۱	۲۷۳,۹۶	۲۷۵,۷۹	۰,۶۷	-
	۲	۴۴۹,۴۲	۴۵۰,۶۶	۰,۲۸	-

جدول (۳) : فرکانس هاي صفحه دايروي تابعي کوپل با لايه هاي پيزوالکتريک براي مقادير مختلف گراديان تابعي

Power Index g	Mode no. m	FGM plate Present Method	Present (FEM)	Diff. (%)	Wang et al.[14]
	۰	۱۴۳,۶۳	۱۴۴,۶۹	۰,۷۳	۱۴۳,۷۱
۰	۱	۲۹۸,۹۲	۳۰۰,۴۹	۰,۵۲	۲۹۹,۰۷
	۲	۴۹۰,۳۷	۴۹۲,۶۲	۰,۴۶	۴۹۰,۶۲
۱	۰	۱۴۰,۲۶	۱۴۲,۲۲	۱,۳۸	-
	۱	۲۹۱,۸۹	۲۹۵,۸۲	۱,۳۳	-
	۲	۴۷۸,۸۴	۴۸۲,۰۹	۰,۶۷	-
۳	۰	۱۳۸,۵۴	۱۴۰,۶۰	۱,۴۶	-
	۱	۲۸۸,۳۳	۲۹۲,۴۷	۱,۴۲	-
	۲	۴۷۲,۹۹	۴۷۶,۶۱	۰,۷۶	-
۵	۰	۱۳۸,۰۱	۱۴۰,۰۷	۱,۴۷	-
	۱	۲۸۷,۲۱	۲۹۱,۳۹	۱,۴۳	-
	۲	۴۷۱,۱۶	۴۷۴,۸۱	۰,۷۷	-
۷	۰	۱۳۷,۷۶	۱۳۹,۸۲	۱,۴۷	-
	۱	۲۸۹,۶۹	۲۹۰,۸۳	۱,۴۳	-
	۲	۴۷۰,۳۰	۴۷۳,۹۵	۰,۷۷	-
۹	۰	۱۳۷,۶۲	۱۳۹,۷۳	۱,۵۱	-
	۱	۲۸۶,۴۰	۲۹۰,۵۴	۱,۴۳	-
	۲	۴۶۹,۸۳	۴۷۳,۱۶	۰,۷۰	-
۱۰	۰	۱۳۷,۵۷	۱۳۹,۶۱	۱,۴۶	-
	۱	۲۸۹,۳۳	۲۹۰,۴۱	۱,۴۲	-
	۲	۴۶۹,۶۶	۴۷۳,۲۶	۰,۷۶	-

همانطور که از جداول (۲)و(۳) مشخص ميگردد نتايج حاصل از روش تحليلي حاضر در حالت صفحه فولادي برابري بسيار خوبي با نتايج مرجع [١٤] و همچنين همخواني قابل قبولي با نتايج حاصل از تحليل اجزاء محدود براي گراديانهاي تابعي مختلف دارد.

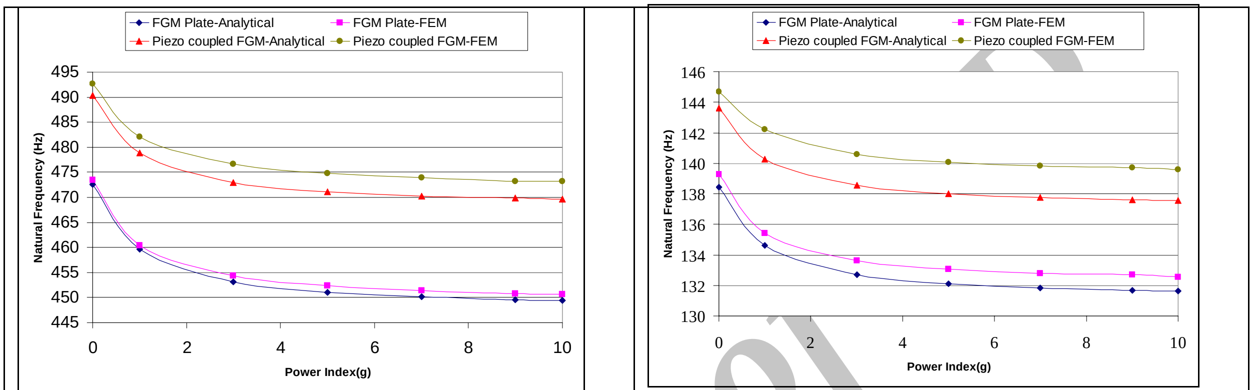
در مرحله بعد بررسي اثر تغيير گراديان تابعي بر روي مشخصات ارتعاشي صفحه مربوطه انجام شد. نتايج ارائه شده در جداول (۲) و (۳) نشان مي‌دهد که با افزايش مقدار گراديان تابعي، فرکانس طبيعي مربوط به تمامي مدهاي فرکانسي سيستم کاهش مي‌يابد. به علاوه اين روند کاهش فرکانسي براي مقادير کوچکتر گراديان آشکارتر مي‌باشد.به عنوان نمونه مطابق نتايج جدول (۲)، با افزايش مقدار گراديان از ۱ به ۳ (افزايشي برابر ۲۰۰ درصد)، فرکانس طبيعي مد اول سيستم به مقدار ۱/۴۳ درصد کاهش مي‌يابد در حالي که براي همين صفحه، با افزايش مقدار گراديان از ۳ به ۹ (افزايشي برابر ۲۰۰ درصد)، فرکانس طبيعي مربوط به همين مد فرکانسي به مقدار ۰/۷۶ درصد کاهش مي‌يابد. اين روند در مورد مدهاي ديگر ارتعاشي صفحه تابعي بدون و يا لايه هاي پيزوالکتريک نيز درست است. به عنوان مثال مطابق جدول شماره (۳)، با افزايش مقدار گراديان از صفر به ۳ ، فرکانس طبيعي مد سوم سيستم صفحه تابعي کوپل با لايه هاي پيزوالکتريک به مقدار ۳/۵۴ درصد کاهش مي‌يابد در حالي که براي همين صفحه، با افزايش مقدار گراديان از ۵ به ۱۰ ، فرکانس طبيعي مربوط به همين مد فرکانسي در حدود ۰/۳۲ درصد کاهش مي‌يابد. براي ديدن بهتر اين روند و بررسي اثرات تغيير گراديان بر روي فرکانسهاي طبيعي سيستم، شکلهاي شماره (۱) و (۲) براي نمايش اين اثرات در مورد مدهاي فرکانسي اول وسوم سيستم ارائه شده است. همانطور که از شکلهاي شماره (۱) و (۲) ديده مي‌شود روند کاهش فرکانس طبيعي با افزايش مقدار گراديان مربوط به تمامي مدهاي فرکانسي سيستم و برجسته بودن اين اثر در مورد مدهاي فرکانسي پايين تر در تمامي حالات مورد مطالعه

سيستم صفحه تابعي هوشمند برقرار است ولي براي گراديانهاي بزرگتر از ۷، فركانسهاي طبيعي تا اندازه اي ثابت مي‌مانند.

در واقع مي‌توان نتيجه گرفت كه براي گراديانهاي بسيار بزرگ، صفحه تابعي تبديل به يک صفحه فلزي و صفحه مركب مربوطه به يک صفحه هوشمند مركب داراي هسته فلزي مي‌گردد.

۸- نتيجه گيري

در تحقيق حاضر يک مدل تحليلي براي ارتعاش يک صفحه دايروي مركب از يک صفحه تابعي كوپل شده با لايه هاي پيزوالكتريک براساس تئوري صفحه كرشهف ارائه شده است. معادلات ديفرانسيل حركت براي اولين بار به صورت تحليلي براي صفحه با شرايط مرزي گيردار حل شده و پاسخهاي تحليلي بدست آمده است. درستي روش تحليلي ارائه شده از طريق مقايسه نتايج با نتايج ارائه شده در تحقيقات مشابه و همچنين با مقايسه با نتايج حاصل از روش المان محدود سه بعدي تاييد شده است.



شكل (۱) و (۲): اثر گراديان تابعي بر روي فركانس هاي طبيعي مد اول و سوم

در مطالعات عددي تاكيد اصلي بر بررسي اثر تغيير شاخص گراديان صفحه تابعي بر روي مشخصات ارتعاشي سازه مربوطه مي‌باشد. همچنين با مقايسه نتايج روش حاضر و نتايج بدست آمده از روش اجزاء محدود تطابق بسيار خوبي مشاهده شده است. همچنين براي تمامي شرايط مرزي در فركانسهاي پايينتر، روش تحليلي پيشنهادي نتايج نزديكتري به نتايج حاصل از روش المان محدود در مقايسه با فركانسهاي بالاتر ارائه مي‌نمايد. به علاوه با افزايش مقدار گراديان، فركانس طبيعي مربوط به تمامي مدهاي فركانسي سيستم براي تمامي شرايط تكيه گاهي كاهش مي‌يابد. همچنين اين روند كاهش فركانس براي مقادير كوچكتر گراديان مشهودتر مي‌باشد. پاسخهاي تحليلي و نتايج حاصل ، مدل ساده شده‌اي براي مطالعه پارامتري و درک مشخصات ارتعاشي صفحات دايروي تابعي كوپل با لايه هاي پيزوالكتريک ارائه مي دهد. اين نتايج مي‌تواند در طراحي سازه‌هاي هوشمند شده با لايه‌هاي پيزوالكتريک در كاربردهاي صنعتي همچون موتورهاي التراسونيک مورد استفاده قرار گيرد.

۹- مراجع

[۱] Feldman, E.; Aboudi, J.; “Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading”, Compos Struct, Vol. 38, pp.29–36, 1997.

[۲] Sankar, B. V.; “An elasticity solution for functionally graded beams”, Compos. Sci. Technol.,vol. 61, pp. 689–896 , 2001.

[۳] Yang, J.; Shen, H. S.; “Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates”, Compos Struct, vol. 54, pp. 497–508, 2001.

[٤] Woo, J.; Meguid, S.A.; “Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells”, Int. J. Solids Struct, vol. 38, pp. 7409–7421, 2001.

[٥] Ootao, Y.; Tanigawa, Y.; “Three-dimensional transient piezo-thermo-elasticity in functionally graded rectangular plate bonded to a piezoelectric plate”, Int. J. Solids Struct., vol. 37, pp. 4377–4401, 2000.

[٦] Reddy, J. N.; Cheng, Z. Q.; “Three-dimensional solutions of smart functionally graded plates”, ASME J. Appl. Mech., vol. 68, pp. 234–241, 2001.

[٧] Wang, B.L.; Noda, N.;”Design of smart functionally graded thermo-piezoelectric composite structure”, Smart Mater. Struct., vol. 10, pp. 189–193, 2001.

[۸] He, X. Q. ; Ng, T. Y. ; Sivashanker; S. ; Liew, K. M.; "Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators", Int. J. Solids Struct., vol. 38, pp. 1641–1655, 2001.

[۹] Huang, X.L.; Shen H.S.; "Vibration and dynamic response of functionally graded plates with piezoelectric actuators in thermal environments", J. Sound Vib., vol. 289, pp. 25–53, 2006.

[۱۰] Reddy, J.N.; Praveen, G.N.; "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plate", Int. J. Solids Struct, vol. 35, pp. 4457-4476, 1998.

[۱۱] Wetherhold, R.C.; Wang, S.; "The use of functionally graded materials to eliminate or thermal deformation", Composite Sci Tech, vol. 56 pp. 1099-1104,1996.

[۱۲] Brush, D.O.; Almroth, B.O.; Buckling of bars plates and shells, McGraw-Hill, 1975.

[۱۳] Reddy, J.N.; Theory and analysis of elastic plates, Taylor and Francis, 1999.

[۱٤] Wang, Q.; Quek, S.T.; Liu, X.; "Analysis of piezoelectric coupled circular plate", Smart Mater Struct, vol. 10, pp. 229-39, 2001.

[۱۵] Halliday, D.; Resniek, R.; Physics, John Wiley and Sons, 1978.