# حل الاستیسیته سه بعدی پانل استوانه‌ای پیزوالکتریک تک لایه تحت بار دینامیکی

محمد رضا صدیقی صابر[i]; محمود شاکری[ii];علیرضا دانش‌مهر[iii]

## چکیده

در این تحقیق، حلی نیمه تحلیلی برای پانل استوانه‌ای پیزوالکتریک پلاریزه شده در جهت ضخامت، ارتوترپ، با تکیه‌گاههای ساده و طول محدود تحت بارگذاری الکترومکانیکی دینامیکی ارائه شده است. با بسط مثلثاتی مولفه‌های جابجايي و پتانسیل الکتریکی در جهت‌های محیطي و محوری، دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای جفت شده به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغییر کاهش مي‌یابد. مولفه‌های جابجايي و پتانسیل الکتریکی بصورت سری فوریه در جهت‌های محیطي و محوری بگونه‌ای انتخاب مي‌گردند که شرایط تکیه‌گاهی ساده لبه‌های محوری و محیطي را برآورده نمایند. معادلات دیفرانسیل حاصل با استفاده از روش اجزاء محدود گلرکین حل مي‌شوند. در این روش از تابع شکل مرتبه دوم در هر المان استفاده شده است. پاسخ دینامیکی پانل استوانه‌ای پیزوالکتریک تک لایه تحت بارگذاری دینامیکی خارجی بعنوان مثال عددی ارائه شده است.

## کلمات کلیدي

پیزوالکتریک، پانل استوانه ای با طول محدود، بار دینامیکی .

# *A Three Dimensional Elasticity Solution of Single Layer Cylindrical Piezoelectric Panel under Dynamic Loading*

M.R. Sedighi, M. Shakeri, A.R. Daneshmehr

***ABSTRACT***

This research presents a semi-analytical solution of finitely long, simply supported, orthotropic and radially polarized piezoelectric shell panel under dynamic electro-mechanical loading. The highly coupled partial differential equations set are reduced to ordinary differential equation set with variable coefficients by the trigonometric function expansion of displacement and electric potential in circumferential and axial directions. The displacement components and electric potential are expanded in appropriate trigonometric Fourier series in circumferential and axial coordinate to satisfy the boundary conditions at the simply supported circumferential and axial edges. The resulting ordinary differential equations are solved by Galerkin finite element method. In this procedure, a quadratic shape function is used for each element. Numerical example is provided for dynamic response of a single layer piezoelectric cylindrical panel under dynamic external loading.

***KEYWORDS***

Piezoelectric, Cylindrical panel with finite length, Dynamic loading.

[i] دانشجوی دکتری دانشکده مهندسي مکانيك، دانشگاه صنعتي اميرکبير. Email: sedighisaber@gmail.com
[ii] استاد دانشکده مهندسي مکانیک، دانشگاه صنعتي اميرکبير. Email: shakeri@aut.ac.ir
[iii] استادیار دانشکده مهندسي مکانيك، پردیس دانشکده‌هاي فني دانشگاه تهران. Email: daneshmehr@ut.ac.ir

## ۱- مقدمه

بر هم کنش بین میدانهای الکتریکی و مکانیکی در مواد پیزوالکتریک سبب شده تا از این مواد بطور وسیعی استفاده شود. مواد پیزوالکتریک دارای دو اثر مستقیم[۱] و معکوس[۲] می‌باشند. از خاصیت اثر مستقیم آن در ساخت سنسورهای الکترومکانیکی[۳] برای اندازه‌گیری تغییر شکل ، فشار و ....... استفاده می‌شود. اختلاف پتانسیل الکتریکی ایجادشده در سنسورها در اثر تغییر شکل حاصل از بار وارده، آنها را به ابزاری قوی برای اندازه گیری پدیده های فیزیکی مبدل ساخته است. از خاصیت اثر معکوس مواد پیزوالکتریک در عملگرهای[٤] الکترومکانیکی استفاده می‌شود. این عملگرها می توان کمیتهای مهم عملکرد سیستمهای دینامیکی و یا استاتیکی را کنترل کرد.این مهم با اعمال اختلاف پتانسیل مناسب در سطوح پیزوالکتریک انجام می گیرد. از این خاصیت براي کاهش وزن سازه‌ها، مقاومتر کردن آنها و همچنین کنترل هوشمند سازه‌ها می توان بهره گرفت [۱]. در عمل این مواد به دو صورت یکپارچه[٥] و تکه‌ای[٦] می تواند مورد استفاده قرار گیرند.

حلهای دقیق معادلات الاستیسیته سه بعدی حاکم بر مواد پیزوالکتریک که در آنها خواص الکتریکی و مکانیکی با هم کوپل هستند بسیار کم و فقط برای بعضی هندسه‌های خاص موجود است. از طرفی برای ارزیابی تئوريهای دوبعدی که برای فرمولبندی این مواد ارائه می‌شوند، دستیابی به این حل‌ها ضروری است(تئوریهای پوسته و ورق پیزو الکتریک)[۲].

دومیر(Dumir) و همکارانش حل دقیقی از پانل استوانه‌ای پیزوالکتریک با طول نامحدود برای حالت استاتیکی ارائه‌کرده‌اند [۲]. ایشان ضمن مقایسه روش حل ارائه شده با جوابهای دقیق موجود برای پانل همسانگرد نتایج را برای بارگذاری‌های مکانیکی و الکترواستاتیک بررسی کرده‌است. بررسی پوسته استوانه‌ای پیزوالکتریک با طول نامحدود تحت اثر بارهای حرارتی و مکانیکی توسط چن(Chen) و همکارانش ارائه شده است[۳]. حل الاستیسیته سه محوری پانل استوانه‌ای‌با طول محدود توسط شاکری ارائه شده است[٤].شاکری ضمن ارائه حل الاستیسیته سه محوری پانل استوانه‌ای ضخیم غیرایزوتوپ تحت بار ضربه‌ای [٥] به حل نیمه تحلیلی الاستیسیته سه محوری برای پانل استوانه‌ای ضخیم ارتوتروپ به همراه یک لایه پیزوالکتریک [٦]نیز پرداخته است.

در مقاله حاضر، حلی نیمه تحلیلی برای آنالیز دینامیکی پانل پیزوالکتریک استوانه‌ای با طول محدود ارائه شده است. این پانل روی تکیه‌گاههای ساده قرار داشته و تحت اعمال بار الکتریکی و مکانیکی بطور همزمان قرار می‌گیرد. ماده پیزوالکتریک استفاده شده در این تحقیق ارتوتروپیک بوده و در جهت شعاعی پلاریزه[۷] شده است.

از آنجاکه معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت پانل پیزوالکتریک به هم کوپل شده است، با استفاده از بسط توابع متعامد متغیرها، دستگاه معادلات مشتقات جزئی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر تبدیل می‌شود. بدین منظور، مؤلفه‌های جابجایی و پتانسیل الکتریکی بصورت سریهای فوریه بگونه‌ای انتخاب می‌شوند که شرایط مرزی تکیه‌گاهی پانل در جهتهای طولی و محیطی را برآورده نمایند. با اعمال روش گالرگین[۸] معادلات دیفرانسیل حاکم به فرم ضعیف[۹] شده تبدیل شده و از روی آن معادله دیفرانسیل مجزا شده سیستم بصورت ماتریسی استخراج می‌گردد. گفتني است که در روش گالرگین از توابع میانیابی مرتبه‌دوم جهت استخراج ماتریسهای جرم، سختی و نیرو استفاده شده است.

## ۲- معادلات حاکم

معادلات رفتاری یک ماده دارای خاصیت پیزوالکتریک بصورت رابطه (۱) است [۱]:

$$\{\sigma\}=[C]\{\varepsilon\}-[e]^T\{E\}\ ,\ \{D\}=[e]\{\varepsilon\}+[\eta]\{E\} \qquad (۱)$$

در رابطه (۱)، $\{\sigma\}$ مؤلفه‌های تنش، $\{\varepsilon\}$ مؤلفه‌های کرنش، $\{E\}$ بردار میدان الکتریکی و $\{D\}$ بردار جابجائی الکتریکی می‌باشند که در سیستم مختصات استوانه‌ای $(r,\theta,z)$ عبارتند از [۱]:

$$\{\sigma\}=[\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{\theta z} \quad \tau_{rz} \quad \tau_{r\theta}]^T$$

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{\theta z} \quad \gamma_{rz} \quad \gamma_{r\theta}]^T$$

$$\{E\}=[E_r \quad E_\theta \quad E_z]^T$$

$$\{D\}=[D_r \quad D_\theta \quad D_z]^T$$

همچنین $[C]$، $[e]$ و $[\eta]$ بترتیب ماتریسهای ثابت‌های الاستیک، پیزو الکتریک و دی‌الکتریک هستند. معادله تعادل حاکم بر پانل با چشم پوشي از نیروی حجمی و معادله تعادل شارژ الکترواستاتیک درسیستم مختصات استوانه‌ای عبارتنداز[٤]:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}=\rho\ddot{u}_r \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+2\frac{\tau_{r\theta}}{r}=\rho\ddot{u}_\theta \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=\rho\ddot{u}_z \qquad (٤)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial rD_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{D_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=0 \qquad (٥)$$

برای ماده پیزوالکتریک ارتوتروپیک استوانه‌ای که در جهت

ضخامت پلاریزه شده، ماتریسهای $[C]$، $[e]$ و $[\eta]$ در مرجع [۱] بصورت رابطه (٦) داده شده است:

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix} \qquad (٦)$$

$$[e]=\begin{bmatrix} e_{33} & e_{32} & e_{31} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{24}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0\end{bmatrix},\ [\eta]=\begin{bmatrix}\eta_{33} & 0 & 0\\ 0 & \eta_{11} & 0\\ 0 & 0 & \eta_{22}\end{bmatrix}$$

با استفاده از ماتریسهای ثابت داده شده توسط رابطه(٦)، معادله رفتاری (۱) را می‌توان بصورت روابط (۷) و (۸) نوشت:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= C_{11}\varepsilon_{rr}+C_{12}\varepsilon_{\theta\theta}+C_{13}\varepsilon_{zz}-e_{33}E_r\\
\sigma_\theta &= C_{12}\varepsilon_{rr}+C_{22}\varepsilon_{\theta\theta}+C_{23}\varepsilon_{zz}-e_{32}E_r\\
\sigma_z &= C_{13}\varepsilon_{rr}+C_{23}\varepsilon_{\theta\theta}+C_{33}\varepsilon_{zz}-e_{31}E_r\\
\tau_{\theta z} &= C_{44}\gamma_{\theta z}\\
\tau_{rz} &= C_{55}\gamma_{rz}-e_{15}E_z\\
\tau_{r\theta} &= C_{66}\gamma_{r\theta}-e_{24}E_\theta
\end{aligned} \qquad (۷)$$

و

$$\begin{aligned}
D_r &= e_{33}\varepsilon_{rr}+e_{32}\varepsilon_\theta+e_{31}\varepsilon_z+\eta_{33}E_r\\
D_\theta &= e_{24}\gamma_{r\theta}+\eta_{22}E_\theta\\
D_z &= e_{15}\gamma_{rz}+\eta_{11}E_z
\end{aligned} \qquad (۸)$$

پانلی با شعاع متوسط $R_m$، ضخامت $H$ ، طول محدود $L$ و زاویه دهنه $\alpha$ را مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید. این پانل در دو انتهای طولی $(Z=0,L)$ و محیطی ($\theta=0,\alpha$) روی تکیه گاههای ساده قرار داشته که در این نقاط پتانسیل الکتریکی صفر است .سطوح خارجی و داخلی پانل تحت بار مکانیکی و الکتریکی بطور همزمان قرار دارند. بارهای مکانیکی و الکتریکی وارده نسبت به محورهای طولی و محیطی پانل متغیر هستند. روابط بین کرنشها و مؤلفه‌های جابجایی $(u_r,u_\theta,u_z)$ در سیستم مختصات استوانه‌ای عبارتند از:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}\ ,\ \gamma_{\theta z}=\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}(u_r+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta})\ ,\ \gamma_{rz}=\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\\
\varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}\ ,\ \gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-u_\theta+r\frac{\partial u_\theta}{\partial r})
\end{aligned} \qquad (۹)$$

از طرفی میدان الکتریکی را می‌توان بر حسب پتانسیل الکتریکی $\psi$، توسط روابط (۱۰) و (۱۱) بیان کرد [٦]:

$$E_r=-\frac{\partial\psi}{\partial r},\ E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ E_z=-\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad (۱۰)$$

با استفاده از روابط (۷) تا (۱۰)، معادله تعادل حاکم بر پانل (روابط (۲) تا (۵)) را می‌توان به صورت ناویر[10] نوشت. با بازنویسی معادلات حاصل بصورت اپراتوری بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} L_{1r} & L_{1\theta} & L_{1z} & L_{1\psi}\\ L_{2r} & L_{2\theta} & L_{2z} & L_{2\psi}\\ L_{3r} & L_{3\theta} & L_{3z} & L_{3\psi}\\ L_{4r} & L_{4\theta} & L_{4z} & L_{4\psi}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_r\\ u_\theta\\ u_z\\ \psi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\rho\ddot{u}_r\\ \rho\ddot{u}_\theta\\ \rho\ddot{u}_z\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (۱۱)$$

که درایه‌های معادله ماتریسی یاد شده، $L_{ij}$ ها، در مرجع [٤] داده شده است. باید توجه داشت که در اینجا ( $j=۱،۲،۳،٤$ ) و( $j=r,\theta,z,\psi$ ) است.

با فرض اینکه فشار و پتانسیل الکتریکی یا جابجایی الکتریکی وارده روی سطوح داخلی و خارجی پانل بترتیب $p_a(\theta,z,t)$ ، $\psi_a(\theta,z,t)$ یا $D_a(\theta,z,t)$ و $p_b(\theta,z,t)$ ، $\psi_b(\theta,z,t)$ یا $D_b(\theta,z,t)$ باشند، شرایط مرزی پانل بصورت روابط (۱۲) تا (۱۵) خواهد بود:

شرایط مرزی در دو انتهای طولی ( $z=0,L$ )،عبارتند از:

$$\begin{aligned}
u_r(r,\theta,0,t) &= u_r(r,\theta,L,t)=0\\
u_\theta(r,\theta,0,t) &= u_\theta(r,\theta,L,t)=0\\
\sigma_z(r,\theta,0,t) &= \sigma_z(r,\theta,L,t)=0\\
\psi(r,\theta,0,t) &= \psi(r,\theta,L,t)=0
\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

شرایط مرزی در دو انتهای محیطی ( $\theta=0,\alpha$ )، را چنین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
u_r(r,0,z,t) &= u_r(r,\alpha,z,t)=0\\
u_z(r,0,0,t) &= u_z(r,\alpha,L,t)=0\\
\sigma_\theta(r,0,z,t) &= \sigma_\theta(r,\alpha,z,t)=0\\
\psi(r,0,z,t) &= \psi(r,\alpha,z,t)=0
\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

وشرایط مرزی روی سطوح داخلی و خارجی ( $r=R_a,R_b$ )، بصورت روابط (۱٤) و (۱۵) است:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r(R_a,\theta,z,t)=-p_a(\theta,z,t)\\
&\tau_{rz}(R_a,\theta,z,t)=0\\
&\tau_{r\theta}(R_a,\theta,z,t)=0\\
&\psi(R_a,\theta,z,t)=\psi_a(\theta,z,t)\ \text{یا}\ D_r(R_a,\theta,z,t)=D_a(\theta,z,t)
\end{aligned} \qquad (۱٤)$$

و

$$\sigma_r(R_b,\theta,z,t)=-p_b(\theta,z,t)$$
$$\tau_{rz}(R_b,\theta,z,t)=0 \qquad (۱۵)$$
$$\tau_{r\theta}(R_b,\theta,z,t)=0$$
$$\psi(R_b,\theta,z,t)=\psi_b(\theta,z,t) \text{ یا } D_r(R_b,\theta,z,t)=D_b(\theta,z,t)$$

در این روابط شرایط $D_r$ و $\psi$، بترتیب برای حالتهایی است که اثرات مستقیم (سنسوری) و غیر مستقیم (عملگری) پیزوالکتریک مدنظر باشد.

## ۳- حل معادلات حرکت

با درنظرگرفتن مؤلفه‌های جابجایی و پتانسیل الکتریکی بصورت روابط (۱٦) تا (۱۹) شرایط مرزی تکیه گاهی برآورده می‌شوند.

$$u_r=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_r(r,t)\sin(b_m\theta)\sin(b_n z) \qquad (۱٦)$$

$$u_\theta=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_\theta(r,t)\cos(b_m\theta)\sin(b_n z) \qquad (۱۷)$$

$$u_z=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_z(r,t)\sin(b_m\theta)\cos(b_n z) \qquad (۱۸)$$

$$\psi=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_\psi(r,t)\sin(b_m\theta)\sin(b_n z) \qquad (۱۹)$$

با جاگذاری روابط (۱٦) تا (۱۹) در رابطه ماتریسی (۱۱)، این دستگاه معادلات از حالت پاره‌ای جفت شده بفرم پاره‌ای مجزا در خواهد آمد. با بازنویسی دستگاه معادلات بشکل ماتریسی، می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} L^*_{1r} & L^*_{1\theta} & L^*_{1z} & L^*_{1\psi} \\ L^*_{2r} & L^*_{2\theta} & L^*_{2z} & L^*_{2\psi} \\ L^*_{3r} & L^*_{3\theta} & L^*_{3z} & L^*_{3\psi} \\ L^*_{4r} & L^*_{4\theta} & L^*_{4z} & L^*_{4\psi} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varphi_r\\ \varphi_\theta\\ \varphi_z\\ \varphi_\psi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\rho\ddot{\varphi}_r\\ \rho\ddot{\varphi}_\theta\\ \rho\ddot{\varphi}_z\\ 0\end{Bmatrix} \qquad (۲۰)$$

عملگرهای $L^*_{ij}$ استفاده شده در این رابطه در مرجع [٤] داده شده است. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل یاد شده از روش اجزاء محدود مبتنی بر روش گالرگین استفاده می‌شود. توابع میانیاب مرتبه دوم $\phi_r$، $\phi_\theta$، $\phi_z$، $\phi_\psi$، $\ddot{\phi}_r$، $\ddot{\phi}_\theta$، $\ddot{\phi}_z$ و $\ddot{\phi}_\psi$ بصورت روابط (۲۱) و (۲۲) است:

$$\phi_s=\begin{bmatrix}N_i & N_j & N_k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_{si}\\ \phi_{sj}\\ \phi_{sk}\end{Bmatrix}, s=r,\theta,z,\psi \qquad (۲۱)$$

$$\ddot{\phi}_s=\begin{bmatrix}N_i & N_j & N_k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\phi}_{si}\\ \ddot{\phi}_{sj}\\ \ddot{\phi}_{sk}\end{Bmatrix}, s=r,\theta,z,\psi \qquad (۲۲)$$

توابع شکل مرتبه دوم $N_i$، $N_j$ و $N_k$ بترتیب بصورت روابط (۲۳)-(۲۵) تعریف می‌شوند:

$$N_i(r)=\frac{(r-r_k)(2r-r_k-r_i)}{(r_k-r_i)^2} \qquad (۲۳)$$

$$N_j(r)=4\frac{(r_k-r)(r-r_i)}{(r_k-r_i)^2} \qquad (۲٤)$$

$$N_k(r)=\frac{(r-r_i)(2r-r_k-r_i)}{(r_k-r_i)^2} \qquad (۲۵)$$

همانگونه که دیده می‌شود، هر المان سه گره دارد و به ازای هر گره نیز ٤ درجه آزادی وجود دارد ، لذا برای هر المان ۱۲ درجه آزادی وجود خواهد داشت. با ضرب اولین تابع شکل، یعنی $N_i$ ، در اولین معادله دیفرانسیل دستگاه (۲۰)، و یکبار انتگرالگیری جزء به جزء روی المان، شکل ضعیف شده معادله بدست می‌آید، که عبارت است از:

$$\begin{aligned}&m_1\ddot{\phi}_{ir}+m_2\ddot{\phi}_{i\theta}+m_3\ddot{\phi}_{iz}+m_4\ddot{\phi}_{i\psi}+m_5\ddot{\phi}_{jr}+\\ &m_6\ddot{\phi}_{j\theta}+m_7\ddot{\phi}_{jz}+m_8\ddot{\phi}_{j\psi}+m_9\ddot{\phi}_{kr}+m_{10}\ddot{\phi}_{k\theta}+\\ &m_{11}\ddot{\phi}_{kz}+m_{12}\ddot{\phi}_{k\psi}+k_1\phi_{ir}+k_2\phi_{i\theta}+k_3\phi_{iz}+\\ &k_4\phi_{i\psi}+k_5\phi_{jr}+k_6\phi_{j\theta}+k_7\phi_{jz}+k_8\phi_{j\psi}+\\ &k_9\phi_{kr}+k_{10}\phi_{k\theta}+k_{11}\phi_{kz}+k_{12}\phi_{k\psi}=F_1\end{aligned} \qquad (۲٦)$$

توجه شود که این معادله جبری فقط مربوط به گره $i$ ام المان است. برای گرههای $j$ ام و $k$ ام کافی است در فرایند یاد شده بجای تابع وزن $N_i$ بترتیب از $N_j$ و $N_k$ استفاده شود. برای تشکیل معادله ماتریسی تعادل المان نیاز است عملیات گفته شده روی بقیه معادلات دستگاه تکرار گردد. پس از اتمام عملیات، معادله ماتریسی (۲۷) حاصل خواهد شد.

$$[M]_e\{\ddot{X}\}_e+[K]_e\{X\}_e=\{F\}_e \qquad (۲۷)$$

که $[M]_{12\times12}$، $[K]_{12\times12}$، $\{F\}_{12}$، بترتیب ماتریس‌های جرم و سختی و بردار نیروی یک المان غیر مرزی می‌باشند .همچنین:

$$\{X\}_e^T=\{\varphi_{ri},\varphi_{\theta i},\varphi_{zi},\varphi_{\psi i},\varphi_{rj},\varphi_{\theta j},\varphi_{zj},\varphi_{\psi j},\varphi_{rk},\varphi_{\theta k},\varphi_{zk},\varphi_{\psi k}\}$$

$$\{\ddot{X}\}_e^T=\{\ddot{\varphi}_{ri},\ddot{\varphi}_{\theta i},\ddot{\varphi}_{zi},\ddot{\varphi}_{\psi i},\ddot{\varphi}_{rj},\ddot{\varphi}_{\theta j},\ddot{\varphi}_{zj},\ddot{\varphi}_{\psi j},\ddot{\varphi}_{rk},\ddot{\varphi}_{\theta k},\ddot{\varphi}_{zk},\ddot{\varphi}_{\psi k}\}$$

با اعمال شرایط مرزی (۱٤) و (۱۵) روی اولین و آخرین گره (سطوح داخلی و خارجی پانل) و حل معادلات بدست آمده برای متغیرهای گره‌های مرزی، متغییرهای مرزی مي‌توانند بر حسب توابعی جبری از متغیرهای گره‌های همسایه‌شان بیان شوند. از اینرو اگر متغیرهای گره واقع روی سطح داخلی $\phi_{r1}$، $\phi_{\theta1}$، $\phi_{z1}$، $\phi_{\psi1}$ و $\ddot{\phi}_{r1}$، $\ddot{\phi}_{\theta1}$، $\ddot{\phi}_{z1}$، $\ddot{\phi}_{\psi1}$ باشند، مي‌توانند بترتیب‌برحسب $\phi_{r2}$، $\phi_{\theta2}$، $\phi_{z2}$، $\phi_{\psi2}$، $\phi_{r3}$، $\phi_{\theta3}$، $\phi_{z3}$، $\phi_{\psi3}$، $P_a$، $\psi_a$ و $\ddot{\phi}_{r2}$، $\ddot{\phi}_{\theta2}$، $\ddot{\phi}_{z2}$، $\ddot{\phi}_{\psi2}$، $\ddot{\phi}_{r3}$، $\ddot{\phi}_{\theta3}$، $\ddot{\phi}_{z3}$، $\ddot{\phi}_{\psi3}$، $\ddot{P}_a$، $\ddot{\psi}_a$ بیان شوند. همچنین

اگر متغییرهای گره واقع روی سطح خارجی $\phi_{rML}$ ، $\phi_{\theta ML}$ ، $\phi_{zML}$ ، $\phi_{\psi ML}$ و $\ddot{\phi}_{rML}, \ddot{\phi}_{\theta ML}, \ddot{\phi}_{zML}, \ddot{\phi}_{\psi ML}$ باشد، مي‌توان آنها را بترتیب برحسب $\phi_{r(ML-2)}$ ، $\phi_{\theta(ML-2)}$ ، $\phi_{z(ML-2)}$ ، $\phi_{\psi(ML-2)}$ ، $\phi_{r(ML-1)}$ ، $\phi_{\theta(ML-1)}$ ، $\phi_{z(ML-1)}$ ، $\phi_{\psi(ML-1)}$ ، $P_b$ ، $\psi_b$ و $\ddot{\phi}_{r(ML-2)}$ ، $\ddot{\phi}_{\theta(ML-2)}$ ، $\ddot{\phi}_{z(ML-2)}$ ، $\ddot{\phi}_{\psi(ML-2)}$ ، $\ddot{\phi}_{r(ML-1)}$ ، $\ddot{\phi}_{\theta(ML-1)}$ ، $\ddot{\phi}_{z(ML-1)}$ ، $\ddot{\phi}_{\psi(ML-1)}$ ، $\ddot{P}_b$ ، $\ddot{\psi}_b$ بیان کرد.

با جاگذاری معادلات متغییرهای مربوط به گره‌های مرزی در رابطه (۲۷)، معادله تعادل اجزاء محدود المانهای مرزی بدست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} &[M]_1\{\ddot{X}\} + [K]_1\{X\}_1 = \{F\}_1, \\ &[M]_{ML}\{\ddot{X}\} + [K]_{ML}\{X\}_{ML} = \{F\}_{ML} \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

با مونتاژ معادلات (۲۷)و(۲۸)، معادله تعادل اجزاء محدود کلی سیستم بدست می‌آید:

$$[M]\ \{\ddot{X}\}\ + [K]\ \{X\}\ = \{F\} \qquad (۲۹)$$

پس از تشکیل معادله ماتریسی شماره (۲۸) نیاز است با یکی از روشهای انتگرالگیری زمانی موجود به حل آن پرداخته شود.

در اینجا ، برای حل این دستگاه از روش ضمنی نیومارک[۱۱] استفاده شده است ( این روش در کتابهای پایه محاسبات عددی بصورت جزئي‌تر آمده است).

## ٤- نتایج عددی و بحث پیرامون آن

برای بررسی نتایج روش استفاده شده، یک پانل استوانه‌ای با زاویه دهنه $\alpha = \pi/۳$ طول $L = R_m =$۱ و نسبت شعاع متوسط به ضخامت ٤ که در جهت شعاع پلاریزه شده و روی تکیه گاههای ساده قرار دارد انتخاب شده است. در این مثال فقط خاصیت عملگری پیزوالکتریک مد نظر است. بطوریکه پانل تحت بار مکانیکی متغیر با زمان قرار داشته و پتانسیل الکتریکی سطوح داخلی و خارجی برابر صفر است. در این حالت شرایط مرزی (١٤) و (١٥) را می‌توان بصورت رابطه (٣٠) نوشت:

$$\begin{aligned} &\psi_a(\theta,z,t) = \psi_b(\theta,z,t) = p_a(\theta,z,t) = 0 \\ &p_b(\theta,z,t) = p_0(t)\sin(\pi\theta/\alpha)\sin(\pi z/L) \end{aligned} \qquad (۳۰)$$

تابع بار فشاری روی سطح خارجی بصورت زیر انتخاب می‌شود. علت انتخاب این تابع بخاطر آن است که با تغییر ثابت زمانی $c$ بار وارده روی پانل از شبه استاتیکی تا پله مي تواند تغییر کند.

$$p_0(t) = q_0(1 - e^{-ct}) \qquad (۳۱)$$

در شکل (۲) این تابع بازای مقادیر $q_0$ =۱۶/$\pi^۲$ و $c$ برابر ۵۰۰۰ (برثانیه) ترسیم شده است.

ماده پیزوالکتریک انتخاب شده الاستیک و ارتوترپ است. ثابت‌های مربوط به این نوع پیزوالکتریک، مانند ثابت‌های الاستیک، پیزوالکتریک و دی الکتریک در جدول (۱) آمده است. نتایج عددی ارائه شده در شکل‌های(۳) الی (۱۲) همگی توسط روابط (۳۳) بی‌بعد شده است.

$$(u_r^*, u_\theta^*, u_z^*) = \frac{100Y}{HS^4 q_0}(u_r, u_\theta, u_z),\ \psi^* = \frac{|d|Y}{HS^2 q_0}\psi$$

$$(\sigma_r^*, \sigma_\theta^*, \sigma_z^*, \tau_{\theta z}^*, \tau_{rz}^*, \tau_{r\theta}^*) = \frac{(S^2\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, S\tau_{\theta z}, S\tau_{rz}, S\tau_{r\theta})}{S^2 q_0}$$

$$Dimensionless \quad time = \frac{t}{H}\sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (۳۲)$$

که در این روابط $Y$ =۵۰ (گیگا پاسکال) و $d$ =-۳۰۰×۱۰$^{-۱۲}$ (کولمب بر نیوتن) بترتیب مدول الاستیسیته و ثابت پیزوالکتریک در جهت شعاع هستند. زمان بي بعد نیز طبق تعریف (۳۲) عبارت است از نسبت زمان به مدت زمانی که موج الاستیک نیاز دارد تا یکبار ضخامت پانل را طی نماید. پارامترهای هندسی و بی‌بعد پانل بقرار(۳۳) زیر است:

$$S = R_m / H,\ H = R_b - R_a,\ R_m = (R_a + R_b)/2 \qquad (۳۳)$$

جدول (۱): ثابت‌های الاستیک، پیزوالکتریک و دی‌الکتریک PZT4 [۷]

| Modulii | PZT4 | Unit | Modulii | PZT4 | Unit |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_{11}$ | ۱۳۸/۵ | $GPa$ | $e_{15}$ | ۱۲/۷ | $C/m^2$ |
| $C_{22}$ | ۱۳۸/۵ | $GPa$ | $e_{24}$ | ۱۲/۷ | $C/m^2$ |
| $C_{33}$ | ۱۱۴/۷ | $GPa$ | $e_{31}$ | -۵/۲ | $C/m^2$ |
| $C_{44}$ | ۲۵/۶ | $GPa$ | $e_{32}$ | -۵/۲ | $C/m^2$ |
| $C_{55}$ | ۲۵/۶ | $GPa$ | $e_{33}$ | ۱۵/۱ | $C/m^2$ |
| $C_{66}$ | ۳۰/۶ | $GPa$ | $\eta_{11}$ | ۱۳/۱ | $nF/m$ |
| $C_{12}$ | ۷۷/۴ | $GPa$ | $\eta_{22}$ | ۱۳/۱ | $nF/m$ |
| $C_{13}$ | ۷۳/۶ | $GPa$ | $\eta_{33}$ | ۱۱/۵ | $nF/m$ |
| $C_{23}$ | ۷۳/۶ | $GPa$ | $\rho$ | ۷۵۰۰ | $kg/m^3$ |

برای ادامه حل لازم است که بار خارجی وارده بصورت بسط نیم سینوسی سری فوریه دوگانه بیان شود، اما از آنجاکه توزیع بار درنظر گرفته شده روی سطح خارجی پانل نیم سینوسی است (۳۰)، کلیه جملات سری مگر جمله اول آن در بسط و در نتیجه در حل پدیدار نمی‌شود.

در این میان قبل از ارائه نتایج، روش استفاده شده در اینجا بکمک حل انجام شده توسط رن (Ren) مورد ارزیابی قرار مي‌گیرد. از آنجاکه حل رن [۸] برای پانل استوانه‌ای ارتوتروپ با طول نامحدود تحت بار استاتیکی است به منظور نزدیک شدن حل دینامیکی ارائه شده به حل یاد شده بایستی شرایط خاصی

لحاظ گردد. بدین منظور از اعدادی خیلی کوچک برای ثابت‌های پیزوالکتریک و دي‌الکتریک (برای حذف خاصیت پیزوالکتریکی و برقرار نمودن کوپلینگ ضعیف) و ثابت زمانی واحد (جهت میل بارگذاری دینامیکی به بارگذاری شبه استاتیکی) و انتخاب یک طول بزرگ برای پانل ( برای نزدیک شدن به طول بینهایت و خمش استوانه‌ای) استفاده شده است:

$Y_r : Y_\theta : Y_z : G_{r\theta} : G_{\theta z} : G_{zr} =$ ۱ :۲۵ :۱ :۰/۵ :۰/۵ :۰/۲

$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} =$ -۱۰×۱۰<sup></sup>

$\nu_{\theta r} = \nu_{\theta z} = \nu_{rz} =$ ۰/۲۵

$e_{24} = e_{15} = 0,\ e_{31} = e_{32} = e_{33} =$ ۱۰ $^{-10}\, Cm^{-2}$

$L$=۱۰۰۰ $R_m$ ، $R_m$=۱ ، $\alpha = \pi/3$ ، $c$=۱

نتایج بدست آمده ضمن مقایسه بـا حـل رِن در جـدول (۲) داده شده است. همخوانی نتایج حاصل از این روش بـرای پانـل‌هـای نازک ($S$ =۵۰۰) و ضخیم ($S$ =۲) بیانگر درستی روش ارائه شده در این مقاله است. البته میزان خطایی کـه در ایـن جـدول دیـده می‌شود بخاطر کم بودن تعداد المان در راستای ضخامت است. ( در اینجا از ۱۰ المان استفاده شده است)

جدول (۲): مقایسه حل ارائه شده با حل Ren [۸] در حالت استاتیکی

| $S = R_m / H$ | 2 | 2 | 500 | 500 |
|---|---|---|---|---|
| | Present | Ren(1987) | Present | Ren(1987) |
| $\tilde{u}(\alpha/2,0)$ | 8.634 | 9.986 | 0.4914 | 0.749 |
| $\tilde{\sigma}_\theta(\alpha/2,-H/2)$ | -2.123 | -2.455 | -0.461 | -0.752 |
| $\tilde{\sigma}_\theta(\alpha/2,+H/2)$ | 1.627 | 1.907 | 0.459 | 0.750 |
| $\tilde{\sigma}_z(\alpha/2,-H/2)$ | -0.0212 | -0.0245 | -0.0044 | -0.0075 |
| $\tilde{\sigma}_z(\alpha/2,+H/2)$ | 0.07881 | 0.0816 | 0.0048 | 0.0075 |
| $\tilde{\tau}_{r\theta}(0,0)$ | 0.443 | 0.555 | 0.343 | 0.563 |

در شکل‌های (۳) الی (۱۱) تاریخچه زمانی مؤلفه‌های جابجایی مکانیکی، پتانسیل الکتریکی و مؤلفه‌های تنش مربوط به سه نقطه خارجی ( ۰/۵= ξ)، میانی (۰ =ξ) و داخلی ( ۰/۵-= ξ) پانل داده شده است ( $\xi = (r - R_m)/H$ ضخامت بدون بعد است). در هر یک از این نمودارها نقاطی از پانل انتخاب شده است که مقادیر غیر صفر دارند. شکل (۳) جابجایی شعاعی پانل را در نقطة ($L$/۲، $\alpha$/۲) واقع روی سطوح خارجی میانی و داخلی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که این منحنی رفتاری سینوسی داشته و حدوداً پس از ده بار رفت و برگشت موج در ضخامت پانل به حداکثر جابجايي شعاعی می‌رسد. با اندازه‌گیری فاصله دو قله نوسانات پانل که حدوداً پانزده (زمان بی‌بعد) است فرکانس پایه ارتعاشات طبیعی پانل برابر ٦٩٠ بر ثانیه خواهد بود.

در شکل (٤) و (٥) بترتیـب تاریخچـه زمـانی جابجـایی محیطـی نقطـه ($L$/۲، ۰) و جابجـایی محـوری نقطـه ($L$، $\alpha$/۲) داده شـده است.این دو کمیت نیز مانند جابجایی شعاعی، رفتاری سینوسی از خود نشان می‌دهند. همانگونـه کـه ملاحظـه مـي‌شـود میـزان جابجايي محیطی سطح داخلی از سـطوح میـانی و خـارج بطـور قابل ملاحظـه‌ای بزرگتـر اسـت. امـا جابجـايي محیطـی سـطوح مختلف پانل نسبت به جابجايي محیطی رفتاری متفاوت از خـود نشان مي‌دهند. بطوریکه در این حالت حرکت سـطوح خـارجی و داخلی مخالف جهت هم حرکت مي‌کنند.

تغییرات پتانسیل الکتریکی با زمان در نقطه ($L$/۲، $\alpha$/۲) در شکل (٦) نشان داده شده است. تغییرات این کمیت نیز مانند جابجـایی شعاعی و محیطی سینوسی اسـت. همانگونـه کـه در ایـن شـکل نشان داده شده است پتانسیل الکتریکی مربوط به سطوح داخلی و خارجی پانل صفر است و این امر بیانگر برآورده شدن کامـل و دقیق شرایط مرزی اعمال شده است.

تاریخچـه زمـانی تـنش شـعاعی نقطـه ($L$/۲، $\alpha$/۲) در شـکل (۷) نشان داده شده است. همانگونه کـه مـشاهده مـی‌شـود ، مقـدار تنش شعاعی ابتدا بطور ناگهانی افـزایش وسـپس بـه آرامـی بـا گذشت زمان افزایش می‌یابد. افزایش تدریجی یاد شده همراه بـا نوساناتی است که فرکانس آن از فرکانس نوسانات مربـوط بـه مؤلفه‌های جابجایی و پتانسیل الکتریکی به اندازۀ قابـل توجـه‌ای بزرگتر است. دیده می‌شود که پوش یـا میـانگین ایـن نوسـانات منحنی‌ای ایجاد می‌کند که از هر جهت مشابه بار خـارجی وارده است. همچنین مقدار این مؤلفه تنش در سطح میـانی نزدیـک بـه نصف بار خارجی وارده اسـت. همانگونـه کـه انتظـار مـي‌رفـت سطح داخلی بدون تـنش و مقـدار تـنش شـعاعی در نقطـه ($L$/۲، $\alpha$/۲) روی سطح خارجی، همان تابع بارگـذاری اعمـال شـده در شرایط مرزی است.

تغییرات مؤلفه های تـنش محیطـی و محـوری نـسبت بـه زمـان بترتیـب در شـکل‌هـای (۸) و(۹) نـشان داده شـده اسـت. ایـن نمودارهـا بـرای نقطـه ($L$/۲، $\alpha$/۲) واقـع روی سـطح میـانی و همچنـین سـطوح داخلـی و خـارجی نـشان داده شـده اسـت. همانگونه که ملاحظه می‌شود ایـن مؤلفـه‌هـای تـنش در سـطوح داخلی و خارجی بـا نوسـانات سینوسـی همـراه بـوده و حالـت تنشی عکس نسبت به هم دارند( سطح خـارجی کـشش و سـطح داخلی فشار و یا بلعکس) و درضمن مقدار ایـن دو مؤلفـه تـنش روی سطح میانی نسبت به سطوح داخلی و خارجی ناچیز است.

تغییرات تنش برشی در صفحه و تنش برشی عرضی، بـا زمـان برای نقاط ($L$، $\alpha$) و (۰، $\alpha$/۲) واقع روی سطوح داخلـی، میـانی و خارجی در شکلهای (۱۰) و (۱۱) نشان داده شده است. تغییرات این نمودارها نسبت به زمان مشابه هـم اسـت و هـردو رفتـاری سینوسی دارند. همانگونه که دیده مي‌شـود، روی سـطح میـانی

مقدار تنش برشی عرضی از تنش برشی در صفحه بزرگتر است. همچنین همانگونه که انتظار می‌رفت روی سطوح خارجی و داخلی مقدار تنش برشی عرضی صفر است.

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله بررسی پاسخ دینامیکی پانل پیزوالکتریک تحت بارفشاری خارجی از روش نیمه تحلیلی ارائه شده است. پانل مزبور دارای طول محدود ، ارتوتروپیک و در جهت شعاعی پلاریزه شده است. همانگونه که در مراجع [۵و۶] نشان داده شده است، توزیع جابجایی‌های مکانیکی وپتانسیل الکتریکی مواد پیزوالکتریک بسیار پیچیده است و نمی‌توان مانند مواد الاستیک و فرض تغییرات خطی جابجایی و پتانسیل الکتریکی در جهت ضخامت به بررسی آنها پرداخت.از اینرو، آنالیز سه بعدی رفتار سازه‌های ساخته شده از مواد پیزوالکتریک حتی در حالتی که ضخامت آنها بسیار کم است سفارش می‌گردد.

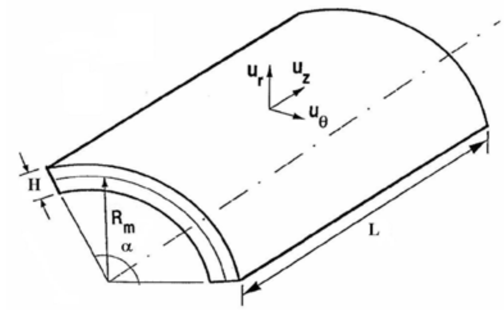
از آنجاکه هنوز مطالعة دقیق و همه جانبه‌ای از پاسخ دینامیکی سازه‌های پیزوالکتریک در دسترس نیست، مطالعة حاضر به شناسایی رفتارهای دینامیکی ، مکانیکی و الکتریکی این مواد هوشمند کمک می‌کند.نتایج این مقاله همچنین برای ارزیابی آنالیزهای دینامیکی تقریبی نیز مفید است.نتایج حاصل از این تحقیق، با توجه به بار وارده ، به طور خلاصه عبارتند از:

– روش ارائه شده در این مقاله مناسب تحلیل دینامیکی پانل استوانه‌ای پیزوالکتریک است و شرایط مرزی در این روش برآورده مي‌شود.

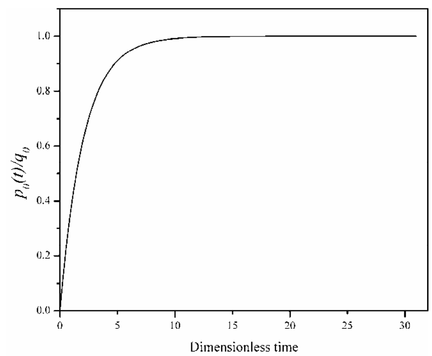
– کلیه مؤلفه‌های جابجایی ، اعم از شعاعی ،محیطی، محوری و پتانسیل الکتریکی رفتاری سینوسی دارند.

– از میان مؤلفه‌های تنش ، تنها تنش شعاعی روی سطح میاني رفتار سینوسی نداشته و با نوسانات محلی همراه است.

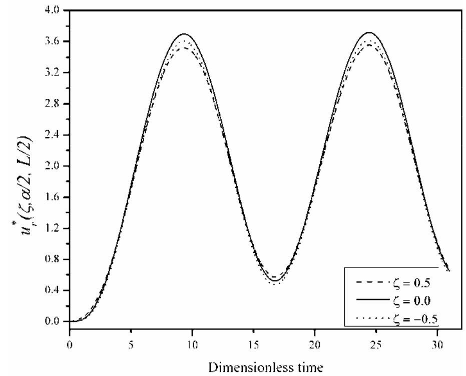
پوش منحنی مؤلفه تنش شعاعی مشابه بار وارده روی پانل و از آن کمتر است.



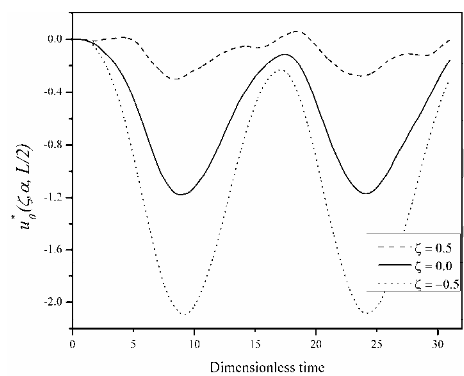

شکل (۱): مشخصاتپانل استوانه ای با تکیه گاه ساده



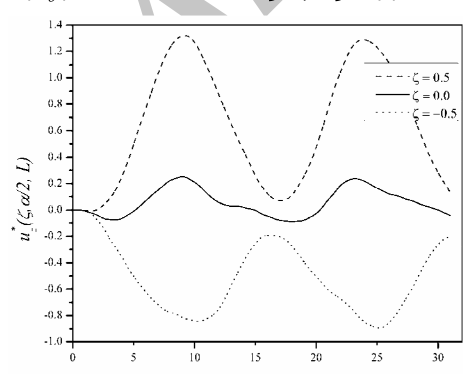

شکل (۲): فشاری اعمال شده روی سطح خارجی پانل با زمان.



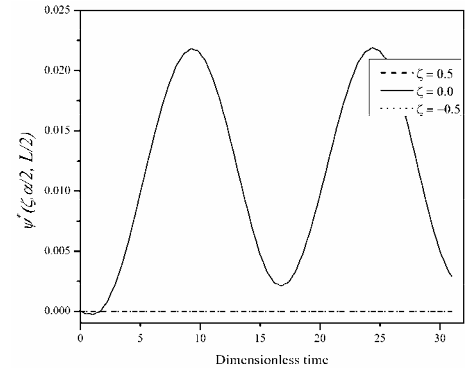

شکل (۳): تاریخچه زمانی جابجایی شعاعی ($u_r^*$)



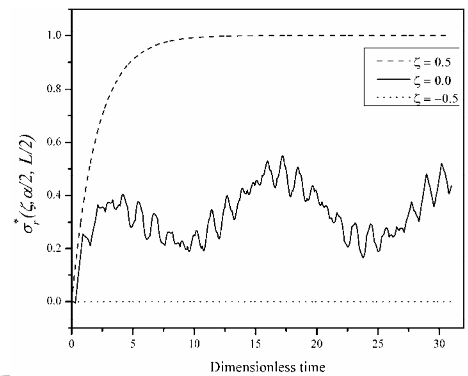

شکل (٤): تاریخچه زمانی جابجایی محیطی ($u_\theta^*$)



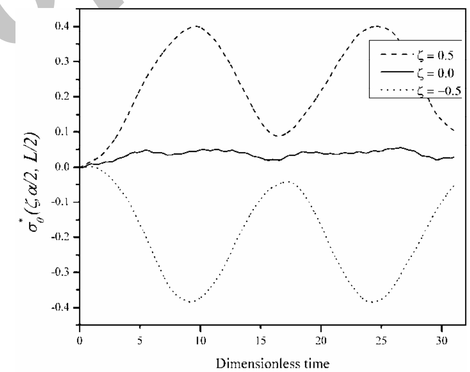

شکل (۵): تاریخچه زمانی جابجایی محوری ($u_z^*$)



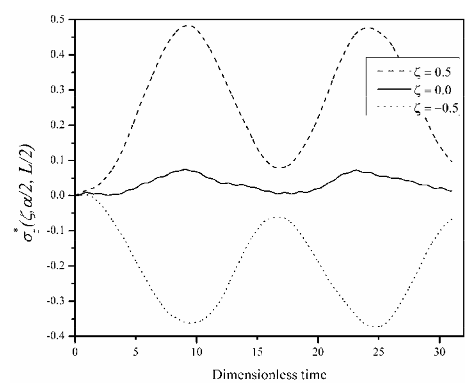

شکل (٦): تاریخچه زمانی پتانسیل الکتریکی ( $\psi^*$ )



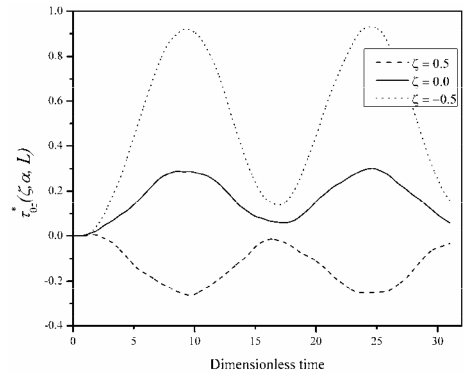

شکل (٧): تاریخچه زمانی تنش شعاعی ( $\sigma_r^*$ )



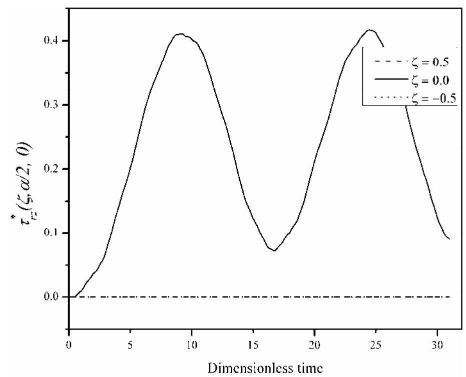

شکل (٨): تاریخچه زمانی تنش محیطی ( $\sigma_\theta^*$ )




شکل (٩):تاریخچه زمانی تنش محوری ( $\sigma_z^*$ )




شکل (١٠):تاریخچه زمانی تنش برشی در صفحه ( $\tau_{\theta z}^*$ )




شکل (١١):تاریخچه زمانی تنش برشی عرضی ( $\tau_{rz}^*$ )

## ٦- مراجع


[١] Crawley, F. E.; "*Intelligent structures for aerospace: a technology overview and assessment*", AIAA J. vol.32: 1689-1700, 1994.

[٢] Dumir, P. C.; Dube, G. P.; Kapuria, S.; "*Exact piezoelastic solution of simply supported orthotropic circular cylindrical panel in cylindrical bending*", Int. J. Solids Structure. vol.34 (6): 685-702, 1997.

[٣] Chen, C. Q.; Shen, Y. P.; "*Piezothermoelasticity analysis for a cylindrical shell under the state of axisymmetric deformation*", Int. J. Engng Sci.Vol.34 (14):1585-600, 1996.

[٤] Shakeri, M.; Sedighi, M. R.; Daneshmehr, A. R.; "*Three dimensional elasticity solution of single layer piezoelectric panel*", vol. 8(2): 26-41, 2008.

[٥] Shakeri, M.; Alibiglu, A.; Eslami, M. R.; "*Elasticity solution for thick laminated anisotropic cylindrical panels under dynamic load*", J. Mech. Eng. Sci. (ImechE), vol.216 Part C, PP.315-324, 2002.

[٦] Shakeri, M., Daneshmehr, A. R. and Alibiglu, A.; "*Elasticity solution for thick laminated shell panel with piezoelectric layer*", EASEC-9 Conf., Bali, Indonesia, 2003.

[٧] Wu X. H.; Shen, Y. P. and Chen, C. Q.; "*An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensors or actuators*", Materials Letters vol.57 :3532-3542, 2003.

[٨] Ren, J. G.; "*Exact solution for laminated cylindrical shells in cylindrical bending*", Comp. Sci. Tech. vol.29 :196-187, 1987.

## ۷- زیرنویس ها

---

[۱] Direct effect
[۲] Inverse effect
[۳] Electromechanical sensor
[٤] Electromechanical actuator
[٥] Distributed
[٦] Patch
[۷] Polarized
[۸] Galerkin
[۹] Weak form
[۱۰] Navier
[۱۱] Newmark Implicit Method