# تحليل مخازن استوانه‌اي ساخته شده از مواد هدفمند (FGMs) تحت بارهاي مكانيكي و حرارتي

مسعود طهانی[i]، طاها طالبیان[ii]

## چکیده

در اين مقاله به تحليل استاتيكي مخازن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارهاي مكانيكي و حرارتي متقارن محوري پرداخته شده است. توزيع خواص مكانيكي مواد در راستای ضخامت پيوسته و به‌صورت تابع توزيع توانی در نظر گرفته شده است. براي حل معادلات از روش اجزاء محدود دوبعدي استفاده شده است. به‌منظور دستيابي به مدل اجزاء محدود دقيق استوانه با توزيع پيوسته و دلخواه خواص مكانيكي در راستاي ضخامت و اجتناب از محدوديت در نسبت شعاع به ضخامت، المان خاص تعريف شده است. بارگذاري مكانيكي به‌صورت فشار داخلي در استوانه‌ی دو سر گيردار و بارگذاري حرارتي به‌صورت اختلاف دما در راستاي ضخامت استوانه‌ی دو سر تكيه گاه ساده در نظر گرفته شده است. نتايج نشان مي‌دهد كه توزيع تنش در مخازن استوانه‌اي ساخته شده از مواد هدفمند، به نوع مواد و نحوه‌ی توزيع خواص آن وابسته است كه مي‌توان از آنها براي كنترل توزيع تنش و دما استفاده نمود.

## كلمات كليدي

مواد هدفمند، مخزن استوانه‌اي، روش اجزاء محدود، بارگذاري مكانيكي، بارگذاري حرارتي

# *Analysis of Functionally Graded Cylindrical Vessels under Mechanical and Thermal Loads*

M. Tahani, T. Talebian

***ABSTRACT***

In this paper, a static analysis of functionally graded cylinders under axisymmetric mechanical and thermal loads is presented. It is assumed that the distribution of material properties through the thickness of the cylinder is continuous and graded according to a power low distribution. For solving equations, two-dimensional finite element method is employed. To this end, a functionally graded material element is defined for accurate finite element modeling of cylinder with continuous distribution of material properties and avoiding the limitation in the radius to thickness ratio. Numerical results are obtained for a clamped cylinder subjected to a uniform internal pressure and a simply supported cylinder subjected to a temperature distribution through the thickness. In addition, the numerical results for thick and thin cylinders are obtained. The results show that the stress and temperature distribution in functionally graded cylindrical shells are dependent on the material kind and distribution of material properties and this dependency can be utilized for controlling the stress level.

***KEYWORDS***

i دانشيار دانشگاه فردوسی مشهد - دانشكده مهندسي - گروه مكانيك: Email: mtahani@ferdowsi.um.ac.ir
ii دانشجوی دکتری دانشگاه فردوسی مشهد - دانشكده مهندسي - گروه مكانيك: Email: taha_talebian@yahoo.com

Functionally graded materials, Cylindrical vessels, Finite element method, Mechanical loading, Thermal loading

## ۱- مقدمه

مواد هدفمند (Functionally Graded Materials)، مواد مرکب غير همگني هستند که از دو يا چند ماده مختلف تشکيل شده و ترکيب يا درصد حجمي اجزاء تشکيل دهنده به‌طور پيوسته و به‌عنوان تابع موقعيت در امتداد يک يا دو بعد خاص متغير است. در نتيجه خواص و ساختار آنها به‌طور پيوسته در امتداد همان ابعاد تغيير خواهد کرد. بيشتر ورق‌هاي ساخته شده از مواد هدفمند که به‌عنوان سد حرارتي در دماهاي بسيار بالا مورد استفاده قرار مي‌گيرند، مخلوطي از سراميک و فلز هستند. به‌طوري که سطح سراميکي داراي مقاومت حرارتي بالا در سمتي قرار مي‌گيرد که دماي آن بسيار بالا است و سطح فلزي داراي استحکام مکانيکي مناسب در سمتي قرار مي‌گيرد که دماي آن پايين است و بين دو سطح تغييرات تدريجي پيوسته در درصد حجمي سراميک- فلز صورت مي‌گيرد. از مزاياي ديگر مواد هدفمند استفاده از آنها به‌عنوان فصل مشترک دو ماده متفاوت است. اين کار باعث مي‌شود که مقاومت اتصال بهبود يافته، تنش‌هاي پسماند کاهش يافته و توزيع تنش يکنواخت‌تر شود. تغييرات تدريجي و پيوسته‌ی اين مواد، آنها را براي محيط‌ها و کاربردهاي متفاوت قابل استفاده مي‌سازد. به همين دليل در سال‌هاي اخير استفاده از مواد هدفمند در محيط‌هاي با دماي بسيار بالا مانند راکتورهاي هسته‌اي، کارخانجات شيميايي و نيز در ساخت سفينه‌هاي فضايي سرعت بالا، اهميت بسيار زيادي پيدا کرده است.

مسائل مواد نا همگن، منجر به معادله‌های دیفرانسیل جزئی با ضرايب متغيير مي‌شود که در حالت کلی نمي‌توان برای آنها حل تحليلي پيدا نمود. بنابراين از انواع روش‌های تحليلی و عددی برای حل این‌گونه مسائل استفاده می‌شود. به‌عنوان چند نمونه، Tutuncu و Ozturk [۱] حل تحلیلی تنش و تغيير شکل مخازن استوانه‌ای و کروی FGM تحت فشار داخلی را مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که بيشتر شدن سفتي يا مدول الاستسيته در نزديکي سطح داخلي باعث کاهش تنش در راستاي ضخامت استوانه مي‌شود. Chan و Horgan [۲] سيلندرها و ديسک‌های تو خالی FGM با طول محدود تحت فشار داخلی را مورد بررسی قرار دادند. Jabbari و همکارانش [۳] مسائل تنش حرارتی حالت پایدار و تک بعدی را برای سيلندرهای FGM جدار ضخيم تحلیل نمودند. آنها تنش‌های حرارتی و مکانيکی را با حل مستقيم معادلات به‌دست آوردند.

همچنين Jabbari و همکارانش [٤] حالت نامتقارن مسئله قبل را مورد بررسي قرار دادند. آنها اين تحليل را با بسط فوريه توزيع دما و جابه‌جايي انجام دادند. Awaji و Sivakuman [٥] توزيع تنش و دماي گذرا و پايدار در استوانه‌هاي FGM تو خالي را بررسي کردند. Liew و Kitipornchai [٦] به تحليل رفتار ترمومکانيکي سيلندرهاي توخالي FGM پرداختند. آنها استوانه‌ی FGM را به چند استوانه‌ي همگن مجزا با ضخامت کمتر تقسيم کرده و با برقراري شرط پيوستگي تنش‌ها و جابه‌جايي‌ها در سطح مشترک استوانه‌ها، توزيع تنش و جابه‌جايي را به‌دست آوردند. آنها نشان دادند که با ازدياد تعداد لايه‌ها تقريب خوبي از استوانه FGM به‌دست مي‌آيد. بدين ترتيب بدون نياز به حل معادلات ماده‌ی غيرهمگن، مي‌توان رفتار استوانه FGM را مورد مطالعه قرار داد. Shakeri و همکارانش [٧] و Hoseini و همکارانش [٨] نيز به همين شيوه به تحليل ديناميکي استوانه‌هاي FGM جدار ضخيم پرداختند. ايشان به منظور حل معادلات بدست آمده در هر استوانه همگن مجزا از روش اجزا محدود بهره گرفتند.Oral و Anlas [٩] توزيع تنش در استوانه‌هاي FGM غير ايزوتروپيك را مورد بررسي قرار دادند. آنها نشان دادند که با توزيع مناسب و پيوسته مواد مي‌توان توزيع مناسب و دلخواه تنش را در مواد هدفمند به‌دست آورد. Obata و Kanayama [١٠] تنش‌هاي حرارتي استوانه‌هاي جدار ضخيم تحت توزيع دماي گذراي دو بعدي را بررسي کردند. Hosseini و همکارانش [١١] حل تحليلي انتقال حرارت گذرا در استوانه‌هاي FGM جدار ضخيم و متقارن محوري را با استفاده از توابع بسل بدست آوردند. همچنين Reddy و Chin [١٢] تحليل ترمومکانيکي استوانه‌هاي FGM جدار ضخيم را با استفاده از روش اجزاء محدود بررسي کردند. آنها خواص مواد را وابسته به دما فرض نمودند تا نتايج بهتري به‌دست آورند. حسيني [١٣] به تحليل همزمان ترمومکانيکي پوسته استوانه‌ايFGM جدار ضخيم پرداختند.
Obataو Noda [١٤] در بررسي‌هايشان سعي کردند ترکيب استوانه‌ی FGM را به‌منظور کاهش تنش‌هاي حرارتي که در اثر اختلاف دماي بين سطوح داخلي و خارجي به وجود مي‌آيد را بهينه کنند. Ye و Chen [١٥] حالت ترموالاستيک دو بعدي متقارن محوري در استوانه‌ی FGM ايزوتروپيک عرضي را بررسي کردند. همچنين Woo و Meguid [١٦] به تحليل غيرخطي تغيير شکل‌هاي بزرگ صفحه و استوانه‌ی FGM تحت بارگذاري مکانيکي عرضي و ميدان حرارتي پرداختند.

در اکثر پژوهش‌هاي انجام شده در زمينه‌ی تحليل

استوانه‌هاي ساخته شده از مواد هدفمند، از روش چند لايه استفاده شده است. به اين صورت كه جداره‌ی استوانه در راستاي شعاعي به چند لايه تقسيم شده و خواص ماده در هر لايه ثابت و يا خطي در نظر گرفته مي‌شود. همچنين در بسياري از موارد براي استخراج معادلات از تئوري‌هاي مهندسي مانند تئوري تغيير شكل برشي مرتبهٔ اول (FSDT) استفاده شده است. در اين مقاله، مخزن استوانه‌ای FGM با طول محدود و ضخامت و شرايط مرزي دلخواه تحت بارگذاری‌هاي مكانيكي و حرارتي متقارن محوری در نظر گرفته شده است. معادلات تعادل الاستيسيته بدون هيچ فرض ساده كننده‌اي استفاده شده و توزيع درصد حجمي مواد در راستاي ضخامت استوانه به‌صورت دقيق مطابق قانون توزيع تواني درصد حجمي عناصر مختلف در استوانه‌ی FGM ، در نظر گرفته شده است.

## ۲- استخراج معادلات

در اينجا يك مخزن استوانه‌اي ساخته شده از مواد هدفمند در نظر گرفته شده است و فرض مي‌شود خواص مكانيكي و حرارتي ماده به‌طور پيوسته در راستاي ضخامت مخزن تحت تابع توزيع تواني كه در رابطه (۱) آمده تغيير مي‌كند:

$$V=\left(V_{out}-V_{in}\right)\left(\frac{r-r_{in}}{r_{out}-r_{in}}\right)^{n}+V_{in} \qquad (۱)$$

در رابطه (۱)، $V$ معرف يك خاصيت عمومي ماده در شعاع $r$ است. همچنين $V_{out}$ و $V_{in}$ همان خاصيت به ترتيب در سطوح خارجي و داخلي مخزن بوده و $n$ ضريب توزيع تواني مي‌باشد. به‌عنوان مثال، با انتخاب مقدار $n$=۱ خواص ماده به‌طور خطي در راستاي ضخامت تغيير مي‌كند.

فرض مي‌شود كه استوانه‌ی FGM جدار ضخيم، داراي طول محدود است و بارگذاري آن به‌صورت بارهاي مكانيكي و حرارتي با تقارن محوري باشد. در نتيجه مي‌توان از عبارات مشتق نسبت به $\theta$ در روابط صرف نظر كرد. به اين ترتيب، معادله‌های موضعي تعادل به‌صورت رابطه (۲) ساده مي‌شوند:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r}-\frac{\sigma_\theta}{r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2u_r}{\partial t^2}\\&\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}\end{aligned} \qquad (۲)$$

روابط كرنش - تغيير مكان نيز در مختصات استوانه‌اي به‌صورت رابطه (۳) مي‌باشد:

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (۳)$$

$$\gamma_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r},\quad \gamma_{rz}=\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z},\quad \gamma_{\theta z}=\frac{\partial u_\theta}{\partial z}$$

همچنين روابط تنش-كرنش در حالت سه بعدي براي يك ماده ايزوتروپيك عبارت است از:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_z\\\sigma_\theta\\\sigma_r\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{12}\\C_{12}&C_{11}&C_{12}\\C_{12}&C_{12}&C_{11}\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}\varepsilon_z\\\varepsilon_\theta\\\varepsilon_r\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{Bmatrix}\Delta T\right) \qquad (۴)$$

$$\sigma_{r\theta}=C_{66}\gamma_{r\theta},\quad \sigma_{rz}=C_{66}\gamma_{rz},\quad \sigma_{z\theta}=C_{66}\gamma_{z\theta}$$

كه در آن

$$\begin{aligned}&C_{11}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\\&C_{12}=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\\&C_{66}=\left(C_{11}-C_{12}\right)/2\end{aligned} \qquad (۵)$$

با توجه به اينكه شرايط مرزي و بارگذاري متقارن محوري مي‌باشند، مي‌توان $u_\theta$ را صفر در نظر گرفت و مسئله را به‌صورت دو بعدي در صفحه $r$ و $z$ حل كرد. با جايگذاري (۳) در (۴)، روابط تنش - تغيير مكان به‌صورت رابطه (۶) به‌دست مي‌آيد:

$$\begin{aligned}&\sigma_z=C_{11}\frac{\partial u_z}{\partial z}+C_{12}\left(\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\sigma_T\\&\sigma_\theta=C_{11}\frac{u_r}{r}+C_{12}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\sigma_T\\&\sigma_r=C_{11}\frac{\partial u_r}{\partial r}+C_{12}\left(\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)-\sigma_T\\&\sigma_{r\theta}=C_{66}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right)\\&\sigma_{rz}=C_{66}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\\&\sigma_{\theta z}=C_{66}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\end{aligned} \qquad (۶)$$

كه در آن

$$\sigma_T=\alpha\,\Delta T\left(C_{11}+2C_{12}\right) \qquad (۷)$$

با جايگذاري (۶) در معادله‌هاي تعادل الاستيسيته (۲)، دو معادله‌ی ديفرانسيل كوپل با مشتقات جزئي به‌صورت رابطه (۸) به‌دست مي‌آيد:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(C_{11}r\frac{\partial u_r}{\partial r}+C_{12}\left(u_r+r\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)-r\sigma_T\right)-C_{11}\frac{u_r}{r^2}$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(C_{66}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\right)-\frac{C_{12}}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\frac{\sigma_T}{r}=0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(C_{11}\frac{\partial u_z}{\partial z}+C_{12}\left(\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\sigma_T\right) \tag{۸}$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(C_{66}r\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\right)=0$$

براي حل اين دستگاه معادله به‌روش اجزاء محدود، شكل ضعيف (weak form) به‌صورت رابطه (۹) تشكيل مي‌شود:

$$\int\left\{\frac{\partial w_1}{\partial r}\left(C_{11}r\frac{\partial u_r}{\partial r}+C_{12}\left(u_r+r\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)-r\sigma_T\right)+\frac{\partial w_1}{\partial z}\left(C_{66}r\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\right)\right.$$
$$\left.+w_1\left(C_{11}\frac{u_r}{r}+C_{12}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\sigma_T\right)\right\}drdz-\oint w_1 t_r\, ds=0$$
$$\int\left\{\frac{\partial w_2}{\partial z}\left(C_{11}r\frac{\partial u_z}{\partial z}+C_{12}\left(u_r+r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-r\sigma_T\right)\right. \tag{۹}$$
$$\left.+\frac{\partial w_2}{\partial r}\left(C_{66}r\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)\right)\right\}drdz-\oint w_2 t_z\, ds=0$$

كه در آن

$$t_r=r\sigma_r n_r+\sigma_{rz}n_z$$
$$t_z=\sigma_z n_z+r\sigma_{rz}n_r \tag{۱۰}$$

همچنين با استفاده از توابع درون‌ياب $\psi$ مي‌توان نوشت:

$$u_r=\sum_{j=1}^{n_e}u_j\psi_j$$
$$u_z=\sum_{j=1}^{n_e}v_j\psi_j \tag{۱۱}$$
$$w_1=w_2=\psi_i$$

با جايگذاري (۱۱) در (۹) به‌دست مي‌آيد:

$$\int\left\{C_{11}r\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\frac{\partial\psi_j}{\partial r}u_j+C_{12}\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\psi_j u_j+C_{12}r\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}v_j+\frac{C_{11}}{r}\psi_i\psi_j u_j\right.$$
$$+C_{66}r\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial r}v_j+C_{66}r\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\psi_j}{\partial z}u_j+C_{12}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}\psi_i v_j$$
$$\left.+C_{12}\frac{\partial\psi_j}{\partial r}\psi_i u_j-\left(r\frac{\partial\psi_i}{\partial r}+\psi_i\right)\sigma_T\right\}drdz=\oint\psi_i t_r$$
$$\int\left\{C_{66}r\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\frac{\partial\psi_j}{\partial r}v_j+C_{66}r\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}u_j+C_{11}r\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\psi_j}{\partial z}v_j\right. \tag{۱۲}$$
$$\left.+C_{12}\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\psi_j u_j+C_{12}r\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial r}u_j-\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\sigma_T\right\}drdz=\oint\psi_i t_z\, ds$$

روابط (۱۲) را مي‌توان به فرم ماتريسي رابطه (۱۳) نوشت:

$$\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{Bmatrix} \tag{۱۳}$$

كه در آن

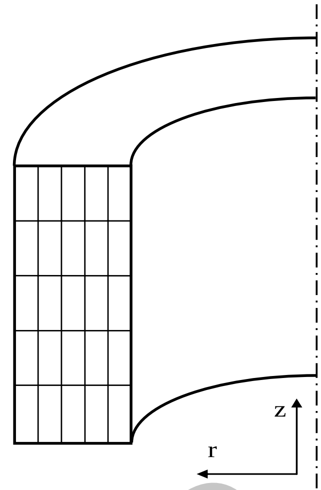
$$k_{11}=\int\left\{C_{11}r\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\frac{\partial\psi_j}{\partial r}+C_{12}\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\psi_j+\frac{C_{11}}{r}\psi_i\psi_j\right.$$
$$\left.+C_{12}\frac{\partial\psi_j}{\partial r}\psi_i+C_{66}r\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right\}drdz$$
$$k_{12}=k_{21}=\int\left\{C_{12}r\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\frac{\psi_j}{\partial z}+C_{12}\psi_i\frac{\partial\psi_j}{\partial z}+C_{66}r\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial r}\right\}drdz$$
$$k_{22}=\int\left\{C_{66}r\frac{\partial\psi_i}{\partial r}\frac{\partial\psi_j}{\partial r}+C_{11}r\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right\}drdz$$
$$F_1=\oint\psi_i t_r\, ds,\quad F_2=\oint\psi_i t_z\, ds$$
$$Q_1=\int\left(r\frac{\partial\psi_i}{\partial r}+\psi_i\right)\sigma_T drdz,\quad Q_2=\int\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\sigma_T\, rdrdz \tag{۱۴}$$

در مدل اجزاء محدود از المان‌هاي مستطيلي با چهار گره و دو درجه آزادي در هر گره استفاده شده است. چيدمان المان‌ها در صفحه‌ی $r$ و $z$ عمود بر جداره‌ی استوانه مي‌باشد. شكل (۱) نحوه‌ی المان بندي را در مدل اجزاء محدود در يك مقطع تقارن محوري استوانه، نشان مي‌دهد.

توابع درون‌ياب نيز به فرم رابطه (۱۵) انتخاب شده است:

$$\psi_1=\left(1-\frac{r}{a}\right)\left(1-\frac{z}{b}\right),\quad \psi_2=\frac{r}{a}\left(1-\frac{z}{b}\right)$$
$$\psi_3=\frac{z}{b}\left(1-\frac{r}{a}\right),\quad \psi_4=\frac{z}{b}.\frac{r}{a} \tag{۱۵}$$

در المان‌هاي تعريف شده، هر گره داراي دو درجه آزادي است و بنابراين ابعاد ماتريس سختي هر يك از المان‌ها ۸*۸ است كه هر يك از درايه‌هاي آن با انتگرال‌گيري روي همان المان حاصل مي‌شود. به دليل وابسته بودن ضرايب $C$ به $r$ و همچنين وجود ضرايب $r$ در بعضي از عبارات انتگرال، مقدار انتگرال‌ها براي المان‌هاي مختلف در راستاي $z$ يكسان ولي در راستاي $r$ متفاوت مي‌باشد. در نتيجه مي‌توان در راستاي $z$ از انتگرال‌گيري مجدد صرف نظر كرد ولي در راستاي $r$ بايد از تك تك المان‌ها انتگرال‌گيري نمود. به‌منظور افزايش دقت در نتايج به‌دست آمده، از حل تحليلي انتگرال‌هاي در جهت ضخامت در برنامه‌ی اجزاء محدود استفاده شده است.




شکل (۱): نمایش چیدمان المان‌ها در جداره‌ی استوانه

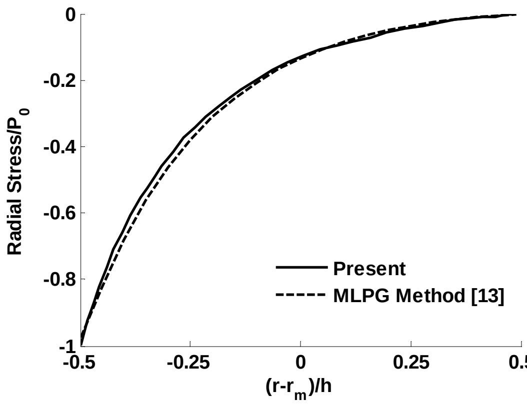
لازم به ذکر است که در بارگذاري‌هاي حرارتي، ابتدا بايد توزيع دما در راستاي ضخامت را از حل معادله‌ی انتقال حرارت پايدار يك‌بعدي در راستاي ضخامت به‌دست آورد و سپس معادله‌های تعادل را حل نمود. اين معادله به‌صورت رابطه (۱۶) مي‌باشد:

$$-\frac{d}{dr}\left(k_t(r)\frac{dT}{dr}\right)=0 \qquad (۱۶)$$

به‌دليل وابسته بودن ضريب $k_t$ به $r$ ، حل تحليلي معادله‌ی (۱۶) فقط براي ضرايب صحيح $n$ و ضرايب غير صحيح $n$=۰/۲ و $n$=۰/۵ موجود است. بنابراين ترجيح داده مي‌شود كه معادله‌ی ياد شده نيز به‌روش اجزاء محدود يك بعدي در راستاي ضخامت حل شود. بدين ترتيب هيچگونه محدوديتي در وجود حل براي ضرايب مختلف $n$ وجود نخواهد داشت.

## ۳- نتایج عددی

به‌منظور بررسي دقت و صحت نتايج برنامه‌ی اجزاء محدود و المان تعريف شده، توزيع تنش در مخزن جدار ضخيم با حل ارائه شده در مرجع [۱۷] مقايسه شده است. استوانه به‌صورت كرنش صفحه‌ای با شعاع داخلي ۵mm و شعاع خارجي ۱۰mm در نظر گرفته شده است. سطح داخلي استوانه از جنس سراميك كاربيد سيليسيم با مدول الاستيسته‌ی ۴۲۷GPa و سطح خارجي آن از جنس فلز آلومينيوم با مدول الاستيسته‌ی ۷۰GPa مي‌باشد. همچنين ضريب پواسون به‌طور ثابت ۰/۳ فرض شده است. بارگذاري مكانيكي فشار داخلي $P_0=۱\,\mathrm{MPa}$ در نظر گرفته شده است. در مرجع [۱۷]، حل عددي بر اساس روش Petrov-Galerkin بدون المان به‌دست آمده است. طول استوانه به مقدار كافی بلند در نظر گرفته مي‌شود تا بتوان نتايج را با حالت كرنش صفحه ای مقايسه كرد. مقادير بي بعد تنش شعاعي در راستاي ضخامت استوانه‌ی FGM به ازاء ضريب توان $n$=۱ در شكل (۲) با حل ارائه شده در اين مقاله مقايسه شده است. مشاهده مي‌شود كه تطابق بسيار خوبي بين نتايج وجود دارد.




شكل (۲): مقايسه‌ی مقادير بي بعد تنش شعاعي در راستاي ضخامت استوانه با حل ارائه شده در مرجع [۱۷]

در ادامه مقايسه‌های ديگر بين حل اجزاء محدود و حل تحليلي به روش تئوري تغيير شكل برشي مرتبه‌ی اول (FSDT) برای استوانه‌ی جدار نازک ارائه شده است. بدين منظور، حل تحليلي مخزن FGM با استفاده از تئوري تغيير شكل برشي مرتبه‌ی اول به‌دست آورده شده است. فرض‌هاي استفاده شده در حل تحليلي عبارتند از:

۱- استفاده از قانون توزيع تواني براي مدل كردن تغييرات خواص در امتداد ضخامت، ۲- ثابت بودن ضريب پواسون، ۳- صفحه‌اي بودن تنش‌ها، ۴- مستقل بودن خواص از دما، ۵- ايزوتروپيك بودن مادّه، ۶-كوچك بودن تغيير شكل‌هاي پوسته، ۷- متقارن محوري بودن مسألَه از لحاظ هندسي و بارگذاري و ۸- استفاده از فرض Love-Timoshenko (يعني $1+z/R \approx 1$). در فرض آخر از نسبت ضخامت به شعاع در برابر يك صرف نظر شده است. در نتيجه اين حل تحليلي فقط براي استوانه هاي جدار نازك صادق است.

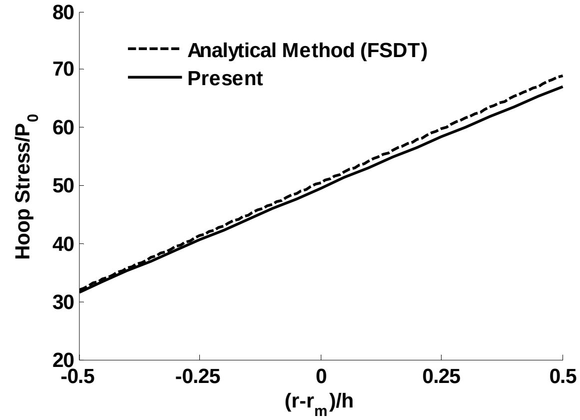
به‌منظور ارائه‌ی حل عددي، يك مخزن استوانه‌اي كه سطح داخلي آن از جنس فلز آلومينيوم با مدول الاستيسيته ۷۰GPa، ضريب پواسون ۰/۳، ضريب هدايت گرمايي۲۰۴W/mK و ضريب انبساط حرارتي $۲۳\times۱۰^{-۶}\ /\ ^{\circ}\mathrm{C}$ و سطح خارجي آن از

جنس سراميك زيركونيا با مدول الاستيسيته ۱۵۱GPa، ضريب پواسون ۰/۳، ضريب هدايت گرمايي۲/۰۹W/mK و ضريب انبساط حرارتي $10\times10^{-6}\ /\ ^{\circ}C$ درنظر گرفته شده است. دو نوع شرايط مرزي شامل استوانه‌ی دو سر تكيه گاه ساده و دو سر گير دار درنظر گرفته شده است. بارگذاري‌هاي استاتيكي به‌صورت فشار داخلي براي استوانه‌ی دو سر گير دار و حرارتی به‌صورت اختلاف دماي سطوح داخلي و خارجي براي استوانه‌ی دو سر تكيه گاه ساده اعمال شده است. نمودارهاي توزيع دما و تنش در راستاي ضخامت و طول استوانه‌ی ساخته شده از مواد هدفمند به‌دست آمده و با استوانه سراميكي يا فلزي مقايسه شده است.

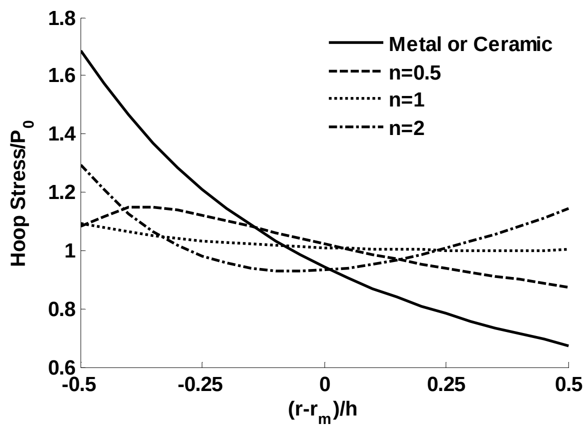
نتايج براي دو نوع استوانه‌ی جدار ضخيم و جدار نازك به‌دست آمده است. در مواردی كه نسبت شعاع داخلی به ضخامت استوانه ذكر نشده است، در استوانه‌ی جدار ضخيم اين نسبت برابر يك و در استوانه‌ی جدار نازك برابر بيست فرض مي‌شود. در هر دو نوع استوانه، نسبت طول به شعاع داخلي برابر بيست فرض مي‌شود. نمودارهاي مختلف به ازاي مقادير بي بعد شعاع استوانه رسم شده است به‌طوري كه شعاع بي‌بعد از مقدار ۰/۵- در سطح داخلي به ۰/۵ در سطح خارجي افزايش مي‌يابد. كليه‌ی نمودارهايي كه در ادامه آورده شده است مربوط به مقطعي است كه از وسط طول استوانه مي‌گذرد.

## ۳-۱- بارگذاري استاتيكی فشار داخلي براي استوانه‌ی دو سر گيردار

در اين قسمت، فشار داخلي برابر $P_0 = 1\ \mathrm{MPa}$ در نظر گرفته مي‌شود. براي مقايسه با حل تحليلي، نمودار تنش محيطي بي بعد در راستاي ضخامت استوانه به ازاء ضريب توان $n=1$، براي استوانه‌ی جدار نازك ($r_{in}/h=50$) در شكل (۳) نشان داده شده است. مشاهده مي‌شود كه تطابق بسيار خوبي بين نتايج برقرار است. نمودارهاي مقادير بي بعد تنش‌های محيطي در راستاي ضخامت استوانه‌های جدار ضخيم و جدار نازك به ازاء مقادير مختلف ضريب توان $n$ در شكل‌های (۴) و (۵) نشان داده شده است.



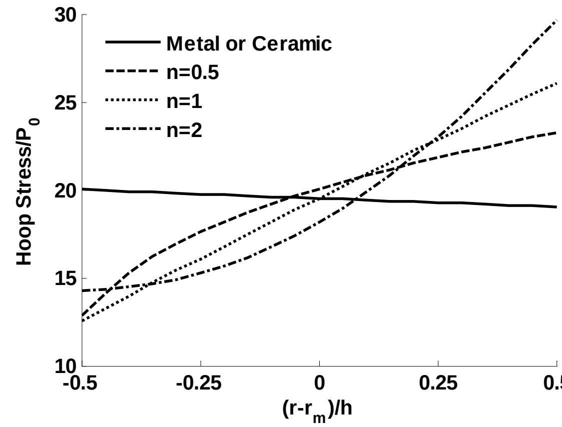

شكل (۳): توزيع تنش محيطي بي بعد در راستاي ضخامت استوانه‌ی جدار نازك ($r_{in}/h=50$) به ازاء $n=1$



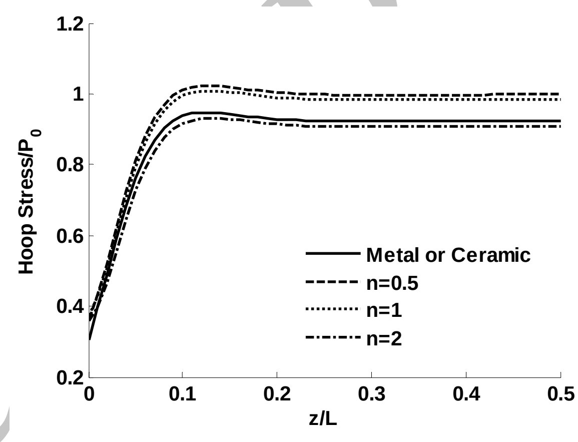

شكل(۴): توزيع تنش محيطي بي بعد در راستاي ضخامت استوانه‌ی جدار ضخيم تحت بارگذاري فشار داخلي

نمودارهاي مقادير بي‌بعد تنش‌هاي محيطي در راستاي ضخامت استوانه‌هاي جدار ضخيم و جدار نازك به ازاء مقادير مختلف ضريب توان $n$ در شكل‌های (۴) و (۵) نشان داده شده است. ديده مي‌شود كه تنش‌هاي محيطی در استوانه‌هاي FGM نسبت به استوانه‌ی خالص با كاهش در سطح داخلي و افزايش در سطح خارجي همراه است. اين رفتار نشان مي‌دهد كه در استوانه‌هاي جدار ضخيم FGM تنش حداكثر كاهش و در استوانه‌هاي جدار نازک FGM تنش حداكثر افزايش مي‌يابد.

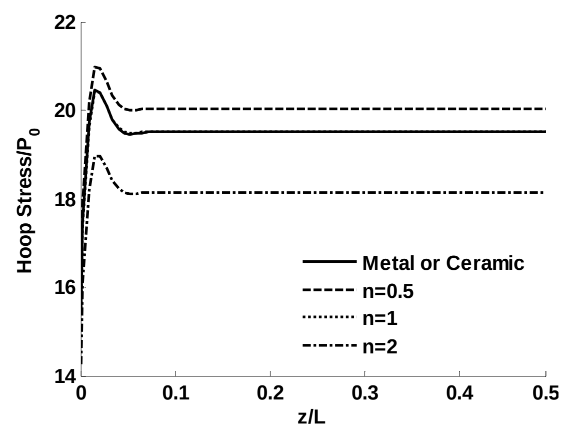
نمودارهاي مقادير بي بعد تنش‌هاي محيطي در سطح مياني و در راستاي طول استوانه‌هاي جدار ضخيم و جدار نازك به ازاء مقادير مختلف ضريب توان $n$ در شكل‌های (۶) و (۷) نشان داده شده است. به‌دليل تقارن در دو انتهاي استوانه به لحاظ بارگذاري و شرايط مرزي و اجتناب از انجام محاسبات اضافي، صفحه‌ی تقارن در وسط طول استوانه در نظر گرفته شده و فقط نيمي از طول استوانه مدل شده است. در نتيجه نمودارهاي در راستاي طول نيز فقط براي نيمي از طول استوانه مي‌باشد.




شکل (۵): توزیع تنش محیطي بي بعد در راستاي ضخامت استوانه‌ی جدار نازك تحت بارگذاري فشار داخلي




شکل (۶): توزیع تنش محیطي بي بعد در راستاي طول استوانه‌ی جدار ضخیم تحت بارگذاري فشار داخلي

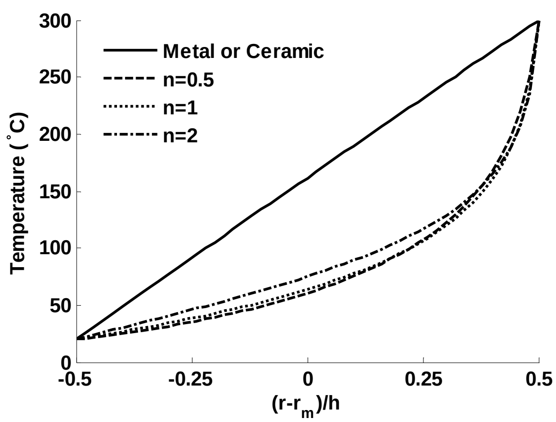



شکل (۷): توزیع تنش محیطي بي بعد در راستاي طول استوانه‌ی جدار نازك تحت بارگذاري فشار داخلي

در شکل‌های (۶) و (۷) ملاحظه مي‌شود که در استوانه‌های تحت فشار داخلي توزیع مقادیر تنش در راستاي طول استوانه براي استوانه‌های FGM مشابه رفتار استوانه‌ی خالص مي‌باشد و به ازاء مقادیر مختلف $n$ در لبه‌های استوانه به مقدار تنش در استوانه‌ی خالص همگرا مي‌شود. همچنین ملاحظه مي‌شود که براي استوانه‌های جدار ضخیم و جدار نازك تحت فشار داخلي، به ترتیب در حدود ۱۵ درصد و ۵ درصد طول استوانه در لبه‌ها تفاوت محسوس در مقادیر تنش نسبت به مقادیر آن در غیر از لبه‌های استوانه وجود دارد.

## ۳-۲- بارگذاري حرارتی پایدار براي استوانه‌ی دو سر تکیه‌گاه ساده

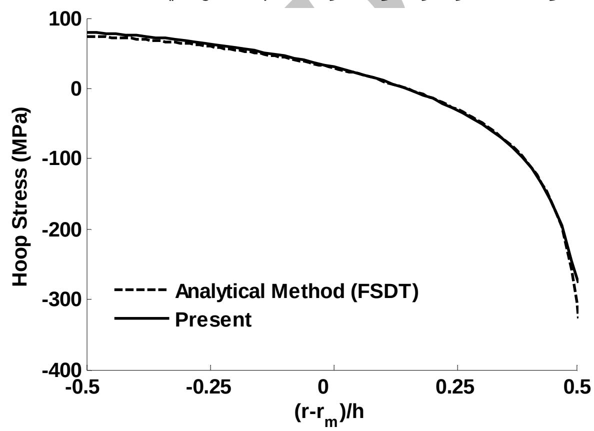
در این قسمت، دماي سطح داخلي ۲۰ درجه‌ی سانتي گراد و سطح خارجي ۳۰۰ درجه‌ی سانتي گراد فرض مي‌شود. خواص مواد را در این بازه‌ی دمایي تقریباً مي‌توان ثابت در نظر گرفت. همچنین دماي بدون تنش، صفر درجه‌ی سانتي گراد فرض مي‌شود. نمودار توزیع دما در راستاي ضخامت استوانه به ازای مقادیر مختلف ضریب توان $n$ براي استوانه‌های جدار ضخیم و جدار نازك تقریباً یکسان است که در شکل (۸) نشان داده شده است. همانطور که انتظار مي‌رود، توزیع دما در استوانه‌های خالص فلزي یا سرامیکي به‌صورت خطي است. اما در استوانه‌های ساخته شده از مواد هدفمند، توزیع دما غیر خطي و تفاوت زیادي با ماده‌ی همگن دارد و به‌نظر مي‌رسد که این اختلاف عمده منشا تفاوت زیاد رفتار مواد هدفمند نسبت به مواد همگن در بارگذاري حرارتي باشد. همچنین دیده مي‌شود که توزیع دما در مواد هدفمند به ازاي ضرایب مختلف $n$ تقریبا یکسان بوده و با نزدیك شدن به‌سمت سطح داخلي استوانه، گرادیان حرارتي کاهش مي‌یابد و این یك عامل مثبت در کاهش تنش سطح داخلي در بارگذاري حرارتي است.



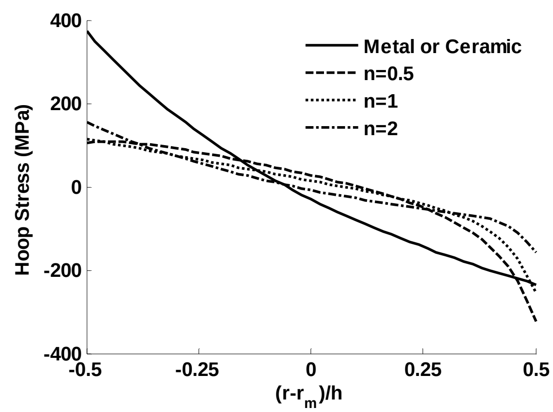

شکل (۸): نمودار توزیع درجه‌ی حرارت در راستاي ضخامت استوانه تحت بارگذاري حرارتي پایدار

براي مقایسه نتایج با حل تحلیلي، نمودار تنش محیطي در

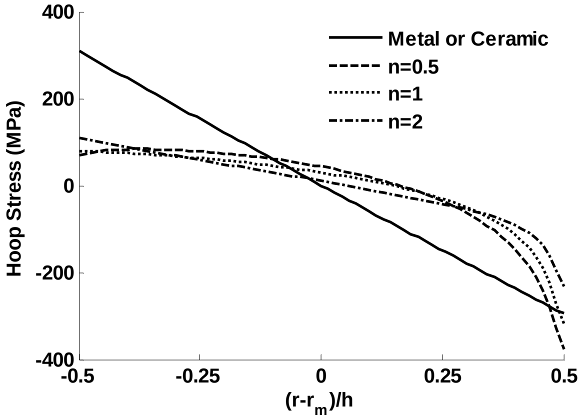
راستاي ضخامت استوانه‌ی جدار نازك به ازاء ضريب توان $n$=1، در شكل (۹) نشان داده شده است. همچنين نمودارهاي مقادير تنش‌هاي محيطي در راستاي ضخامت استوانه‌های جدار ضخيم و جدار نازك به ازاء مقادير مختلف ضريب توان $n$ در شكل هاي (۱۰) و (۱۱) نشان داده شده است. با توجه به اين شكل‌ها ديده مي‌شود كه در بارگذاري حرارتي، مقادير تنش محيطي در راستاي ضخامت استوانه‌ی ساخته شده از مواد هدفمند در مقايسه با استوانه‌ی خالص در سطح خارجي تفاوت چندان زيادي ندارد ولي در سطح داخلي كاهش بسيار زيادي را نشان مي‌دهد. مي‌توان به اين نكته‌ی جالب اشاره كرد كه استفاده از مواد هدفمند، تنش محيطي حداكثر را در هر دو نوع استوانه‌ی جدار نازك و جدار ضخيم كاهش مي‌دهد.




شكل (۹): توزيع تنش محيطي در راستاي ضخامت استوانه‌ی جدار نازك به ازاء $n$=۱



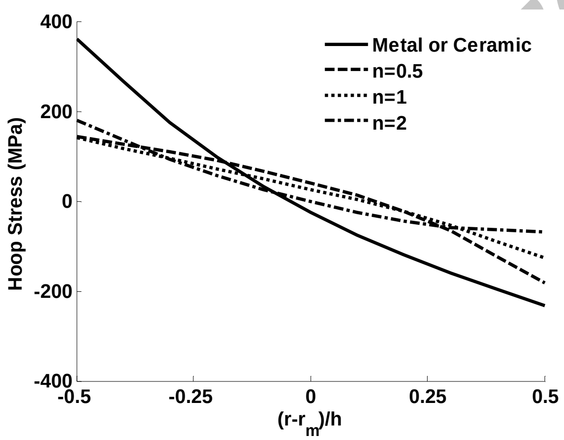

شكل (۱۰): توزيع تنش محيطي در راستاي ضخامت استوانه‌ی جدار ضخيم تحت بارگذاري حرارتي پايدار



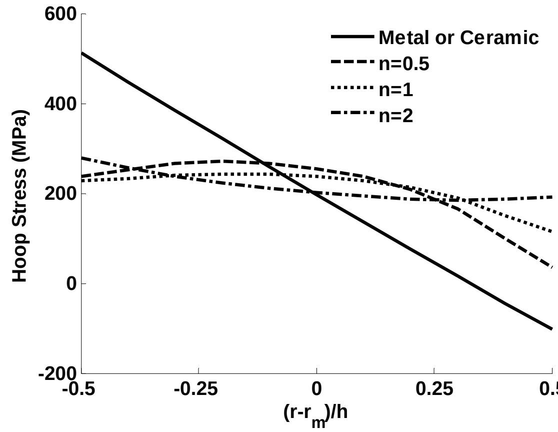

شكل (۱۱): توزيع تنش محيطي در راستاي ضخامت استوانه‌ی جدار نازك تحت بارگذاري حرارتي دائم

### ۳-۳- بارگذاري مكانيكي و حرارتي در استوانه دو سر آزاد

در اين قسمت، استوانه‌ي دو سر آزاد تحت بارهاي توام مكانيكي و حرارتي در نظر گرفته است. بارگذاري حرارتي مشابه قسمت قبل و بارگذاري مكانيكي بصورت اعمال فشار داخلي $P_0 = ۱۰\ \mathrm{MPa}$ فرض شده است. نمودارهاي تنش محيطي در راستاي ضخامت استوانه‌های جدار ضخيم و جدار نازك به ازاء مقادير مختلف ضريب توان $n$ در شكل هاي (۱۲) و (۱۳) نشان داده شده است.




شكل (۱۲): توزيع تنش محيطي در راستاي ضخامت استوانه‌ی جدار ضخيم تحت بارگذاري ترمومكانيكال




شكل (۱۳): توزيع تنش محيطي در راستاي ضخامت استوانه‌ی جدار نازك تحت بارگذاري ترمومكانيكال

## ۴- نتيجه

در اين مقاله براي تحليل مخازن جدار ضخيم FGM كه خواص مكانيكي و فيزيكي آنها در جهت ضخامت به‌صورت تابع توزيع تواني تغيير مي‌كند، يك نوع المان تعريف شد. در اين نوع المان، تغييرات دقيق خواص در راستاي ضخامت درنظر گرفته شده است. با توجه به نتايج ارائه شده ملاحظه شد كه توزيع تنش در مخزن استوانه‌اي ساخته شده از فلز يا سراميك خالص فقط تابع بار و هندسه‌ی مخزن مي‌باشد، در حالي كه توزيع تنش و دما در مخزن استوانه‌اي FGM ، علاوه بر اين كه تابع بار و هندسه مخزن است، به نوع ماده و نحوه‌ی تغييرات خواص آن نيز وابسته است. اين وابستگي جهت كنترل توزيع تنش و دما مفيد است. همچنين استفاده از FGM در ساخت مخازن استوانه‌اي، باعث كاهش تنش محيطي در سطح داخلی مي‌شود. اثر اين كاهش در بارگذاري حرارتي نسبت به مكانيكي بسيار قابل توجه است.

## ۵- مراجع


[۱] Tutuncu, N.; Ozturk, M.; *"Exact Solutions for Stresses in Functionally Graded Pressure Vessels"*, Composites: Part B, p.p. 683-686, 2001.

[۲] Horgan, C.O.; Chan, A.M.; *"The Pressurized Hollow Cylinder or Disk Problem for Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Materials"*, Journal of Elasticity, p.p. 43-59, 1999.

[۳] Jabbari, M.; Sohrabpour, S.; Eslami, M.R.; *"Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Radially Symmetric Loads"*, International Journal of Pressure Vessels and Piping, p.p. 493-497, 2002.

[۴] Jabbari, M.; Sohrabpour, S.; Eslami, M.R.; *"General Solution for Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Nonaxisymmetric Steady-State Loads"*, Journal of Applied Mechanics, p.p. 111-118, 2003.

[۵] Awaji, H.; Sivakuman, R.; *"Temperature and Stress Distributions in a Hollow Cylinder of Functionally Graded Material: The Case of Temperature-Dependent Material Properties"*, Journal of American Ceramic Society, p.p. 1059-1065, 2001.

[۶] Liew, K.M.; Kitipornchai, S.; Zhang, X.Z.; Lim, C.W.; *"Analysis of the Thermal Stress Behavior of Functionally Graded Hollow Circular Cylinders"*, International Journal of Solids and Structures, p.p. 2355-2380, 2003.

[۷] Shakeri, M; Akhlaghi, M; Hoseini, S.M; *"Vibration and radial wave propagation velocity in functionally graded thick hollow cylinder"*, Composite Structures, p.p. 174-181, 2006.

[۸] Hoseini, S.M; Akhlaghi, M; Shakeri, M; *"Dynamic response and radial wave propagation velocity in thick hollow cylinder made of functionally graded materials"*, Engineering Computations, p.p. 288-303, 2007.

[۹] Oral, A.; Anlas, G.; *"Effects of radially varying moduli on stress distributionof nonhomogeneous anisotropic cylindrical bodies"*, International Journal of Solids and Structures, p.p. 5568–5588, 2005.

[۱۰] Obata, Y.; Kanayama, K.; Ohji, T.; Noda, N.; *"Two-Dimensional Unsteady Thermal Stresses in a Partially Heated Circular Cylinder Made of Functionally Graded Material"*, Proceeding of Thermal Stress, p.p. 13-17, 1999.

[۱۱] Hoseini, S.M; Akhlaghi, M; Shakeri, M; *"Transient heat conduction in functionally graded thick hollow cylinders by analytical method"*, Heat Mass Transfer, p.p. 669-675, 2007.

[۱۲] Reddy, J.N,; Chin, C.D.; *"Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates"*, Journal of Thermal Stresses, p.p. 593–626, 1998.

[۱۳] حسيني، سيد محمود؛ تحليل همزمان حرارتي مكانيكي پوسته استوانه‌اي جدار ضخيم از جنس مواد هدفمند (رساله‌ي دوره‌ي دكتري)، شاكري، اخلاقي، دانشگاه صنعتي اميركبير، تهران، ۱۳۸۶.

[۱۴] Obata, Y.; Noda, N.; *"Steady Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of a Functionally Gradient Material"*, Journal of Thermal Stresses, p.p. 471-487, 1994.

[۱۵] Ye, G.R.; Chen, W.Q.; Cai, J.B.; *"A Uniformly Heated Functionally Graded Cylindrical Shell with Transverse Isotropy"*, Mechanics Research Communications, p.p. 535-542, 2001.

[۱۶] Woo, J.; Meguid, S.A.; *"Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells"*, International Journal of Solids and Structures, p.p. 7409-21, 2001.

[۱۷] Ching, H.K.; Yen, S.C.; *"Meshless Local Petrov-Galerkin Analysis for 2D Functionally Graded Elastic Solids Under Mechanical and Thermal Loads"*, Composites Part B, p.p. 223-240, 2005.