تغييرشكل هاي بزرگ غيرخطي در تير با خواص مكانيكي متغير: حل تحليلي

عليرضا داودي نيک[i]؛غلامحسين رحيمي شعرباف[ii] *

چكيده

در اين مقاله فرمولبندي و حل تحليلي مسأله تير انعطاف پذير با خواص مكانيكي متغير در راستاي ضخامت ارائه شده است. گرچه تغييرشكل در تير انعطاف پذير در اندازه هاي بزرگ اتفاق مي‌افتد، اما با كرنش هاي الاستيک بسيار كوچک همراه بوده، به محدوده پلاستيک وارد نمي‌شود. فرمول بندي تغييرشكل هاي بزرگ با استفاده از مختصات محلي و كارتزين براي تير انعطاف پذير غيرهمسانگرد با شرايط مرزي گيردار - آزاد، منجر به يک معادله ديفرانسيل معمولي غيرخطي درجه دوم مي‌شود كه با حل تحليلي آن، مؤلفه هاي تغييرشكل به دست مي‌آيد. نتايج حل تحليلي براي تير انعطاف پذير غيرهمسانگرد با نتايج حل المان محدود/*نسيس* مقايسه شده است. تأثير معكوس شدن توزيع خواص مكانيكي در بعد ضخامت بر رفتار خمشي تير انعطاف پذير و ميزان تأثير خواص مكانيكي متغير در تغييرشكل تير انعطاف پذير نسبت به حالت خواص مكانيكي ثابت، به دست آمده است. نتايج روش ارائه شده را مي توان براي اعتبار سنجي نتايج روش هاي ديگري كه براي حل مسأله تير انعطاف پذير با خواص مكانيكي متغير ارائه مي‌شود، به كار گرفت.

كلمات كليدی : تير انعطاف پذير، هندسه غيرخطي، خواص مكانيكي متغير، حل تحليلي، المان محدود

Large deflection of Flexible Functionally Graded Beams with Geometric Non-linearity: Analytical Approach

Davoodinik, A.R.; Rahimi, G.H.

ABSTRACT

Motivation of this paper is presentation of analytical solution for flexible functionally graded beams problem when carry elastic large deflection, with small strains and without concerning plastic region. The formulation of large deflection in curvilinear and Cartesian coordinate systems for the free-clamped flexible functionally graded beam, culminate in the second order non-linear ordinary differential equation that can solve it in the analytical approach. The components of deflection that are derived with analytical solution and ANSYS approach are compared. The influence of the distribution reversing of the material property and the influence of the variable material property in the components of deflection are studied. This analytical approach can be used for verifying the other method results, if any.

KEYWORDS : Flexible beam, large deflections, functionally graded materials, Analytical approach, ANSYS

تاريخ دريافت مقاله : ١٣٨٧/٦/٣

تاريخ اصلاحات مقاله: ١٣٨٨/١١/١٨

[i] دانشجوي دكتري دانشگاه تربيت مدرس؛ دانشكده فني مهندسي: davoodinik@yahoo.com.

[ii] * نويسنده مسئول و دانشيار دانشگاه تربيت مدرس؛ rahimi_gh@modares.ac.ir.

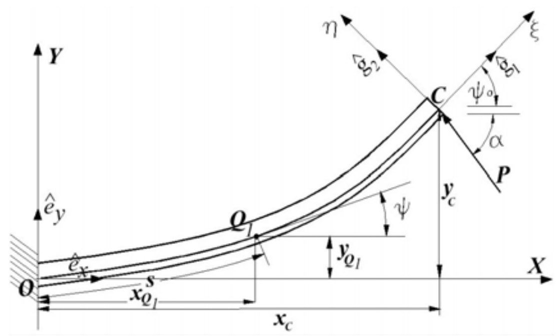
۱- مقدمه

یک عضو انعطاف پذیر در یک مکانیزم، عضوي است که تغییرشکل بزرگ معیني را در محدودهٔ الاستیک (کرنش هاي بسیار کوچک) به سبب یک نیروي معین تحمل ميکند. این گونه رفتار در اعضاي برخي روبات ها، سیستمهاي انتقال نیرو و مکانیزم هاي برگشت سریع مشاهده ميشود. جایگزیني اعضاي انعطاف پذیر در مکانیزم هاي چند عضوي، موجب کاهش بسیار در اثرات مخرب ناشي از اصطکاک، سایش و تکانه هاي ناشي از عملکرد اعضاي صلب در مکانیزم شده، در نتیجه علاوه بر کاهش هزینه هاي ساخت و نگهداري، موجب افزایش عمر مکانیزم ها نیز ميگردد. در این مجموعه ها براي بررسي رفتار اعضاي انعطاف پذیر غالباً آنها را همانند یک تیر یکسرگیردار مدلسازي ميکنند [۱] - [۳]. وقتي از یک عضو انعطاف پذیر در شرایط محیطي با دماي بالا یا تحت سایش و یا ارتعاش مداوم استفاده شود، یک راهکار براي افزایش عمر و کارایي آن، به کارگیري مواد با خواص مکانیکي متغیر در ساختار آن است [٤]. در حل این مسائل لازم است که هندسه غیرخطي تیر انعطاف پذیر، وقتي که تغییرشکل ها و چرخش هاي بزرگ الاستیک را تحمل ميکند ولي کرنش ها در اندازه هاي بسیار کوچک اتفاق ميافتد، مدل سازي شود. از طرفي ميبایست تأثیر خواص مکانیکي متغیر در فرمولبندي روابط کرنش-تغییرمکان مسئله وارد شود که این موضوع تاکنون در تیرهاي انعطاف پذیر مطالعه نشده است. تا حد امکان انتخاب روش حل در مسائلي که در آنها استفاده از خواص مکانیکي متغیر مطرح ميشود، بر پایه تعمیم روش هایي است که براي مواد همسانگرد وجود دارند [۵]- [۷]. با بررسي روش هایي که تاکنون براي تیرهاي انعطاف پذیر همسانگرد ارائه شده است، مشاهده ميشود که تانسور کرنش *ون کارمن* [۸] و نیز تانسور کرنش *گرین – لاگرانژ* که با تانسور تنش *پیولا-کیرشهف نوع دوم* همراه است [۹] هر یک نقص هایي دارند. با توجه به اینکه ميتوان تغییرشکل تیرانعطاف پذیر الاستیک را از نوع انتقال و چرخش جسم صلب درنظرگرفت، استفاده از کرنش ها و تنش هاي محلي به عنوان روشي دیگر معرفي شده است [۱۰]. دراین روش با اندازه گیري کرنش نسبت به دستگاه مختصات محلي درتیر تغییرشکل یافته، ماهیت کرنش از نوع کرنش هندسي و نه کرنش پدید آورنده انرژي کرنشي فرض ميشود که این نوع کرنش را ميتـوان کرنش *ژائومن* نامید. با این تفاوت که براي تعریف آن از *تانسور کشیـدگي راست* مربوط به گرادیان تغییرشکل استفاده نميشود و نیازي به روش پیچیده *تجزیه قطبي* نیسـت [۱۱]. با توجه به این که استفاده از تغییرمکان هاي محلي براي به دست آوردن روابط کرنش-تغییرمکان کاملاً غیرخطي، چنین پیچیدگي را ازبین ميبرد [۱۲] بنابراین دراین مقاله ازاین روش استفاده شده است.

در به دست آوردن فرمولبندي تغییرشکل هاي بزرگ در تیر انعطاف پذیر تحت نیرو و ممان انتهایي، از مفاهیم بنیادي علوم مهندسي مانند مکانیک محیط هاي پیوسته استفاده ميشود ولي از آنجایي که منجر به یک معادله دیفرانسیل معمولي درجه دوم غیرخطي ميشود، براي حل آن تنها ميتوان از روش هاي تحلیلي، نیمه تحلیلي و یا عددي استفاده کرد. معادلهٔ مذکور در حالت تیر همسانگرد که تحت بار انتهایي باشد، حل تحلیلي شده است [۱۳]، [۱٤]. همچنین مسأله تیر انعطاف پذیر همسانگرد و یا غیرهمسانگرد وقتي تحت بارگذاري انتهایي و بارگذاري میاني باشد، از روش هاي عددي مانند *روش شوتینگ* و یا نیمه تحلیلي مانند *روش تجزیه آدومیان* حل شده است [۱۵]، [۱٦]. اما تاکنون روش حل تحلیلي حتي در شرایط بارگذاري محدود به بار انتهایي در تیر انعطاف پذیر غیرهمسانگرد انجام نشده است. از این رو ارائه فرمولبندي تغییرشکل هاي بزرگ در تیر انعطاف پذیر با خواص مکانیکي متغیر و حل تحلیلي معادله حاکم در تغییرشکل تیر انعطاف پذیر، رویکرد این مقاله است که درآن از تعریف انحناها، کرنش ها و تنش هاي محلي و نیز انتگرال هاي بیضوي استفاده ميشود. همچنین قابلیت نرم-افزار *انسیس* در حل این مسأله بررسي شده است [۱۶]. روش تحلیلي ارائه شده دراین مقاله مي تواند براي اعتبارسنجي نتایج روش هاي دیگر به کارگرفته شود. درآخر، میزان تغییرمکان ها در تیر انعطاف پذیر همسانگرد و غیرهمسانگرد در ازاي توزیع هاي متفاوتي از خواص مکانیکي مقایسه شده است.

۲- تعریف مسأله

تیر انعطاف پذیر با سطح مقطع مستطیلي به عرض b و ضخامت h را با شرایط تکیه گاهي گیردار - آزاد مطابق شکل (۱) درنظر بگیرید. بعد عرضي و ضخامت که به ترتیب در راستاي محورهاي Z وY واقعند، در مقایسه با بعد طولي تیر (در راستاي X) کوچک هستند؛ امتداد محور X ها بر راستاي تار مرجع از تیر تغییرشکل نیافته منطبق است.



شكل (۱): دستگاه مختصات تير تغييرشكل نيافته XYZ و دستگاه مختصات تير تغييرشكل يافته $\xi\eta\zeta$

x_c و y_c به ترتيب بيانگر مختصات محوري و عرضي نقطهٔ C در انتهاي آزاد تير بر روي تارمرجع، α زاويه اي كه نيروي متمركز P درنقطه اثر خود بر تير (نقطهٔ C) با محورX مي‌سازد. ψ_0 بيانگر شيب تير در نقطه اثر نيروي P و مقداري ثابت است و ψ بيانگر شيب تير در هر نقطه دلخواه مانند $Q_1(x_{Q1},y_{Q1})$ از تير انعطاف پذير بوده، تغييرات آن وابسته به تغييرات s است. وقتي تير تغييرشكل مي‌دهد، امتداد آن مانند يك كمان خواهدشد. براي بيان طول كمان تير از تكيه گاه تا نقطه هاي $Q_1(x_{Q1},y_{Q1})$ و $C(x_c,y_c)$ به ترتيب از L و s استفاده مي‌شود.

۲-۱- معرفي دستگاه هاي مختصات

براي به دست آوردن معادلات حاكم كاملاً غيرخطي در يك تير اويلر-برنولي انعطاف پذير از دستگاه هاي مختصات نشان داده شده در شكل (۱) و فرضيات تير اويلر-برنولي استفاده مي‌شود. با توجه به اينكه در تيرهاي ضخيم بر خلاف تيرهاي نازك، انحناها قبل از وارد شدن تير به منطقه پلاستيک تغييرات عمده اي نخواهند داشت و نيز در تيرهاي نازك با وجود اين كه انحناها تغييرات عمده اي دارا هستند، اما تغييرشكل هاي برشي قابل چشم پوشي است؛ بنابراين تقريب به كارگيري فرضيات اويلر-برنولي قابل قبول است [۱۲]. همان گونه كه مشاهده مي شود، دستگاه مختصات محلي منحني الخط متعامد با $\xi\eta\zeta$ و دستگاه مختصات كارتزين مرجع با XYZ مشخص شده اند كه انتقال مختصات به كمك ماتريس انتقال $[T]$ صورت مي‌گيرد، به طوريكه داريم:

$$\begin{Bmatrix}\hat{g}_1\\ \hat{g}_2\\ \hat{g}_3\end{Bmatrix}=[T]\begin{Bmatrix}\hat{e}_x\\ \hat{e}_y\\ \hat{e}_z\end{Bmatrix},\quad [T]=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (۱)$$

كه درآن $\hat{e}_x$، $\hat{e}_y$ و $\hat{e}_z$ بردارهاي يكه به ترتيب در راستاي محورهاي X، Y و Z بوده و $\hat{g}_j;(j=1,2,3)$ بردارهاي يكه درراستاي محورهاي ξ، η و ζ هستند، به گونه اي كه مي‌توان نوشت:

$$\hat{g}_j\cdot\hat{g}_k=\delta_{jk} \qquad (۲)$$

كه در آن δ_{jk} بيانگر دلتاي كرونكر است.

۲-۲- به دست آوردن انحناها

حال چنانچه از (۲) نسبت به s مشتق گرفته شود و $(\bullet)'=\partial(\bullet)/\partial s$ باشد، داريم:

$$\hat{g}'_j\cdot\hat{g}_j=0,\quad \hat{g}'_j\cdot\hat{g}_k=-\hat{g}'_k\cdot\hat{g}_j;\ for\quad j,k=1,2,3 \qquad (۳)$$

كه با مشتق گيري از $\hat{g}_j;(j=1,2,3)$ نسبت به s و استفاده از (۳) مي‌توان نوشت [۱۰]:

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{Bmatrix}\hat{g}_1\\ \hat{g}_2\\ \hat{g}_3\end{Bmatrix}\equiv[K]\begin{Bmatrix}\hat{g}_1\\ \hat{g}_2\\ \hat{g}_3\end{Bmatrix} \qquad (٤)$$

كه درآن $[K]$، ماتريس انحنا، برابر است با:

$$[K]=\begin{bmatrix}\hat{g}'_1\cdot\hat{g}_1 & \hat{g}'_1\cdot\hat{g}_2 & \hat{g}'_1\cdot\hat{g}_3\\ \hat{g}'_2\cdot\hat{g}_1 & \hat{g}'_2\cdot\hat{g}_2 & \hat{g}'_2\cdot\hat{g}_3\\ \hat{g}'_3\cdot\hat{g}_1 & \hat{g}'_3\cdot\hat{g}_2 & \hat{g}'_3\cdot\hat{g}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \rho_3 & -\rho_2\\ \rho_3 & 0 & \rho_1\\ \rho_2 & -\rho_1 & 0\end{bmatrix} \qquad (۵)$$

يا به عبارت ديگر:

$$\rho_1=\hat{g}'_2\cdot\hat{g}_3,\ \ \rho_2=\hat{g}'_3\cdot\hat{g}_1,\ \ \rho_3=\hat{g}'_1\cdot\hat{g}_2 \qquad (٦)$$

كه ρ_1 انحناي چرخشي حول محور ξ، ρ_2 انحناي چرخشي يا خمشي حول محور η و ρ_3 انحناي خمشي حول محور ζ است. توجه داشته باشيم كه در (٤) استفاده از علامت"≡" به معني هم ارز بودن دو طرف رابطه است. با اين توضيح كه چنانچه تغييرات هريک از بردارهاي يكه $\hat{g}_j;(j=1,2,3)$ را نسبت به تغييرات s بخواهيم (به عنوان مثال؛ $\partial\hat{g}_1/\partial s$)، كافيست تا ميزان انحناي تير انعطاف پذير در راستاي دو بردار يكه ديگر (در اين مثال؛ انحناهاي ρ_2,ρ_3) را بدانيم. حال با توجه به (۱)، (۵) و (٦)، مي‌توان مقادير انحنا رابه صورت زير نوشت:

$$\begin{aligned}&\rho_3=\hat{g}'_1\cdot\hat{g}_2\\ &=\left[(\cos\psi)\,\hat{e}_x+(\sin\psi)\,\hat{e}_y\right]'\cdot\left[-(\sin\psi)\hat{e}_x+(\cos\psi)\,\hat{e}_y\right]\\ &\Rightarrow\rho_3=-\sin\psi\,(\cos\psi)'+\cos\psi\,(\sin\psi)'=\psi'\end{aligned} \qquad (۷)$$

$$\rho_1=\hat{g}'_2\cdot\hat{g}_3=0,\ \ \rho_2=\hat{g}'_3\cdot\hat{g}_1=0 \qquad (۸)$$

۲-۳- تغييرمكان ها و كرنش هاي محلي

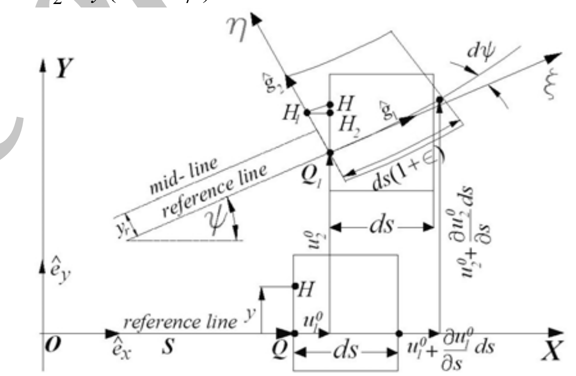
درحالت كلي بردار تغييرمكان هر المان از يک سازه انعطاف پذير را مي‌توان شامل دوبخش دانست كه يكي حركت جسم صلب (جابجايي/چرخش) و ديگري تغييرشكل محلي المان باشد. از حركت جسم صلب هيچ گونه كرنش يا انرژي كرنشي حاصل نمي‌شود؛ بنابراين براي دستيابي به روابط كرنش-تغييرمكان كاملاً غيرخطي در تير انعطاف پذير، از ميدان-

تغييرمكان محلي استفاده مي‌شود. از آنجايي كه از تئوري اويلر - برنولي استفاده مي‌شود و طبق فرضيات اين تئوري، سطح مقطع تير قبل و بعد از تغييرشكل، مسطح بوده، عمود بر تار مرجع باقي مي‌ماند، با استفاده از شكل(٢) ميدان تغييرمكان در دستگاه XYZ براي نقاط سطح مقطعي از تير در حالت دوبعدي به صورت زير تعريف مي‌شود:

$$\begin{aligned} u_1(s,y) &= u_1^0(s) - y\sin\psi(s), \\ u_2(s,y) &= u_2^0(s) - y[1-\cos\psi(s)] \\ u_3(s,y) &= 0 \end{aligned} \qquad (٩)$$

كه در آن u_1^0 و u_2^0 مؤلفه هاي تغييرمكان نقطهٔ Q_1 از تار مرجع المان مورد نظر در راستاي محورهاي X و Y بوده، ψ زاويه چرخش المان مورد نظر نسبت به محور Z است. همچنين،y ارتفاع هر نقطهٔ دلخواه H از سطح مقطع عرضي المان تير تغييرشكل نيافته، در راستاي ضخامت و نسبت به تار مرجع است كه در المان تغييرشكل يافته به H_1 تغيير موقعيت مي‌دهد. در واقع (٩) با استفاده از مفهوم تغييرمكان هاي محلي بسيار كوچك (شكل (٣)) و نيز عبارات زير به دست آمده است:

$$QH = Q_1H_1 = y,\quad Q_1H_2 = y\cos\psi,\quad H_1H_2 = y\sin\psi,$$
$$HH_2 = y(1-\cos\psi)$$



شكل(٢): ميدان تغييرمكان تارمرجع و نقاط سطح مقطعي از تيربا خواص مكانيكي متغير كه y_r بيانگر فاصلهٔ تارمرجع نسبت به تارمياني است.

حال چنانچه ميدان تغييرمكان نسبت به دستگاه $\xi\eta\zeta$ درنظر گرفته شود، داريم $\vec{U}(s,\eta)=\tilde{u}_1(s,\eta)\,\hat{g}_1+\tilde{u}_2(s,\eta)\,\hat{g}_2$ كه در آن $\tilde{u}_1$ و $\tilde{u}_2$ مؤلفه هاي تغييرمكان هاي محلي به ترتيب در راستاي $\xi\equiv s$ و η بوده و از آنجايي كه دستگاه $\xi\eta\zeta$ يك دستگاه مختصات محلي متصل به المان مورد نظر است، مي توان نوشت:

$$\tilde{u}_1^0 = \tilde{u}_2^0 = 0, \tilde{\psi} = \partial\tilde{u}_2^0 \big/ \partial s = 0 \qquad (١٠)$$

كه در آن $\tilde{u}_1^0$ و $\tilde{u}_2^0$ تغييرمكان هاي نقطه اي منطبق بر تار مرجع در سطح مقطع مورد نظر و $\tilde{\psi}$ بيانگر زاويهٔ چرخش المان در دستگاه $\xi\eta\zeta$ و وابسته به s هستند. براي $\in$ كه بيانگر تغيير طول تار مرجع در حالت تغييرشكل يافته، در راستاي ξ است داريم:

$$\partial\tilde{u}_1^0 \big/ \partial s = \in \qquad (١١)$$

به علاوه، با استفاده از شكل (٣) و رابطه (٦) مي‌توان گفت:

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial s} = \lim_{ds\to 0}\frac{d\hat{g}_1\cdot\hat{g}_2}{ds} = \hat{g}_1'\cdot\hat{g}_2 = \rho_3 \qquad (١٢)$$

حال براي به دست آوردن كرنش هاي محلي بايد از بردار تغييرمكان محلي كه در دستگاه مختصات محلي $\xi\eta\zeta$ درنظرگرفته مي‌شود، نسبت به s مشتق گرفت:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial s} = \frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial s}\hat{g}_1 + \frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial s}\hat{g}_2 + \tilde{u}_1\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial s} + \tilde{u}_2\frac{\partial\hat{g}_2}{\partial s} \qquad (١٣)$$

حال با مشتق گيري از (٩) نسبت به s واستفاده از (١٠) تا (١٢) مي‌توان نوشت:

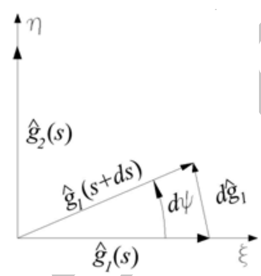
$$\begin{aligned} \partial\tilde{u}_1/\partial s &= \in - \eta(\cos\tilde{\psi})\tilde{\psi}' = \in - \eta\rho_3 \\ \partial\tilde{u}_2/\partial s &= -\eta(\sin\tilde{\psi})\tilde{\psi}' = 0 \end{aligned} \qquad (١٤)$$

اما در مورد مؤلفه هاي تغييرمكان محلي المان مورد نظر در شكل(٢)، باجايگذاري (١٠) در (٩):

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 = 0 \qquad (١٥)$$

بنابراين:

$$\partial\vec{U}/\partial s = (\in - \eta\rho_3)\,\hat{g}_1 \qquad (١٦)$$



شكل (٣): تعبير هندسي تغيير بي نهايت كوچك در زاويهچرخش محلي

حال اگر از بردار تغييرمكان $\vec{U}(s,\eta)$ نسبت به η مشتق گرفته شود:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial\eta} = \frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\eta}\hat{g}_1 + \frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\eta}\hat{g}_2 + \tilde{u}_1\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\eta} + \tilde{u}_2\frac{\partial\hat{g}_2}{\partial\eta} \qquad (١٧)$$

كه درآن مقادير مشتق مؤلفه هاي تغييرمكان نسبت به η وقتي در دستگاه مختصات محلي $\xi\eta\zeta$ درنظرگرفته مي‌شود، با استفاده از (٩) و (١٠) به صورت زير است:

$$\partial\tilde{u}_1/\partial\eta = -\sin\tilde{\psi} = 0, \partial\tilde{u}_2/\partial\eta = -(1-\cos\tilde{\psi}) = 0 \qquad (۱۸)$$

بنابراين:

$$\partial\vec{U}/\partial\eta = 0 \qquad (۱۹)$$

به طور مشابه مي‌توان مشتق بردار تغييرمكان محلي را نسبت به ζ با عبارت زير به دست آورد:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial\zeta} = \frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial\zeta}\hat{g}_1 + \frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial\zeta}\hat{g}_2 + \tilde{u}_1\frac{\partial\hat{g}_1}{\partial\zeta} + \tilde{u}_2\frac{\partial\hat{g}_2}{\partial\zeta} = 0 \qquad (۲۰)$$

حال مؤلفه هاي كرنش محلي را مي‌توان با استفاده از(۱۳) تا (۲۰) به صورت زير نوشت (كه منطبق با كرنش هاي تئوري كلاسيک مقدماتي است):

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = (\partial\vec{U}/\partial s)\cdot\hat{g}_1 = \in - \eta\rho_3 \\ &\varepsilon_{12} = (\partial\vec{U}/\partial s)\cdot\hat{g}_2 + (\partial\vec{U}/\partial\eta)\cdot\hat{g}_1 = 0 \\ &\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

۲-۴- معادلات تعادل

با توجه به شكل (٤) براي تعادل ممان ها حول تار مرجع در هر المان از تير با حذف جمله هايي ازمرتبه كوچک تر، مي‌توان نوشت:

$$M'ds + F_2(1+\in)ds = 0 \Rightarrow F_2 = -M'/(1+\in) \qquad (۲۲)$$

و نيز براي تعادل نيروها در هر مقطع از تير مي‌توان نوشت:

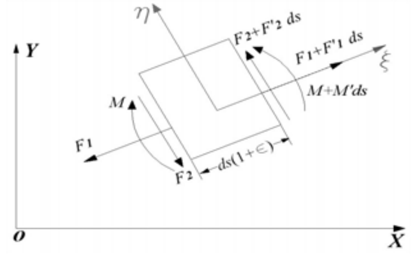
$$\vec{F} + \vec{P} = 0 \qquad (۲۳)$$

كه $\vec{P}$ بردار نيروي خارجي متمركز وارد بر نقطه اي از تير بوده و$\vec{F}$ بردار برآيند نيروهاي داخلي است كه روي سطح مقطع اثر مي‌كند، به طوري كه:

$$\begin{aligned} &\vec{F} = F_1\hat{g}_1 + F_2\hat{g}_2, \\ &\vec{P} = (-P\cos\alpha)\hat{e}_x + (P\sin\alpha)\hat{e}_y \end{aligned} \qquad (۲٤)$$

با جايگذاري (۱) و (۲۳) در (۲٤) داريم:

$$\begin{aligned} &(-F_1\cos\psi + F_2\sin\psi)\,\hat{e}_x \\ &+(-F_1\sin\psi - F_2\cos\psi)\,\hat{e}_y \\ &-(P\cos\alpha)\,\hat{e}_x + (P\sin\alpha)\,\hat{e}_y = 0 \end{aligned} \qquad (۲۵)$$



شكل (۴): دياگرام آزاد الماني از تير انعطاف پذير

كه براي به دست آوردن معادله تعادل، ضرايب هريک از مؤلفه هاي $\hat{e}_x$ و $\hat{e}_y$ را برابر صفر قرار مي‌دهيم؛ بنابراين:

$$-F_1\cos\psi + F_2\sin\psi - P\cos\alpha = 0 \qquad (۲٦)$$

$$-F_2\cos\psi - F_1\sin\psi + P\sin\alpha = 0 \qquad (۲۷)$$

حال با حذف F_1 از (۲٦) و (۲۷)، رابطه بين P و F_2 به دست مي آيد:

$$F_2 = P\sin(\alpha+\psi) \qquad (۲۸)$$

كه باجايگذاري (۲۸) در (۲۲) رابطه بين نيروي انتهايي و تغييرات ممان خمشي در راستاي طول تير به دست مي‌آيد:

$$-M'/(1+\in) = P\sin(\alpha+\psi) \qquad (۲۹)$$

۲-۵- روابط بين منتجه هاي تنش و انحناها براي تير انعطاف پذير با خواص مكانيكي متغير

چنانچه تيرانعطاف پذير داراي خواص مكانيكي متغير در راستاي ضخامت بوده، اين تغييرات بر اساس تابع نمايي تعريف شود [۵]، [۷]، [۱۷]، مي‌توان نوشت:

$$E_{(\eta)} = E_0\cdot e^{\lambda(\eta+y_r)} \quad , 1/\lambda = h/ln(E_2/E_1) \qquad (۳۰)$$

كه در آن h ضخامت تير، E_1 و E_2 مدول الاستيک به ترتيب در $\eta=(-h/2)-y_r$ و $\eta=(h/2)-y_r$ است كه y_r بيانگر فاصله تار خنثي (تار مرجع) نسبت به تار مياني در خمش تير است. همچنين $1/\lambda$ بي بعد و معيار غيريكنواختي است. با تعريف $e^{\lambda(\eta+y_r)}$ در (۳۰) توزيع خواص مكانيكي در بعد ضخامت مستقل از مقدار جابجايي تار خنثي خواهد شد. ثابت هاي E_0 و $1/\lambda$ را مي توان با استفاده از شرايط مرزي توزيع ماده به دست آورد. حال از آنجايي كه مقادير كرنش بسيار كوچک و در حد الاستيک هستند، مي‌توان روابط تنش - كرنش را مطابق با قانون هوک معرفي نمود:

$$\sigma_{11(\eta)} = E_{(\eta)}\varepsilon_{11} \qquad (۳۱)$$

كه با استفاده از (۲۱)، (۳۰) و (۳۱) براي ممان خمشي در هر مقطع عرضي از تير حول تار مرجع مي‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} M &= -\int_A \sigma_{11(\eta)}\eta\, dA \\ &= \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2-y_r}^{h/2-y_r} E_{(\eta)}[-\eta\in+\eta^2\rho_3]\,d\eta\,dz \\ &= E_0 b\rho_3\left[e^{\lambda(\eta+y_r)}\left(\frac{\eta^2}{\lambda}-\frac{2\eta}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)\right]_{\eta=-\frac{h}{2}-y_r}^{\eta=\frac{h}{2}-y_r} \end{aligned} \qquad (۳۲)$$

رابطۀ (۳۲) با اين فرض به دست آمده است كه وقتي تير انعطاف پذير، نازک است، مي‌توان از مقدار انقباض و يا انبساط طولي تارمرجع آن در تغييرشكل هاي بزرگ صرف نظر كرد

($\in=0$). اين فرض براي آن است كه حل تحليـلي اين مسأله امكان پذيرشود. حال براي يافتن مقدار y_r، مشتق (۳۲) نسبت به y_r برابر صفر قرار داده مي‌شود كه در آن صورت عبارت زير براي y_r برحسب ضخامت تير (h) و پارامتر توصيف توزيع خواص مكانيكي (λ) به دست مي‌آيد:

$$y_{r(h,\lambda)} = \frac{h(e^{\lambda h}+1)}{2(e^{\lambda h}-1)} - \frac{1}{\lambda} \qquad (۳۳)$$

حال با تعريف پارامتر C_λ به صورت ذيل:

$$C_\lambda = E_0 b \left[e^{\lambda(\eta+y_r)} \left(\frac{\eta^2}{\lambda} - \frac{2\eta}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\right) \right]_{\eta=-\frac{h}{2}-y_r}^{\eta=\frac{h}{2}-y_r} \qquad (۳۴)$$

و اين فرض كه $\in=0$ است مي‌تـوان (۲۹) و (۳۲) را بازنويـسي كرد:

$$-M' = P\sin(\alpha+\Psi) \qquad (۳۵)$$

$$M = C_\lambda \rho_3 \qquad (۳۶)$$

باجايگذاري (۳۶) در (۳۵) داريم:

$$-C_\lambda \rho'_3 = P\sin(\alpha+\Psi) \qquad (۳۷)$$

۳- فرمولبندي حل تحليلي

با استفاده از(۷) و (۳۷) مي‌توان نوشت:

$$(d^2\psi/ds^2)+[P\sin(\alpha+\psi)]/C_\lambda = 0 \qquad (۳۸)$$

حال با تبديل (۳۸) به يک فرم استاندارد، حل تحليلي آن امكان پذير خواهد شد. براي انجام اين تبديل از تعاريف زير استفاده مي‌شود:

$$\breve{s} = s/L, \qquad (۳۹)$$

$$\alpha_1 = \psi+\alpha, \qquad (۴۰)$$

$$\overline{P} = \sqrt{P/C_\lambda} \qquad (۴۱)$$

گه در آن $\overline{P}$ پارامتر بي بعد بار بوده و در بررسي نتـايج از آن براي بيـان مقـدار نيـرو نيـز اسـتفاده مـي‌شـود. از (۳۹) و (۴۰) مي توان استنتاج نمود كه:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\alpha_1}{L.d\breve{s}} \Rightarrow \frac{d\alpha_1}{d\breve{s}} = L.\frac{d\psi}{ds} \qquad (۴۲)$$

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = \frac{d^2\alpha_1}{L^2.d\breve{s}^2} \Rightarrow \frac{d^2\alpha_1}{d\breve{s}^2} = L^2.\frac{d^2\psi}{ds^2} \qquad (۴۳)$$

كه وقتي نيروي معلوم P بـا زاويـه α، روي انتهـاي آزاد آن اثـر كنـد، بـا اسـتفاده از(۳۸)، (۳۹) و (۴۲) بـه صـورت زيـر نوشـته مي شود:

$$(d^2\alpha_1/d\breve{s}^2)+(\overline{P}L)^2\sin\alpha_1 = 0 \qquad (۴۴)$$

از آنجايي كه محدوده هاي ذيل براي s و ψ برقرار است؛

$$0\le s\le L, \quad 0\le\psi\le\psi_0 \qquad (۴۵)$$

مـي‌تــوان گفــت: $0\le\breve{s}\le 1, \alpha\le\alpha_1\le\alpha+\psi_0$ برقــرار بــوده و شرايط مرزي عبارتند از:

$$(\alpha_1)_{u=0} = \alpha \qquad (۴۶)$$

$$(d\alpha_1/d\breve{s})_{\alpha_1=\psi_0+\alpha} = 0 \qquad (۴۷)$$

۳-۱- روش حل

با استفاده از شرايط مرزي (۴۶) و (۴۷)، كه براي يک تير انعطاف پذير يكسرگيردار با بارمايل در يک نقطه دلخواه از طول آن است، مي‌توان (۴۴) را حل تحليلي نموده، مؤلفه هاي تغييرمكان تارمرجع از تير انعطاف پذير را به دست آورد. در مرجع [۱۳] شرح كامل روش حل براي (۴۴) آمده است كه در اينجا به طور مختصر بيان مي‌شود. نتـــايج راه حل تحليلي عبارتست از:

$$x = [2\hat{p}\sin\alpha(\cos m-\cos n)+g(\psi)\cos\alpha]/\overline{P} \qquad (۴۸)$$

$$y = [2\hat{p}\cos\alpha(\cos m-\cos n)-g(\psi)\cos\alpha]/\overline{P} \qquad (۴۹)$$

كه در آنها:

$$g(\psi) = \left[F(\hat{p},m)-F(\hat{p},n)+2E(\hat{p},n)-2E(\hat{p},m)\right] \qquad (۵۰)$$

x و y بـه ترتيـب مختـصه هـاي طـولي وعرضـي از شـكل-تغييريافـتۀ تـارمرجع در دسـتگاه مختـصات XYZ اسـت. كـه $F(\hat{p},m), F(\hat{p},n), E(\hat{p},n), E(\hat{p},m)$، فـــــرم اســـــتاندارد انتگرال‌هاي بيضوي *لژاندر* بوده [۱۳] و $\overline{P}$ در (۴۱) تعريف شده است. همچنين:

$$\hat{p} = \sin[(\psi_0+\alpha)/2] \qquad (۵۱)$$

$$m = \sin^{-1}[\sin(\alpha/2)/\hat{p}] \qquad (۵۲)$$

$$n = \sin^{-1}[\sin[(\psi+\alpha)/2]/\hat{p}] \qquad (۵۳)$$

در اين ميان پارامتر $\hat{p}$ كه *مدول شكل* نامگذاري مي‌شود از حلّ رابطه زير به دست مي‌آيد:

$$\overline{P}L = \left[F(\hat{p},n)-F(\hat{p},m)\right] \qquad (۵۴)$$

مراحل به دست آوردن مؤلفه هاي تغييرمكان يک تير انعطاف پذير گيردار - آزاد كه نيروي مايل $(\overline{P},\alpha)$ روي آن اثر مي‌كند در مرجع [۱۳] (صفحات ۵۲ تا ۵۵) آمده است.

۴- حل مسأله تيرانعطاف پذير همسانگرد

در جدول (۱) مشخصات تير انعطاف پذير همسانگرد از

جنس "*فولادفنر*" با شرايط مرزي گيردار-آزاد تحت بارمتمركز انتهايي آمده است، كه البته نتايج آزمايش براي آن در شرايط $\overline{P}=1.3$ موجود است [۱۲].

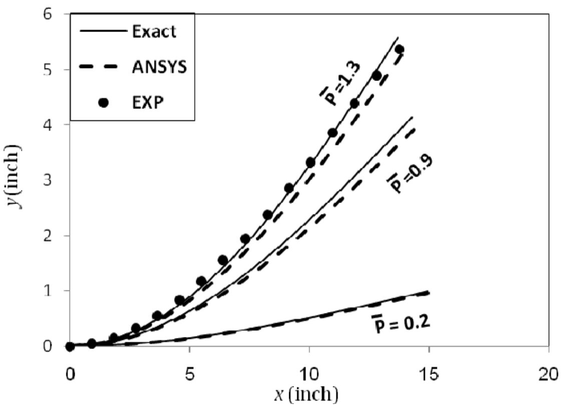
جدول (۱): مشخصات تير انعطاف پذير همسانگرد

Parameter	Value
E	2.84×10^{7}(psi)
Width× Thickness (b× h)	2×0.02(in^2)
Length (L)	15(in)
I	1.333×10^{-6}(in^4)
$\overline{P}$	1.3,0.9,0.2
α	90º

۴-۱- نتايج حل تحليلي و حل المان محدود براي تيرانعطاف پذير همسانگرد

در اين مرحله علاوه بر نتايج حل تحليلي كه از مراحل مذكور در بخش [۳-۱- §] به دست مي آيد، نتايج حل المان محدود به كمك نرم افزار *انسيس* نيز براي تير انعطاف پذير همسانگرد به دست آمده است تا به عنوان ابزاري براي بررسي رفتار تير انعطاف پذير غيرهمسانگرد مورد ارزيابي قرار گيرد. حل المان محدود براي تير همسانگرد با استفاده از المان سه بعدي تركيبي solsh190 (با قابليت تطبيق با هندسه غيرخطي) انجام شده است؛ چرا كه مدت زمان لازم براي حل در *انسيس* با المان solsh190 بسيار سريع تر (كمتر از يكدهم برابر) از مدت زمان لازم با هر المان نوع solid و يا shell است.

با توجه به تكنيک هايي كه تاكنون انجام شده است [۱۸] مي توان ازتعداد كافي المان solsh190 در بعد ضخامت و طول استفاده نمود. تعداد المان هاي مناسب در هر اينچ از راستاي طولي و نيز بعد ضخامت از تير به ترتيب برابر 120 و 1000 انتخاب شده است كه نتايج آن همگرا شده و بيشترين دقت را در مقايسه با نتايج حل تحليلي دارد. شكل (۵) نشان مي‌دهد كه مي توان با اعتبار قابل قبولي، نتايج المان solsh190 را معتبر دانست. نتايج تجربي كه براي نقاطي از تير همسانگرد به فواصل مساوي 1(in) از يكديگر و شامل مختصات هندسه تغييرشكل يافته تير انعطاف پذير است [۱۲] نيز براي مقايسه نشان داده شده اند.



شكل (۵): نتايج المان محدود، حل تحليلي و تجربي براي هندسه تغييرشكل يافته تير همسانگرد جدول (۱)

۵- حل مسأله تير انعطاف پذير غير همسانگرد

حال به بررسي مسأله اي كه در آن خواص مكانيكي تير انعطاف پذير در راستاي ضخامت به طور نمايي تغيير كند، مي‌پردازيم. مقدار ثابت هاي E_0 و $1/\lambda$ به گونه اي انتخاب مي شود كه مقدار مدول الاستيک در سطح زيرين از تير برابر مدول الاستيک تير همسانگرد جدول (۱) و در سطح ديگر به ميزان تقريبي دو برابر افزايش داشته باشد.

۵-۱- مشخصات تير انعطاف پذير با خواص مكانيكي متغير

در جدول (۲) مشخصات تيرانعطاف پذير مورد نظر ذكر شده است. ابعاد هندسي و شرايط مرزي مانند تير انعطاف پذير همسانگرد جدول (۱) است.

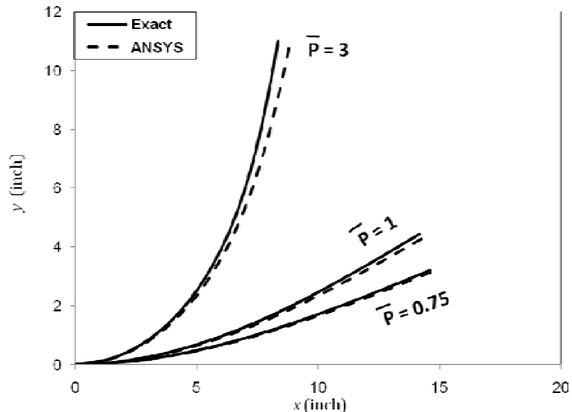
جدول (۲): خواص مكانيكي و هندسي تيرغير همسانگرد

Parameter	Value
E_0	3.986×10^{7}(psi)
λ	33.9
E_2/E_1	1.97
Width×Thickness (b×h)	2×0.02 (in^2)
L	15(in)
($\overline{P}$, α)	(0.75,45º),(1,45º),(3,45º)

۵-۲- مقايسه نتايج حل المان محدود و نتايج حل تحليلي

حل المان محدود، به كمک قابليت ماكرو نويسي در قالب يک فايل متني در نرم افزار *انسيس* و با استفاده از المان solsh190 براي تير انعطاف پذير غيرهمسانگرد و با رعايت مش بندي مناسب انجام مي‌شود [۱۹]. در شكل (۶) نتايج بدست آمده از دو روش براي تير انعطاف پذير غيرهمسانگرد جدول

(۲) مقايسه شده اند. همان گونه که مشاهده مي شود، رفتار تير در هر دو روش مذکور مشابه است. مقدار عددي نتايج دو روش در جدول (۳) آمده است؛ بنابراين نتايج *انسيس* در اين شرايط بارگذاري معتبر است.



شکل (۶): نتايج تحليلي و المان محدود براي مختصات هندسه تغييرشکل يافته تير جدول (۲)

جدول (۳): نتايج تحليلي و المان محدود براي مختصات انتهاي تير جدول (۲)

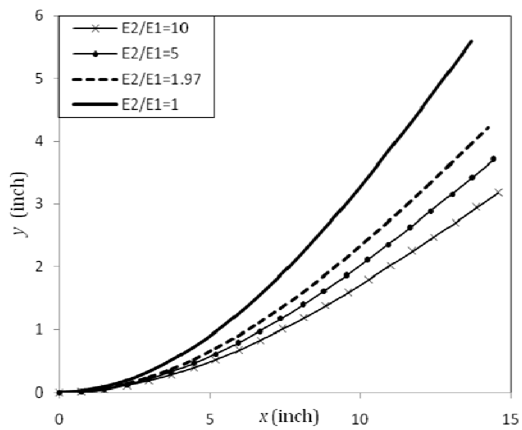
	$\overline{P}=3,\ \alpha=45°$		$\overline{P}=1,\ \alpha=45°$	
s = 15 (inch)	x_C *(inch)*	y_C *(inch)*	x_C *(inch)*	y_C *(inch)*
ANSYS	*8.8028*	*10.74*	*14.24194*	*4.2682*
Analytical	*8.35803*	*10.99463*	*14.18241*	*4.433613*

۵-۳- تأثير معکوس شدن توزيع خواص مکانيکي

در سازه هايي با خواص مکانيکي متغير، تأثير معکوس شدن توزيع خواص مکانيکي در رفتار خمشي، قابل بررسي است [۷]، [۱۸]. در جدول (۲) با انتخاب $\lambda=-33.9$ مي‌توان توزيع خواص مکانيکي را معکوس نمود. به طوري که مدول الاستيک در سطح زيرين تير، تقريباً دو برابر مدول الاستيک در سطح فوقاني آن شود. در اين مورد نتايج روش حل تحليلي و حل المان محدود بيانگر بي تأثير بودن توزيع معکوس خواص مکانيکي در بعد ضخامت، بر روي رفتار خمشي تير است به گونه اي که در هر دو حالت، مقدار جابجايي ها يکسان است.

۶- مقايسه رفتار خمشي تير انعطاف پذير همسانگرد و غيرهمسانگرد

شکل (۷) بيانگر ميزان اختلاف در رفتـار خمشي تير انعطاف پذير همسانگرد جدول (۱) و تير غيرهمسانگرد جدول (۲) با مقدار نيروي انتهايي برابر $P=0.22(lb)$ است. همچنين تأثير مقادير مختلف λ را نيز در مقدار تغييرشکل نشان مي دهد. همان گونه که مشاهده مي شود با تغيير خواص تير از همسانگرد به غيرهمسانگرد ميزان تغييرات در رفتار خمشي بسيار بيشتر از حالتي است که دو تير غيرهمسانگرد با يکديگر مقايسه مي شوند (حتي اگر ميزان تغييرات خواص مکانيکي در آنها بيشتر از ميزان تغييرات خواص از همسانگرد به غيرهمسانگرد باشد). به طوري که اگر مقدار $E_2/E_1=1.97$ باشد آنگاه خيز خمشي - استاتيکي تير در انتهاي آزاد آن با کاهشي تا 25% نسبت به $E_2/E_1=1$ همراه خواهد شد. اما وقتي در دو تير غيرهمسانگرد مقدار E_2/E_1 تقريباً پنج برابر شود ميزان کاهش خيز انتهاي تير برابر 25% است.



شکل (۷): مقايسه رفتـار خمشي تير همسانگرد و تير غيرهمسانگرد

۷- نتيجه گيري

در اين مقاله فرمولبندي مسأله تغييرشکل هاي بزرگ در تيرانعطاف پذير غيرهمسانگرد که با هندسه غيرخطي همراه بوده، شامل يک معادله ديفرانسيل معمولي غيرخطي مرتبه دوم مي‌شود، به دست آمده است. اين معادله با روش تحليلي حل شده است. از جمله نتايج اين تحقيق عبارتند از؛

- با ارائه حل تحليلي تعميم داده شده، امکان تأئيد نتايج مدل هاي پيچيده سه بعدي، بدون نياز به آزمايش هاي زمانبر و هزينه بر پديد آمده است.

- با معکوس نمودن نحوه توزيع خواص مکانيکي در راستاي ضخامت، ميزان تغيير شکل استاتيکي در تير انعطاف پذير غيرهمسانگرد تغيير نمي کند.

- در توزيع نمايي خواص مکانيکي در راستاي ضخامت از تيرانعطاف پذير يکسر گيردار، ميزان اختلاف تغييرشکل استاتيکي تحت بار انتهايي ثابت نسبت به توزيع يکنواخت

به طور غيرخطي به توان تابع نمايي وابسته است.

در تحقيقات بعدي، با استفاده از روش‌هاي عددي و نيمه تحليلي، معادله حاكم بر تير انعطاف پذير غيرهمسانگرد تحت نيرو و وزن تير و ممان انتهايي به همراه نيروها و ممان‌هايي در طول تير، كه شرايط عملكرد *عملگرهاي پيزو* را شبيه سازي كند، حل خواهد شد.

۸- مراجع

[۱] Atsumi Ohtsuki; Fernand Ellyin, "Large deformation analysis of a square frame with rigid joints" Thin-Walled Structures (38) 79–91, 2000.

[۲] J.P. Khatait; et al."Compliant design for flapping mechanism: a minimum torque approach", Mech. Mach. Theory 41 (1) 3–16, 2006.

[۳] Korayem, M.H.; Nikoobin, A. "Formulation and Numerical Solution of Robot Manipulators in Point-to-Point Motion with Maximum Load Carrying Capacity", Scientia Iranica, Vol. 16, No 1, pp 101-109, February 2009.

[٤] M.T. Piovan; R. Sampaio, "Vibrations of axially moving flexible beams made of functionally graded materials", Thin-Walled Structures (46) 112–121, 2008.

[٥] B.V. Sankar, "An elasticity solution for functionally graded beams", Composites Science and Technology, 61, 689–696, 2001.

[٦] Zheng Zhong, Tao Yu, "Analytical solution of a cantilever functionally graded beam", Composites Science and Technology, 67, 481–488, 2007.

[۷] Rahimi, G.H. ; Davoodinik, A.R., "Thermal behavior analysis of the functionally graded Timoshenko's beam", IUST, International Journal of Engineering Science, No.5-1, Vol. 19, 105-113, 2008.

[۸] Pai, P. E.; Nayfeh, A. H., "A nonlinear composite beam theory", Nonlinear Dynamics, 3, 273-303, 1992a.

[۹] Pai, P.F.; Palazotto, A.N.; Greer, J.M.; "Polar decomposition and appropriate strains and stresses for nonlinear structural analyses", Computers & Structures, 66, 6, 823-840, 1998.

[۱۰] Pai, P. E.; Nayfeh, A. H., "A new method for the modeling of geometric nonlinearities in structures", Computers & Structures, 53, 877-895, 1994c.

[۱۱] Malvern, L. E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall, New Jersey, Pages; 85, 107, 110, 215, 252, 376, 1969.

[۱۲] Pai, P. F.; Anderson, T. J.; Wheater, E. A., "Large-deformation tests and total-Lagrangian finite-element analyses of flexible beams", International Journal of Solids and Structures, 37, 2951-2980, 2000.

[۱۳] R. Frisch-Fay.; "Flexible Bars", LONDON, BUTTERWORTHS, 1969.

[۱٤] Kimball, C.; Tsai, L. W.; "Modeling of flexural beams subjected to arbitrary end loads" , ASME J. Mech. Des., 124, 223-234, 2002.

[۱٥] Banerjee, A. et al., “Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity: Analytical and numerical approaches”, International Journal of Non-Linear Mechanics 43, pp.366 – 376 ,2008.

[۱٦] Rahimi, G.H.; Davoodinik, A.R., "Large deflection of functionally graded cantilever flexible beam with geometric non-linearity: Analytical and Numerical approaches", Scientia Iranica, Vol. 17, No. 1, pp.25-40 February 2010.

[۱۷] Shyang-Ho Chi; Yen-Ling Chung, "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part I: Analysis", Inter. J. of Solids and Structures, 43, 3657-3674, 2006.

[۱۸] Glaucio, H. P.; Jeong-Ho Kim, "The Weak Patch Test for Nonhomogeneous Materials Modeled with Graded Finite Elements", J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng., Vol. XXIX, No. 1 ,2007.

[۱۹] "ANSYS Structural Analysis Guide", ANSYS Release 10.0.