کنترل مقاوم گشتاور ربات‌هاي سيار چرخ دار با وجود اغتشاشات سينماتيكي

اسلام محمدپور[i]؛ مهيار نراقي[ii]*

چكيده

در اين مقاله كنترل مقاوم ربات‌هاي سيار با وجود اغتشاشات خارجي و نامعيني‌هاي پارامتري سيستم ديناميكي كه قيد سينماتيكي غيرهولونوميك[۱] عدم لغزش را برآورده نمي‌كنند، مورد بررسي قرار گرفته است. برخلاف كارهاي قبلي كه بر روي طراحي كنترل سينماتيكي متمركز شده‌اند، يك كنترلر مقاوم گشتاور بر اساس نوسانگر ديناميك ميرا با فركانس نوسان قابل تنظيم، به صورت يك روش يگانه[۲] براي هر دو مسأله رديابي مسير مرجع و پايدارسازي ربات حول وضعيت ثابت توسعه يافته است. كنترلر پيشنهادي، همگرايي نمايي خطاي ردیابي را به يك همسايگي كوچك دلخواه از مبدأ تضمين مي‌كند. براي نشان دادن عملكرد كنترلر پيشنهادي، نتايج شبيه سازي براي دو نمونه از ربات هاي رانش تفاضلي و فرمانش لغزشي ارائه شده است.

كلمات كليدي : كنترل مقاوم، اغتشاشات سينماتيكي، پايدارسازي حول وضعيت ثابت، ردیابي مسير مرجع، ربات‌هاي سيار چرخ‌دار

Robust Torque Control of Wheeled Mobile Robots with Kinematic Disturbances

E. Mohammadpour, M. Naraghi

ABSTRACT

In this paper, robust control of the wheeled mobile robots in presence of external disturbances and parameter uncertainties of the dynamical system violating the nonholonomic kinematic constraint of non-slipping is presented. Despite to the previous works focused on the kinematic control design, a robust torque control developed as a unified approach for both of the tracking and regulation problems based on the tunable dynamic oscillator. The proposed controller guarantees that the tracking error converges exponentially to an arbitrarily small neighborhood of the origin. To demonstrate the performance of the proposed controller, simulation results for typical differential drive and skid steer mobile robots presented.

KEYWORDS : Robust Control, Kinematic Disturbances, Posture Stabilization, Trajectory Tracking, Wheeled mobile robots

---

تاريخ دريافت مقاله:۱۳۸۸/۱/۱۹

تاريخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۹/۸/۱۶

[i] دانشجوي دكترا، دانشكده مهندسي مكانيك، دانشگاه صنعتي اميركبير؛ mohammadpour@aut.ac.ir

[ii] * نويسنده مسئول و استاديار، دانشكده مهندسي مكانيك، دانشگاه صنعتي اميركبير؛ naraghi@aut.ac.ir ، تلفن: ۶۴۵۴۳۴۴۹-۰۲۱، نمابر: ۶۶۴۱۹۷۳۶-۰۲۱

۱- مقدمه

امروزه ربات‌هاي سيار در بسياري از كاربردهاي صنعتي مورد استفاده قرار مي‌گيرند. به همين دليل در سال‌هاي اخير كنترل بازخور اين ربات‌ها براي اهداف ردیابي مسير و پايدارسازي مورد توجه بسياري از محققين بوده است. بر اساس قضيه براكت [۱] هيچ بازخور هموار استاتيكي از متغيرهاي حالت وجود ندارد كه بتواند يك سيستم غيرهولونوميك با پويايي محدود را حول يك وضعيت ثابت پايدار كند [۲]. بنابراين روش‌هاي گوناگوني براي پايدارسازي ربات‌هاي سيار غيرهولونوميك ارائه شد كه بطور كلي مي‌توان آنها را به دو گروه كنترلرهاي ناپيوسته و كنترلرهاي هموار متغير با زمان تقسيم نمود. كنترلرهاي هموار متغير با زمان به‌وسيله سمسون [۳]، [۴] گسترش يافت در حاليكه كنترلرهاي ناپيوسته به شكل‌هاي مختلف طراحي شدند [۵]-[۹].

بسياري از اين كنترلرها در سطح سينماتيكي طراحي شدند كه در آنها سرعت‌هاي خطي و زاويه‌اي ربات ورودي‌هاي كنترلي هستند. در واقع در اين تحقيقات فرض مي‌شود كه يك كنترلر ديناميكي وجود دارد به گونه‌اي كه بتواند سرعت‌هاي مورد نياز كنترلر سينماتيكي را به طور كامل در هر لحظه فراهم نمايد. اما در عمل، مدل‌سازي ربات در سطح ديناميكي كه در آن گشتاورها و نيروها ورودي‌هاي كنترلي باشند، رويكرد واقعي‌تري است. از سوي ديگر تعيين مقادير دقيق پارامترهاي يك ربات سيار واقعي تقريبا غير ممكن است. بنابراين براي غلبه بر نامعيني‌هاي پارامتري و اغتشاشات خارجي در سيستم‌هاي ديناميكي كنترلرهاي مقاوم توسعه پيدا كردند.

در مرجع [۱۰] با در نظر گرفتن عدم قطعيت‌هاي پارامتري، كنترلر تطبيقي براي گروهي از سيستم‌هاي مكانيكي غيرهولونوميك در سطح ديناميكي طراحي شده است. جي[۳] و همكارانش [۱۱]، پايدارسازي سيستم‌هاي زنجيره‌اي را با در نظر گرفتن اثرات نامعيني‌هاي پارامتري و اغتشاش با كنترل تطبيقي مقاوم مورد بررسي قرار دادند. در اين روش ابتدا معادلات ديناميكي سيستم به صورت شبه متقارن زنجيره‌اي تبديل شدند و سپس كنترل تطبيقي براي درنظر گرفتن اثر نامعيني‌هاي پارامتري و مود لغزش براي حذف اثر اغتشاش مورد استفاده قرار گرفت. در مرجع [۱۲] نيز ردیابي مسير مرجع يك ربات دو چرخ با در نظر گرفتن اثرات نامعيني‌هاي پارامتري و اغتشاش با استفاده از روش بازگشت به عقب انجام شده است. ديكسون[۴] و همكارانش [۱۳] با استفاده از روش بازگشت به عقب، كنترلر تطبيقي طراحي نموده‌اند كه براي هر دو هدف ردیابي مسير و پايدارسازي قابل استفاده است. ما[۵] و تسو[۶] [۱۴] از يک کنترلر مقاوم براي پايدارسازي نمايي كلي ربات‌هاي سيار با در نظر گرفتن نامعيني‌هاي پارامتري استفاده نموده‌اند. به تازگي در مرجع [۱۵] از يك كنترلر تطبيقي براي ردیابي مسير مرجع يك ربات با در نظر گرفتن ديناميك موتورها استفاده شده است. هم‌چنين در مرجع [۱۶] يك كنترلر مقاوم تطبيقي براي ردیابي مسير مرجع ربات با استفاده از مود لغزشي طراحي شد. در اين تحقيقات همواره فرض شده است كه قيد عدم لغزش ربات برقرار است. در حاليكه در حركت‌هاي سريع ربات‌هاي واقعي در پيچ‌ها، ممكن است نيروي اصطكاكي جانبي ربات آن اندازه بزرگ نباشد كه بتواند از لغزش جانبي چرخ‌ها جلوگيري نمايد و بنابراين قيد سينماتيكي عدم لغزش برآورده نشود. هم‌چنين ربات‌هاي فرمانش لغزشي[۷] به علت وجود لغزش جانبي در چرخ‌هايشان در مانورهاي چرخشي، همواره قيد عدم لغزش ربات را برآورده نمي‌كنند.

گروهي از محققين با فرض برقرار نبودن قيد عدم لغزش ربات اقدام به طراحي قانون كنترل نمودند. در مرجع [۱۷] يك كنترلر سينماتيكي براي پايدارسازي ربات با استفاده از كنترلر مود لغزشي گسسته با زمان بكار گرفته شده است. ديكسون و همكارانش [۱۸] يك كنترلر سينماتيكي با استفاده از نوسانگر ديناميكي ارائه داده‌اند كه مي‌تواند هم زمان ردیابي مسير مرجع و پايدارسازي حول وضعيت را با وجود هر نوع اغتشاش كراندار در قيد سينماتيكي انجام دهد. كازلوفسكي[۸] و پازدرسكي[۹] [۱۹]، [۲۰] در تحقيقات خود بر روي ربات‌هاي فرمانش لغزشي، كنترلرهاي سينماتيكي بر پايه نوسانگر ديناميكي ديكسون طراحي نمودند. بر خلاف اين تحقيقات كه بر روي طراحي كنترل سينماتيكي متمركز شدند، گروهي از محققين، كنترل ربات‌هاي سيار با فرض برقرار نبودن قيد عدم لغزش ربات را در سطح ديناميكي مورد بررسي قرار دادند. در مراجع [۲۱] و [۲۲] مساله ردیابي مسير مرجع ربات‌هاي سيار در سطح ديناميكي بر اساس معلوم بودن مقادير دقيق پارامترهاي سيستم مورد مطالعه و بررسي قرار گرفته است. ونگ[۱۰] و همكارانش [۲۳] يك كنترلر مقاوم تطبيقي براي ردیابي مسير مرجع با استفاده از روش بازگشت به عقب ارائه دادند كه در آن فرض شده بود كه اندازه اغتشاش سينماتيكي با مجذور سرعت زاويه‌اي ربات متناسب باشد. گفتني است كه كنترلرهاي طراحي شده در سطح ديناميكي مساله ردیابي مسير مرجع را مورد بررسي قرار داده‌اند و هم‌چنين بر روي نوع خاصي از اغتشاش در قيد سينماتيكي معروف به "اغتشاش غيرمنطبق[۱۱]" متمركز شده‌اند.

در اين مقاله يك كنترلر مقاوم گشتاور با وجود هر نوع اغتشاش كراندار در قيد سينماتيكي براي رديابي مسير مرجع و پايدارسازي حول وضعيت ارائه شده است و همگرايي نمايي خطاي رديابي به يك همسايگي كوچك دلخواه از مبدأ اثبات مي‌شود.

۲- مدل‌سازي ربات

در اين بخش ابتدا مدل سينماتيكي و ديناميكي ربات با وجود اغتشاش در قيد غيرهولونوميك سينماتيكي سيستم ارائه مي‌شود. سپس با انتقال مختصات مدل، معادلات سيستم را به يك شكل مناسب براي اهداف كنترلي تبديل مي‌نماييم.

۲-۱- مدل سينماتيكي و ديناميكي ربات

مدل سينماتيكي يك چرخ تنها[۱۲] كه براي مدل‌سازي بسياري از ربات‌هاي سيار بكار مي‌رود، به صورت (۱) است [۱۸]:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v} \qquad (۱)$$

كه در آن $\boldsymbol{q} = [x_c \quad y_c \quad \theta]^T$ بردار متغيرهاي حالت، $\boldsymbol{v} = [v_x \quad \Omega]^T$ بردار سرعت و $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})$ عبارت است از:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در سيستم (۱) رابطه زير كه به قيد عدم لغزش معروف است برقرار است:

$$\dot{x}_c \sin\theta - \dot{y}_c \cos\theta = 0$$

حال فرض كنيد كه به علت وجود لغزش در چرخ‌ها اين قيد برآورده نشود، در اينصورت رابطه (۱) به (۲) تبديل مي‌شود [۱۸]:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{q},t) \qquad (۲)$$

كه در آن $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{q},t) = [d_1 \quad d_2 \quad d_3]^T$ يك اغتشاش نامعلوم از متغيرهاي حالت و زمان است، به طوري كه:

$$\forall t \geq 0\ ,\ \forall \boldsymbol{q} \in \chi \ \Rightarrow\ |\boldsymbol{d}(\boldsymbol{q},t)| \leq \boldsymbol{D} \qquad (۳)$$

كه در آن χ هر زير مجموعه فشرده‌اي از $\Re^3$ بوده و $\boldsymbol{D} = [D_1 \quad D_2 \quad D_3]^T$ يك بردار ثابت معلوم است.

مدل ديناميكي سيستم را به صورت (۴) در نظر مي‌گيريم [۱۸]:

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\tau}_d = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\tau} \qquad (۴)$$

كه در آن $\boldsymbol{M} \in \Re^{2\times 2}$ ماتريس ثابت اينرسي، $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) \in \Re^2$ بردار اثرهاي اصطكاكي، $\boldsymbol{B} \in \Re^{2\times 2}$ ماتريس ورودي، $\boldsymbol{\tau} \in \Re^2$ بردار گشتاورهاي ورودي و $\boldsymbol{\tau}_d \in \Re^2$ بردار اغتشاشات نامعين خارجي و ديناميك‌هاي مدل نشده سيستم هستند.

۲-۲- انتقال مختصات مدل

خطاي رديابي را به صورت زير در نظر مي‌گيريم:

$$\tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_r$$

كه در آن $\boldsymbol{q}_r = [x_r \quad y_r \quad \theta_r]^T$ بيانگر مسير مرجع متغيرهاي حالت است، به طوري كه:

$$\dot{\boldsymbol{q}}_r = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}_r)\boldsymbol{v}_r \qquad (۵)$$

همچنين فرض مي‌شود كه $\boldsymbol{v}_r$، $\dot{\boldsymbol{v}}_r$، $\boldsymbol{q}_r$ و $\dot{\boldsymbol{q}}_r$ در همه زمان‌ها كراندار باشند. با استفاده از انتقال مختصات معكوس پذير (۶) [۱۹]:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}(\theta,\tilde{\theta})\tilde{\boldsymbol{q}} \qquad (۶)$$

كه در آن $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}^{*T} \quad x_3]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ و

$$\boldsymbol{P}(\theta,\tilde{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\tilde{\theta}\cos\theta + 2\sin\theta & -\tilde{\theta}\sin\theta - 2\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

به معادلات انتقال يافته (۷) خواهيم رسيد [۱۹]:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}^* &= \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\rho}^* \\ \dot{x}_3 &= \boldsymbol{x}^{*T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{u} + f + \rho_3 \end{aligned} \qquad (۷)$$

كه در آن $f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{v}_r) = 2(v_{r_2}x_2 - v_{r_1}\sin x_1)$ و $\boldsymbol{J} \in \Re^{2\times 2}$ يك ماتريس شبه متقارن بوده كه عبارت است از:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

و ورودي كمكي $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{v}$ نيز به شكل (۸) با هم ارتباط پيدا مي‌كنند:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{v} - [v_{r_2} \quad v_{r_1}\cos\tilde{\theta}]^T \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Pi} \end{aligned} \qquad (۸)$$

كه در آن:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_c\sin\theta - \tilde{y}_c\cos\theta & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} v_{r1}\cos\tilde{\theta} + v_{r2}(\tilde{x}_c\sin\theta - \tilde{y}_c\cos\theta) \\ v_{r2} \end{bmatrix}$$

همچنين $\boldsymbol{\rho}^*$ و ρ_3 كه در (۷) آمده‌اند، از رابطه (۹) بدست مي‌آيند:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}^* &= \left[d_3 \quad d_1\cos\theta + d_2\sin\theta - \frac{d_3}{2}(x_3 + x_1x_2) \right]^T \\ \rho_3 &= 2(d_1\sin\theta - d_2\cos\theta) \\ &\quad + d_3\left(x_2 + \frac{x_1}{2}(x_3 + x_1x_2) \right) \\ &\quad - x_1(d_1\cos\theta + d_2\sin\theta) \end{aligned} \qquad (۹)$$

با ضرب دو طرف (۴) در ماتریس $\boldsymbol{T}^T$ و استفاده از (۸)، معادلات دینامیك سیستم در دستگاه جدید به صورت (۱۰) بدست می‌آیند [۱۸]:

$$\bar{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{u}}+\bar{\boldsymbol{V}}_m\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{N}}+\bar{\boldsymbol{\tau}}_d=\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\tau} \qquad (۱۰)$$

که در آن:

$$\bar{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{T},\quad \bar{\boldsymbol{V}}_m=\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{T}},\quad \bar{\boldsymbol{N}}=\boldsymbol{T}^T\left(\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{\Pi}}+\boldsymbol{E}\right)$$
$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_d=\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{\tau}_d,\quad \bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{B}$$

اکنون ویژگی‌هایی را که در طراحی کنترلرها مورد استفاده قرار خواهند گرفت، در مدل دینامیکی سیستم در نظر می‌گیریم که عبارتند از [۲۴]:

ویژگی ۱. ماتریس اینرسی انتقال یافته $\bar{\boldsymbol{M}}$، حقیقی، متقارن و مثبت معین است و بنابراین طبق قضیه ریلی ریتز داریم:

$$\forall\zeta\in\Re^2 \qquad m_1\|\zeta\|^2\le\zeta^T\bar{\boldsymbol{M}}\zeta\le m_2(\boldsymbol{x})\|\zeta\|^2$$

که در آن m_1 یك ثابت حقیقی مثبت معلوم و $m_2(\boldsymbol{x})$ تابع مثبت معلومی است که اگر آرگومان آن کراندار باشد، کراندار خواهد بود (m_1 و $m_2(\boldsymbol{x})$ به ترتیب بیانگر مقادیر ویژه کمینه و بیشینه $\bar{\boldsymbol{M}}$ هستند). همچنین می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\forall\zeta\in\Re^2 \qquad \frac{1}{m_2(\boldsymbol{x})}\|\zeta\|^2\le\zeta^T\bar{\boldsymbol{M}}^{-1}\zeta\le\frac{1}{m_1}\|\zeta\|^2$$

ویژگی ۲. ماتریس $\dot{\bar{\boldsymbol{M}}}-2\bar{\boldsymbol{V}}_m$ شبه متقارن است یعنی:

$$\forall\boldsymbol{X}\in\Re^2 \qquad \boldsymbol{X}^T\left(\dot{\bar{\boldsymbol{M}}}-2\bar{\boldsymbol{V}}_m\right)\boldsymbol{X}=0$$

ویژگی ۳. دینامیك ربات بدون وجود اغتشاشات خارجي و دینامیك هاي مدل نشده به صورت زیر قابل خطي‌سازي است:

$$\bar{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{u}}+\bar{\boldsymbol{V}}_m\boldsymbol{u}+\bar{\boldsymbol{N}}=\boldsymbol{Y}\vartheta$$

که در آن ϑ بردار پارامترهاي ثابت سیستم و $\boldsymbol{Y}$ ماتریس رگرسیون سیستم است.

۳- کنترل ربات

در این بخش یك قانون کنترل سینماتیکي بر اساس نوسانگر دینامیك [۱۹] براي ردیابي مسیر مرجع و پایدارسازي ربات بدست مي‌آید. سپس با استفاده از روش استاندارد بازگشت به عقب، یك کنترلر مقاوم با وجود نامعیني‌هاي پارامتري، اغتشاشات خارجي و دینامیك‌هاي مدل نشده طراحي مي‌شود.

تعریف مساله: بردار وروديهاي کنترلي ($\boldsymbol{v}$ یا $\boldsymbol{\tau}$) را طوري پیدا کنید که به ازاي هر مقدار اولیه $\tilde{\boldsymbol{q}}(0)$ داشته باشیم:

$$\lim_{t\to\infty}\|\tilde{\boldsymbol{q}}(t)\|<\varepsilon$$

که در آن $\varepsilon>0$ یك مقدار کوچك دلخواه است.

۳-۱- کنترل سینماتیکي ربات

بردار متغیرهاي حالت جدید را به صورت (۱۱) در نظر مي‌گیریم [۱۹]:

$$z=\left[z^{*T}\quad z_3\right]^T=\left[\boldsymbol{x}^{*T}-\boldsymbol{x}_d^{*T}\quad x_3+\boldsymbol{x}_d^{*T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}^*\right]^T \qquad (۱۱)$$

که در آن $\boldsymbol{x}_d^*$ یك سیگنال کمکي است که به وسیله نوسانگر خطي زیر تولید مي‌شود:

$$\boldsymbol{x}_d^*=\boldsymbol{\Psi}\xi$$

که $\boldsymbol{\Psi}=diag\{\psi_1,\psi_2\}$ یك ماتریس مثبت معین است و ξ از حل معادله زیر بدست مي‌آید [۱۹]:

$$\dot\xi=u_w\boldsymbol{J}\xi,\qquad\|\xi(0)\|=1$$

که u_w بیانگر فرکانس لحظه‌اي نوسانگر است. مي‌توان به سادگي نشان داد که:

$$\frac{d}{dt}\left(\xi^T\xi\right)=0\ \Rightarrow\ \forall t\ge0\quad\|\xi(t)\|=\|\xi(0)\|=1$$

با مشتق‌گیري از (۱۱) معادلات دینامیکي سیستم به صورت (۱۲) بدست مي‌آیند:

$$\begin{bmatrix}\dot z^*\\ \dot z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}-\dot{\boldsymbol{x}}_d^*+\boldsymbol{\rho}^*\\ \left(\boldsymbol{x}^{*T}+\boldsymbol{x}_d^{*T}\right)\boldsymbol{J}\boldsymbol{u}+\dot{\boldsymbol{x}}_d^{*T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{x}_d^{*T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho}^*+\rho_3+f\end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

با توجه به روابط (۳) و (۹) کران بالاي $\|\boldsymbol{\rho}^*\|$ و $|\rho_3|$ به صورت (۱۳) خواهد بود:

$$\|\boldsymbol{\rho}^*\|\le\Pi^*,\quad|\rho_3|\le\Pi_3 \qquad (۱۳)$$

که در آن:

$$\Pi^*\ge\left\{D_3^2+\left(D_1+D_2+\frac{D_3}{4}\left[2|z_3|+\|z^*\|^2+\|\boldsymbol{x}_d^{*2}\|\right]\right)^2\right\}^{0.5}$$

$$\Pi_3\ge(D_1+D_2)\left(2+\|z^*\|+\|\boldsymbol{x}_d^*\|\right)+\frac{D_3}{4}\left(\|z^*\|+\|\boldsymbol{x}_d^*\|\right)\left\{4+2|z_3|+\|z^*\|^2+\|\boldsymbol{x}_d^*\|^2\right\}$$

ψ_1 , ψ_2 را به صورت (۱۴) در نظر مي‌گیریم:

$$\psi_i=a_i\,exp(-\alpha_it)+\varepsilon_i\qquad i=1,2 \qquad (۱۴)$$

بنابراین مي‌توان نشان داد که:

$$\|\boldsymbol{x}_d^*\|\le\sqrt{(a_1+\varepsilon_1)^2+(a_2+\varepsilon_2)^2}=a_d \qquad (۱۵)$$

قضیه ۱. سیستم (۱۲) با ورودي كنترلي:

$$\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{x}}_d^* - k_1 \boldsymbol{z}^* - \boldsymbol{h}^* \qquad (۱۶)$$

و فركانس لحظه‌اي نوسانگر:

$$u_w = \frac{1}{\psi_1 \psi_2}\Big\{k_2 z_3 + \xi^T \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\Psi}}\xi + 2k_1 \boldsymbol{z}^{*T} \boldsymbol{J}\boldsymbol{x}_d^* - 2\boldsymbol{x}_d^{*T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{h}^* + f + h_3 + h_3'\Big\} \qquad (۱۷)$$

كه در آنها:

$$\begin{aligned} h_3 &= g(z_3, \Pi_3, o_3) \\ h_3' &= g(z_3, \Pi^* a_d, o_3') \\ \boldsymbol{h}^* &= g(\boldsymbol{z}^*, \Pi^*, \varepsilon^*) \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

و

$$g(\boldsymbol{x}, a, \varepsilon) = \frac{a^2 \boldsymbol{x}}{a\|\boldsymbol{x}\| + \varepsilon} \qquad (۱۹)$$

با فرض مثبت بودن ثابت‌هاي k_1، k_2، o_3'، o_3 و ε^* بـه شـكل (۲۰)، GUUB [13] است.

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{z}^*(t)\| &\le \sqrt{\|\boldsymbol{z}^*(0)\|^2 exp(-2k_1 t) + \frac{\varepsilon^*}{k_1}(1 - exp(-2k_1 t))} \\ |z_3(t)| &\le \sqrt{z_3^2(t) exp(-2k_2 t) + \frac{\varepsilon_3}{k_2}(1 - exp(-2k_2 t))} \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

كه در آن $\varepsilon_3 = o_3 + o_3'$.

اثبات:

ابتدا نشان مي‌دهيم كه ويژگي (۴) براي تابع $g(\boldsymbol{x},a,\varepsilon)$ كه در واقع تقريبي از a برابر تابع علامت $sign(\boldsymbol{x})$ است، برقرار است.

ويژگي ۴. اگر $\|\boldsymbol{b}\| \le a$, $\boldsymbol{b} \in \Re^n$ باشد آنگاه:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Re^n \;\rightarrow\; \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{b} - g(\boldsymbol{x}, a, \varepsilon)) \le \varepsilon$$

اثبات:

$$\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{b} - g(\boldsymbol{x}, a, \varepsilon)) \le \|\boldsymbol{x}\|a - \frac{a^2\|\boldsymbol{x}\|^2}{a\|\boldsymbol{x}\| + \varepsilon} = \frac{a\|\boldsymbol{x}\|}{a\|\boldsymbol{x}\| + \varepsilon}\varepsilon \le \varepsilon$$

با توجه به روابط (۱۲)، (۱۶) و (۱۷) ديناميك حلقه بسته سيستم به صورت (۲۱) بدست مي‌آيد:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}}^* &= -k_1 \boldsymbol{z}^* + (\boldsymbol{\rho}^* - \boldsymbol{h}^*) \\ \dot{z}_3 &= -k_2 z_3 + (\rho_3 - h_3) + (\boldsymbol{x}_d^{*T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho}^* - h_3') \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

تابع لياپانوف شعاعي بي‌كران[14] مثبت معين (۲۲) را در نظر مي‌گيريم.

$$V_{11} = \frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{*T}\boldsymbol{z}^* \qquad (۲۲)$$

با مشتق‌گيري از تابع (۲۲) و استفاده از معادله اول (۲۱) رابطه زير بدست مي‌آيد:

$$\dot{V}_{11} = -k_1 \boldsymbol{z}^{*T}\boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{z}^{*T}(\boldsymbol{\rho}^* - \boldsymbol{h}^*)$$

حال با استفاده از ويژگي ۴ مي‌توان به سادگي نشان داد كه:

$$\dot{V}_{11} \le -k_1 \boldsymbol{z}^{*T}\boldsymbol{z}^* + \varepsilon^*$$

بنابراين:

$$\dot{V}_{11} \le -2k_1 V_{11} + \varepsilon^*$$

حال با استفاده از لم ۱ ضمائم داريم:

$$V_{11}(t) \le V_{11}(0) exp(-2k_1 t) + \frac{\varepsilon^*}{2k_1}(1 - exp(-2k_1 t)) \qquad (۲۳)$$

و در پايان با توجه به (۲۲) و (۲۳) رابطه اول (۲۰) اثبات مي‌شود. حال تابع لياپانوف شعاعي بي‌كران مثبت معين (۲۴) را در نظر مي‌گيريم:

$$V_{12} = \frac{1}{2} z_3^2 \qquad (۲۴)$$

با مشتق گيري از (۲۴) و استفاده از رابطه دوم (۲۱) رابطه زير بدست مي‌آيد:

$$\dot{V}_{12} = -k_2 z_3^2 + z_3(\rho_3 - h_3) + z_3(\boldsymbol{x}_d^{*T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho}^* - h_3')$$

اكنون با استفاده از ويژگي ۴ مي‌توان به سادگي نشان داد كه:

$$\dot{V}_{12} \le -k_2 z_3^2 + \varepsilon_3 = -2k_2 V_{12} + \varepsilon_3 \qquad (۲۵)$$

بنابراين با استفاده از لم ۱ ضمائم و روابط (۲۴) و (۲۵)، رابطه دوم (۲۰) اثبات مي‌شود.

از (۲۰) مي‌توان نشان داد كه:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}^*\| &\le \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{k_1}} + \varepsilon_m = e_1 \\ \lim_{t\to\infty}|x_3| &\le \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{k_2}} + \varepsilon_m e_1 = e_2 \end{aligned}$$

كه در آن $\varepsilon_m = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$. بنابراين:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}|\tilde{x}_c|, |\tilde{y}_c| &\le \frac{1}{2}\left(e_1\sqrt{e_1^2 + 4} + e_2\right) \\ \lim_{t\to\infty}|\tilde{\theta}| &\le e_1 \end{aligned}$$

تـذكر ۱: بـا اسـتفاده از (۲۰) مـي‌تـوان نتيجـه گرفـت كـه $\boldsymbol{z}(t) \in \ell_\infty$. در نتيجـه بـا توجـه بـه اينكـه از (۱۵) $\boldsymbol{x}_d^*(t) \in \ell_\infty$ است، بنابراين با كمـك (۱۱) $\boldsymbol{x}(t) \in \ell_\infty$ خواهـد بـود. از (۱۸) و (۱۹) مشخص است كه $h_3(t), h_3'(t), \boldsymbol{h}^*(t) \in \ell_\infty$ است. بـا توجـه بـه اينكـه $\boldsymbol{v}_r(t), \boldsymbol{\Psi}(t), \xi(t) \in \ell_\infty$ اسـت، بـا اسـتفاده از (۱۴) و (۱۷) $u_w(t) \in \ell_\infty$ خواهد بود. در نتيجه $\dot{\boldsymbol{x}}_d^* \in \ell_\infty$. بنـابراين بـا توجه به (۱۶) مي‌توان نتيجه گرفت كه $\boldsymbol{u}(t) \in \ell_\infty$.

تذکر ۲: با توجه به اینکه در بدست آوردن قانون کنترل هيچ قيدي براي مسير مرجع غير از کراندار بودن $\boldsymbol{q}_r$، $\boldsymbol{v}_r$، $\dot{\boldsymbol{v}}_r$ و $\dot{\boldsymbol{q}}_r$ استفاده نشده است، بنابراين مسأله ردیابي موقعيت و جهت ربات قابل تبديل به پايدارسازي موقعيت و جهت ربات است. بنابراين اگر هدف پايدارسازي ربات به يك موقعيت ثابت دلخواه $\boldsymbol{q}_r = [x_r \quad y_r \quad \theta_r]^T$ باشد، کافي است در رابطه (۵)، عبارت $\boldsymbol{v}_r$ را برابر صفر قرار دهيم. در نتيجه عبارت $f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{v}_r)$ در (۷) نيز برابر با صفر خواهد شد. همچنين در اين حالت رابطه (۸) به شکل (۲۶) تبديل خواهد شد:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{v} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{u} \tag{۲۶}$$

۳-۲- کنترل مقاوم ربات

سيگنال خطاي بازگشت به عقب به صورت (۲۷) تعريف مي‌شود.

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u} \tag{۲۷}$$

که در آن $\boldsymbol{u}_k$ کنترلر سينماتيکي طراحي شده در قضيه ۱ و $\boldsymbol{u}$ ورودي سيستم (۱۲) است. بنابراين معادلات ديناميکي (۱۰) به شکل زير تبديل مي‌شوند:

$$\left[\overline{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{u}}_k + \overline{\boldsymbol{V}}_m\boldsymbol{u} + \overline{\boldsymbol{N}}\right] + \overline{\boldsymbol{\tau}}_d - \overline{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{\eta}} = \overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\tau}$$

با توجه به ويژگي ۳ مي‌توان عبارت داخل براکت را به شکل زير برحسب پارامترهاي سيستم خطي‌سازي کرد:

$$\overline{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{u}}_k + \overline{\boldsymbol{V}}_m\boldsymbol{u} + \overline{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{Y}_d\,\vartheta$$

که در آن $\vartheta \in \Re^p$ بردار پارامترهاي ثابت سيستم و $\boldsymbol{Y}_d \in \Re^{2\times p}$ ماتريس رگرسيون سيستم است. بردار $\boldsymbol{\kappa}_d$ به صورت (۲۸) تعريف مي‌شود:

$$\boldsymbol{\kappa}_d = \overline{\boldsymbol{M}}\dot{\boldsymbol{u}}_k + \overline{\boldsymbol{V}}_m\boldsymbol{u} + \overline{\boldsymbol{N}} + \overline{\boldsymbol{\tau}}_d = \boldsymbol{Y}_d\,\vartheta + \overline{\boldsymbol{\tau}}_d \tag{۲۸}$$

در نتيجه ديناميك خطاي $\boldsymbol{\eta}(t)$ به شکل زير بدست مي‌آيد:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \left(\overline{\boldsymbol{M}}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\kappa}_d - \overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\tau}\right)$$

قضيه ۲. سيستم معادلات ديناميکي (۱۰) و (۱۲) با گشتاور کنترلي (۲۹)

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\overline{\boldsymbol{B}}\right)^{-1}\left[\hat{\boldsymbol{\kappa}}_d + k_\eta m_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\eta} + m_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}_\eta\right] \tag{۲۹}$$

که در آن $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_d = \boldsymbol{Y}_d\,\hat{\vartheta}$ بهترين تخمين براي $\boldsymbol{\kappa}_d$، k_η ثابت مثبت کنترلي و $\boldsymbol{h}_\eta = g(\boldsymbol{\eta}, \Lambda, \varepsilon_\eta)$ است، با فرض اينکه:

$$\left\|\left(\overline{\boldsymbol{M}}\right)^{-1}\left[\boldsymbol{Y}_d\tilde{\vartheta} + \overline{\boldsymbol{\tau}}_d + \overline{\boldsymbol{M}}\left(z_3\boldsymbol{J}\left(z^* + 2\boldsymbol{x}_d^*\right) - z^*\right)\right]\right\| \le \Lambda \tag{۳۰}$$

که در آن Λ مقدار معلومي است، به شکل (۳۱) GUUB است:

$$\|\boldsymbol{Z}(t)\| \le \sqrt{\|\boldsymbol{Z}(0)\|^2 \exp(-2k_{min}t) + \frac{\varepsilon_0}{k_{min}}\left(1 - \exp(-2k_{min}t)\right)} \tag{۳۱}$$

که در آن $\varepsilon_0 = \varepsilon_3 + \varepsilon^* + \varepsilon_\eta$، $k_{min} = min\{k_1, k_2, k_\eta\}$، $\alpha_{min} = min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ و $\boldsymbol{Z}(t) = \left[z^T(t) \quad \boldsymbol{\eta}^T(t)\right]^T$.

اثبات:

تابع لياپانوف شعاعي بي‌کران مثبت معين (۳۲) را در نظر بگيريد:

$$V_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{Z}^T\boldsymbol{Z} = \frac{1}{2}z^{*T}z^* + \frac{1}{2}z_3^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{\eta} \tag{۳۲}$$

با مشتق گيري از (۳۲) و استفاده از ويژگي ۲ و قانون کنترل (۲۹) داريم:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 = &-k_1 z^{*T}z^* - k_2 z_3^2 + z^{*T}\left(\boldsymbol{\rho}^* - \boldsymbol{h}^*\right)\\ &+ z_3\left(\rho_3 - h_3\right) + z_3\left(\boldsymbol{x}_d^{*T}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho}^* - h_3'\right)\\ &+ \boldsymbol{\eta}^T\left(\overline{\boldsymbol{M}}\right)^{-1}\left[\boldsymbol{Y}_d\tilde{\vartheta} + \overline{\boldsymbol{\tau}}_d\right]\\ &+ \left(z_3\boldsymbol{J}\left(z^* + 2\boldsymbol{x}_d^*\right) - z^*\right) - k_\eta m_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\eta}\\ &- m_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}_\eta\end{aligned}$$

بنابراين با کمك ويژگي ۴:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 \le &-k_1\left\|z^*\right\|^2 - k_2 z_3^2 + \varepsilon^* + \varepsilon_3\\ &- k_\eta m_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\eta}^T\left(\overline{\boldsymbol{M}}\right)^{-1}\boldsymbol{\eta} + \Lambda\|\boldsymbol{\eta}\|\\ &- m_2(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{\eta}^T\left(\overline{\boldsymbol{M}}\right)^{-1}\boldsymbol{\eta}\Lambda^2}{\Lambda\|\boldsymbol{\eta}\| + \varepsilon_\eta}\end{aligned}$$

در نتيجه با استفاده از ويژگي ۱ و با انجام محاسبات ساده داريم:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &\le -k_1\left\|z^*\right\|^2 - k_2 z_3^2 - k_\eta\|\boldsymbol{\eta}\|^2 + \varepsilon^* + \varepsilon_3 + \varepsilon_\eta\\ &\le -2k_{min}V_2 + \varepsilon_0\end{aligned}$$

بنابراين با توجه به لم ۱ ضمائم مي‌توان رابطه (۳۳) را بدست آورد:

$$V_2(t) \le V_2(0)\exp(-2k_{min}t) + \frac{\varepsilon_0}{2k_{min}}\left(1 - \exp(-2k_{min}t)\right) \tag{۳۳}$$

در پايان به کمك (۳۲) و (۳۳)، رابطه (۳۱) بدست مي‌آيد.

حال به سادگي مي‌توان نشان داد که:

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{x}^*\right\| \le \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{k_{min}}} + \varepsilon_m = e_1'$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|x_3\right| \le \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{k_{min}}} + \varepsilon_m e_1' = e_2'$$

بنابراين:

$$\lim_{t\to\infty}\left|\tilde{x}_c\right|, \left|\tilde{y}_c\right| \le \frac{1}{2}\left(e_1'\sqrt{e_1'^2 + 4} + e_2'\right)$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|\tilde{\theta}\right| \le e_1'$$

تذکر ۳: با استفاده از (۳۲) و (۳۳) مي‌توان نتيجه گرفت که $V_2(t) \in \ell_\infty$ است. بنابراين $z(t), \boldsymbol{\eta}(t) \in \ell_\infty$. در نتيجه با توجه

به اینکه $x(t)\in\ell_\infty$ است، به کمك (۱۱) $x_d^*(t)\in\ell_\infty$ خواهد بود. از تعریف تابع $g(\cdot)$ مشخص است که $h_3(t),h_3'(t),\boldsymbol{h}^*(t),\boldsymbol{h}_\eta(t)\in\ell_\infty$ همچنین $\boldsymbol{v}_r(t),\,\xi(t),\,\boldsymbol{\Psi}(t),\,\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t)\in\ell_\infty$ است. بنابراین با استفاده از (۱۷) $u_w(t)\in\ell_\infty$. در نتیجه $\dot{x}_d^*\in\ell_\infty$ است. پس با توجه به (۱۶) میتوان نتیجه گرفت که $\boldsymbol{u}_k(t)\in\ell_\infty$ و بنابراین از (۲۷) $\boldsymbol{u}(t)\in\ell_\infty$ خواهند بود. با کمك (۱۲) و (۱۳) $\dot{z}(t)\in\ell_\infty$. بنابراین از آنجا که تابع $g(\cdot)$ در کل دامنهاش تابعی هموار است، $\dot{h}_3(t),\dot{h}_3'(t),\dot{\boldsymbol{h}}^*(t),\dot{\boldsymbol{h}}_\eta(t)\in\ell_\infty$. بنابراین $\dot{u}_w(t)\in\ell_\infty$ و در نتیجه $\dot{\boldsymbol{u}}_k(t)\in\ell_\infty$. بنابراین از (۲۸) $\boldsymbol{\kappa}_d\in\ell_\infty$ و در نتیجه $\boldsymbol{Y}_d\in\ell_\infty$ است. از (۳۰) $\tilde{\vartheta}\in\ell_\infty$ و به کمك تعریف $\tilde{\vartheta}$ میتوان نتیجه گرفت که $\hat{\vartheta}\in\ell_\infty$. در نتیجه $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_d\in\ell_\infty$. در پایان با فرض اینکه ماتریس $\bar{\boldsymbol{B}}$ معکوس پذیر باشد، با توجه به (۲۹) $\boldsymbol{\tau}\in\ell_\infty$ خواهد بود.

تذکر ۴: مانند بحث مطرح شده در تذکر ۲، در بدست آوردن قانون کنترل، هیچ قیدي براي مسیر مرجع غیر از کراندار بودن $\boldsymbol{v}_r$، $\dot{\boldsymbol{v}}_r$، $\boldsymbol{q}_r$ و $\dot{\boldsymbol{q}}_r$ استفاده نشده است، بنابراین قانون کنترل (۱۶)، (۱۷) و (۲۹) براي مسأله پایدارسازي موقعیت و جهت ربات حول وضعیت ثابت نیز قابل استفاده است.

٤- نتایج شبیه سازي

براي سنجش درستي تحلیلهاي تئوري، نتایج شبیهسازي کنترلر مقاوم طراحي شده را براي دو نمونه ربات دوچرخ رانش تفاضلي و چهارچرخ فرمانش لغزشي مورد بررسي قرار میدهیم. شرایط اولیه در هر دو حالت $\boldsymbol{q}(0)=[0\quad 1\quad 0]^T$ در نظر گرفته شده است. همچنین براي پایدارسازي رباتها حول وضعیت ثابت، وضعیت نهایي را به صورت $\boldsymbol{q}_f=[0\quad 0\quad 0]^T$ و براي ردیابي مسیر مرجع، مسیر دایروي زیر را به عنوان مسیر مرجع در نظر میگیریم:

$$x_r(t)=0.75\,sin(0.4t)$$
$$y_r(t)=0.75\,cos(0.4t)$$

که $\theta_r(t)$ از (۵) بدست میآید. همچنین فرض میشود که مؤلفههاي $\boldsymbol{\tau}_d$ نویز سفید با حداکثر دامنه ۰/۲ باشند.

٤-١- ربات رانش تفاضلي

مدل سینماتیکي ربات به صورت (۲) است که در آن اغتشاش سینماتیکي $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{q},t)=[d_1\quad d_2\quad d_3]^T$ مشابه [۱۸] عبارت است از:

$$d_1=d_0\big(H(t)-H(t-t_0)\big)sin\,\theta$$
$$d_2=-d_0\big(H(t)-H(t-t_0)\big)cos\,\theta$$
$$d_3=d_0\big(H(t)-H(t-t_0)\big)$$

که در آن d_0 و t_0 ثابتهاي مثبت و $H(\cdot)$ تابع پله هويسايد استاندارد[۱۵] است.

نمودار شماتیک یک ربات رانش تفاضلي در شکل (۱) نشان داده شده است. با توجه به این شکل معادلات دینامیکي ربات به صورت (۴) است که در آن:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0\\ 0 & \frac{L}{2r}\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})=\begin{bmatrix} F_{s1}\,sgn(v_1)+F_{d1}v_1\\ F_{s2}\,sgn(v_2)+F_{d2}v_2\end{bmatrix}$$

که در آن m جرم ربات، I ممان اینرسي ربات حول مرکز جرم، r شعاع چرخها، L پهناي ربات، $sgn(\cdot)$ بیانگر تابع علامت و ماتریس $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})$ نشان دهنده نیروهاي اصطکاکي موجود بین سطح زمین و چرخهاي ربات هستند.

از آنجا که ناپیوستگي تابع علامت با ماهیت فیزیکي رفتار نیروهاي اصطکاکي بین ربات و سطح زمین در تناقض است، به جاي تابع علامت از تابع هموار زیر استفاده میکنیم که بر اساس ایده ارائه شده در [۲۵] براي مدلسازي نیروهاي تایري بدست آمده است:

$$\hat{sgn}(u)=sgn(u)\big(1-exp(-k_v|u|)\big)$$

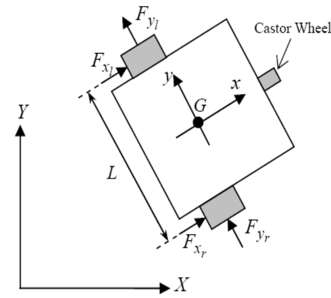
که در آن k_v ثابت مثبتي است. در شبیهسازيهاي انجام شده پارامترهاي ربات بر اساس پارامترهاي ربات **K2A** اصلاح شده در نظر گرفته شده است [۱۸]:

$$m=165\,kg\,,\ \ I=4.643\,kg.m^2$$
$$r=0.010\,m\,,\ \ L=0.667\,m$$
$$k_v=10\,,\ \ d_0=0.05\,,\ \ t_0=3\,s$$
$$F_{s1}=200\,N\,,\ \ F_{d1}=10\,kg.s^{-1}$$
$$F_{s2}=50\,N\,,\ \ F_{d2}=2\,kg.s^{-1}$$

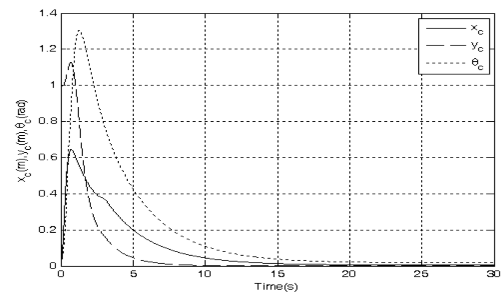
پارامترهاي کنترلر مقاوم ارائه شده در قضیه ۲ را به صورت زیر در نظر میگیریم:

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon^*=\varepsilon_\eta=0.02$$
$$k_1=k_2=1.5\,,\ \ k_\eta=4\,,\ \ a_1=a_2=2$$
$$\Lambda=\left\|z_3\boldsymbol{J}\big(\boldsymbol{z}^*+2\boldsymbol{x}_d^*\big)-\boldsymbol{z}^*\right\|+1.5$$

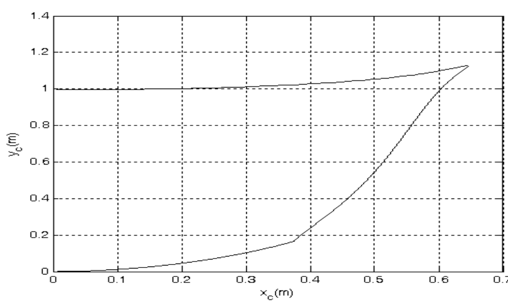
در حالت پایدارسازي حول وضعیت ثابت $\alpha_1=\alpha_2=0.3$ و در حالت ردیابي مسیر مرجع $\alpha_1=\alpha_2=0.5$ است. با فرض ۳۰% خطا براي مقادیر جرم و ممان اینرسي ربات، نتایج شبیهسازي به صورت شکلهاي (۲) تا (۷) خواهد بود.



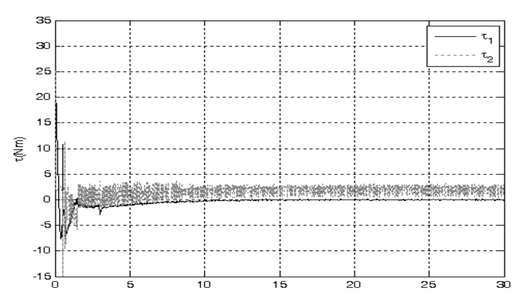
شکل (۱): ربات رانش تفاضلي



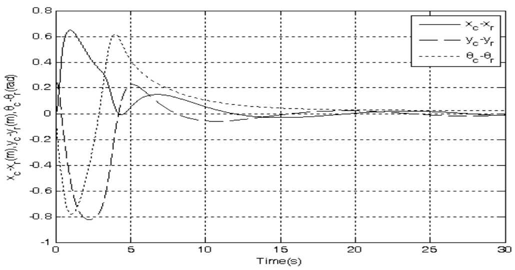
شکل (۲): پاسخ زماني متغيرهاي حالت در حالت پايدارسازي ربات رانش تفاضلي



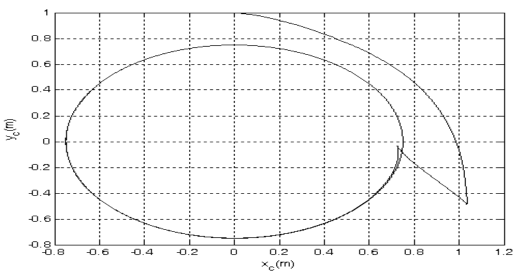
شکل (۳): مسير طي شده در صفحه مختصات در حالت پايدارسازي ربات رانش تفاضلي



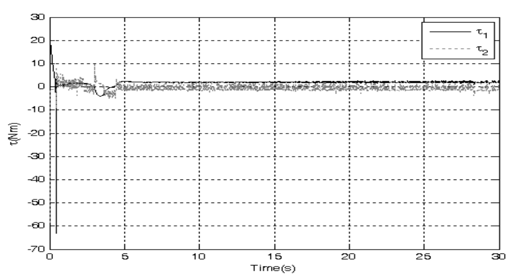
شکل (۴): گشتاورهاي اعمالي به ربات در حالت پايدارسازي ربات رانش تفاضلي



شکل (۵): پاسخ زماني خطاي متغيرهاي حالت در حالت رديابي مسير مرجع ربات رانش تفاضلي



شکل (۶): مسير طي شده در صفحه مختصات در حالت رديابي مسير مرجع ربات رانش تفاضلي



شکل (۷): گشتاورهاي اعمالي به ربات در حالت رديابي مسير مرجع ربات رانش تفاضلي

بر اساس اين شبيه‌سازي‌ها کنترلر مقاوم قادر به انجام هر دو هدف کنترلي پايدارسازي حول وضعيت ثابت و رديابي مسير مرجع است. در واقع در حالت پايدارسازي $|\tilde{x}_c| \le 5\,mm$، $|\tilde{y}_c| \le 0.5\,mm$ و $|\tilde{\theta}| \le 1.05\,deg$ و در حالت رديابي مسير مرجع $|\tilde{x}_c| \le 15\,mm$، $|\tilde{y}_c| \le 15\,mm$ و $|\tilde{\theta}| \le 1.45\,deg$ است.

٤-٢- ربات چهارچرخ فرمانش لغزشي

همان‌طور که گفته شد، ربات‌هاي فرمانش لغزشي به علت وجود لغزش جانبي در چرخ‌هايشان در مانورهاي چرخشي، همواره قيد عدم لغزش ربات را برآورده نمي‌کنند. بنابراين يکي از موارد کاربردي کنترلرهاي طراحي شده بر اساس عدم

ارضاي قيد عدم لغزش اين دسته از ربات‌ها هستند.

معادلات سينماتيكي ربات فرمانش لغزشي به صورت (۲) است كه در آن $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{q},t)$ عبارت است از:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{q},t)=\begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta & 0\end{bmatrix}^T v_y$$

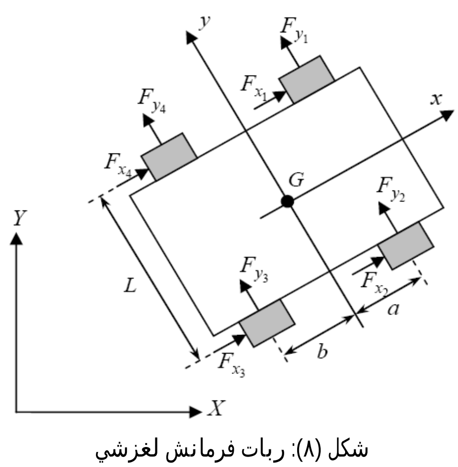
كه v_y سرعت جانبي مركز جرم ربات است. با اعمال انتقال مختصات (۶)، $\rho_3=-2v_y$ ، $\boldsymbol{\rho}^*=\boldsymbol{0}$ خواهد شد. بنابراين با فرض برقراري نامساوي $|v_y|\le v_0$ كه در آن v_0 مقدار معلومي است، مي‌توان نتيجه گرفت كه $\Pi_3=2v_0$, $\Pi^*=0$ است و بنابراين $h_3=g(z_3,\Pi_3,o_3)$ ، $h_3'=0$ و $\boldsymbol{h}^*=\boldsymbol{0}$ خواهد بود.

با توجه به شكل (۸)، معادلات ديناميكي ربات فرمانش لغزشي به صورت (۴) است كه در آن:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\frac{1}{r}\begin{bmatrix}n & n\\ -\frac{L}{2} & \frac{L}{2}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v})=\begin{bmatrix}-mv_y\omega\\ bF_{yb}-aF_{yf}\end{bmatrix}$$

كه m جرم ربات، I ممان اينرسي ربات حول مركز جرم، r شعاع چرخ‌ها، n نسبت چرخ دنده‌ها، L طول محور بين چرخ‌هاي ربات، a و b به ترتيب فاصله مركز جرم ربات از محورهاي عقب و جلو، ω سرعت دوراني ربات و F_{yf} و F_{yb} به ترتيب مجموع نيروهاي اصطكاكي جانبي چرخ‌هاي جلو و عقب ربات هستند. در شبيه‌سازي‌ها، پارامترهاي ربات به صورت زير انتخاب شده است:

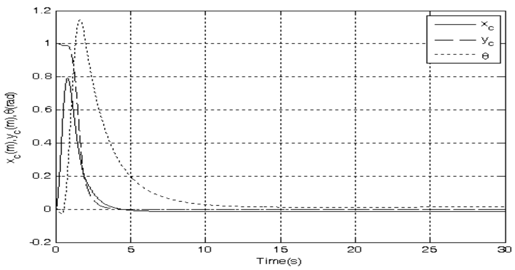
$$m=40kg,\ I=0.413kg.m^2,\ \mu=0.5,\ n=49.8$$
$$r=0.1075m,\ L=0.395m,\ g=9.81m.s^{-2}$$
$$a=0.138m,\ b=0.122m$$



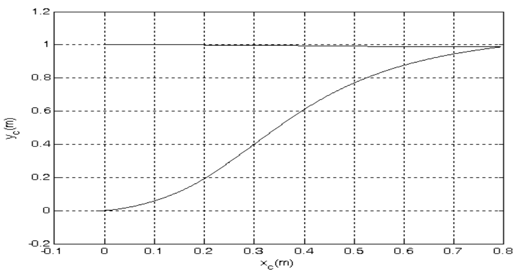
شكل (۸): ربات فرمانش لغزشي

با فرض ۳۰% خطا براي مقادير جرم و ممان اينرسي ربات و با فرض پارامترهاي كنترلر به صورت زير، نتايج شبيه‌سازي در شكل‌هاي (۹) تا (۱۲) آورده شده است.

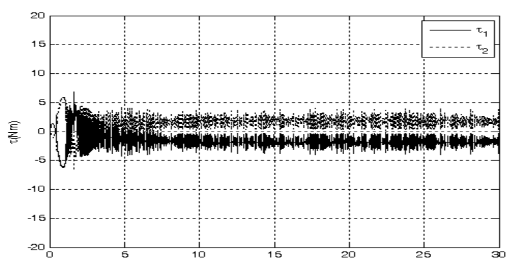
$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon^*=\varepsilon_\eta=0.02\,,\ v_0=0.3$$
$$k_1=k_2=1\,,\ k_\eta=3\,,\ a_1=a_2=2\,,\ \alpha_1=\alpha_2=0.5$$
$$\Lambda=\left\|z_3\boldsymbol{J}\left(z^*+2\boldsymbol{x}_d^*\right)-z^*\right\|+1$$



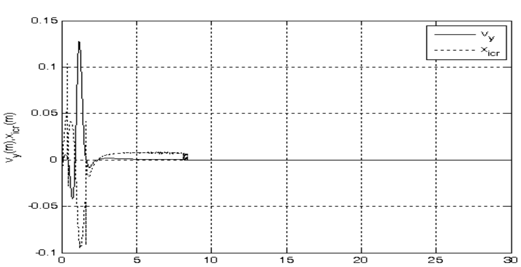
شكل (۹): پاسخ زماني متغيرهاي حالت در حالت پايدارسازي ربات فرمانش لغزشي



شكل (۱۰): مسير طي شده در صفحه مختصات در حالت پايدارسازي ربات فرمانش لغزشي



شكل (۱۱): گشتاورهاي اعمالي به ربات در حالت پايدارسازي ربات فرمانش لغزشي



شكل (۱۲): سرعت جانبي مركز جرم و مولفه طولي مركز آني دوران در حالت پايدارسازي ربات فرمانش لغزشي

بر اساس اين شبيه‌سازي‌ها كنترلر مقاوم، قادر به پايدارسازي ربات حول وضعيت ثابت است. در واقع در اين

حالت $|x_c| \le 13mm$، $|y_c| \le 0.1mm$ و $|\theta| \le 0.8\,deg$.
هم‌چنين با توجه به شكل‌هاي فوق روابط $|v_y| \le v_0$ و $-a \le x_{icr} \le b$ نيز برقرارند.

۵- نتيجه‌گيري

در اين مقاله قوانين كنترل سينماتيكي و مقاوم ديناميكي ربات ارائه شدند. كنترلرهاي پيشنهادي قادر به انجام هر دو هدف رديابي مسير مرجع و پايدارسازي حول وضعيت ثابت هستند. هم‌چنين نامعيني‌هاي پارامتري و اغتشاشات خارجي در سيستم ديناميكي كه در آن قيد سينماتيكي عدم لغزش ربات برآورده نمي‌شود، مورد بررسي قرار گرفت. در هر حالت همگرايي نمايي خطاي ردیابی به يك همسايگي كوچك دلخواه از مبدأ با استفاده از قضيه لياپانوف اثبات شد. نتايج شبيه‌سازي براي دو نمونه متفاوت ربات‌هاي رانش تفاضلي و فرمانش لغزشي نشان‌دهنده عملكرد مناسب كنترلرهاي پيشنهادي بود. در آينده كنترلرهاي طراحي شده بر روي ربات‌هاي واقعي پياده‌سازي خواهند شد.

۶- ضمائم

لم ۱ [۲۶]: فرض كنيد كه $V(t)$ يک تابع عددي نامنفي از زمان باشد كه براي آن نامساوي ديفرانسيلي زير برقرار باشد:

$$\dot{V} \le -\gamma V + \varepsilon$$

كه در آن γ و ε ثابت‌هاي مثبت هستند. در اين صورت:

$$\forall t \ge 0 \quad V(t) \le V(0)\exp(-\gamma t) + \frac{\varepsilon}{\gamma}\left(1-\exp(-\gamma t)\right)$$

۷- مراجع

[۱] Brockett, R.W.; "Asymptotic Stability and Feedback Stabilization", Differential Geometric Control Theory, R.W. Brockett, R.S. Millman, and H.J. Sussmann (Editors), Birkhauser, Boston, pp. 181-191, 1983.

[۲] Bloch, A. M.; Reyhanoglu, M.; McClamroch, and N. H.; "Control and Stabilization of Nonholonomic Dynamic Systems", IEEE Trans. on Automat Control, Vol. 37, p.p.1746-1757, 1992.

[۳] Samson, C.; "Time-varying Feedback Stabilization Control of a Car-Like Wheeled Mobile Robot", Int. J. of Robotics Research, Vol. 12, p.p. 55-66, 1993.

[۴] Samson, C.; "Control of Chained Systems Application to Path Following and Time-Varying Point-Stabilization of Mobile Robots", IEEE Trans. on Automat Control, Vol. 40, p.p. 64-77, 1995.

[۵] Bloch, A. M.; McClamroch, N. H.; and Reyhanoglu, M.; "Controllability and Stabilizability Properties of a Nonholonomic Control System", Proc. of 29th IEEE Int. Conf. on Decision and Control, Hawaii, p.p. 1312-1314, 1990.

[۶] Canudas de Wit, C.; and Sørdalen, O. J.; "Exponential Stabilization of Mobile Robots with Nonholonomic Constraints", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 37, p.p. 1791-1797, 1992.

[۷] Guldner, J.; and Utkin, V. I.; "Stabilization of Nonholonomic Mobile Robots Using Lyapunov Function for Navigation and Sliding Mode Control", Proc. of 33rd IEEE Int. Conf. on Decision and Control, p.p. 2967-2972, 1994.

[۸] Astolfi, A.; "Discontinuous Control of Nonholonomic Systems", System & Control Letters, Vol. 27, p.p. 37-45, 1996.

[۹] Pourboghrat, F.; "Exponential Stabilization of Nonholonomic Mobile Robots", Computers and Electrical Engineering, Vol. 28, p.p. 349–359, 2002.

[۱۰] Dong, W.; Liang Xu, W.; and Huo, W.; "Trajectory Tracking Control of Dynamic Nonholonomic Systems with Unknown Dynamics", Int. J. of Robust and Nonlinear Control Vol. 9, p.p. 905-922, 1999.

[۱۱] Ge, S. S.; Wang, J.; Lee, T. H.; and Zhou, G. Y.; "Adaptive Robust Stabilization of Dynamic Nonholonomic Chained Systems", J. of Robotic Systems, Vol. 18, p.p. 119-133, 2000.

[۱۲] Kim, M. S.; Shin, J. H.; Hong, S. G.; and Lee, J. J.; "Designing a Robust Adaptive Dynamic Controller for Nonholonomic Mobile Robots Under Modeling Uncertainty and Disturbances", Mechatronics, Vol. 13, p.p. 507-519, 2003.

[۱۳] Dong, W.; and Kuhnert, K. D.; "Robust Adaptive Control of Nonholonomic Mobile Robot with Parameter and Nonparameter Uncertainties", IEEE Trans. on Robotics, vo. 21, p.p. 261-266, 2005.

[۱۴] Ma, B. L.; and Tso, S. K.; "Robust Discontinuous Exponential Regulation of Dynamic Nonholonomic Wheeled Mobile Robots with Parameter Uncertainties", Int. J. of Robust and Nonlinear Control, Vol. 18, p.p. 960-974, 2007.

[۱۵] Mauder, M.; "Robust Tracking Control of Nonholonomic Dynamic Systems with Application to The Bi-Steerable Mobile Robot", Automatica Vol. 44, p.p. 2588–2592, 2008.

[۱۶] Chen, C. Y.; Li, T. S.; Yeh, Y. C.; and Chang, C. C.; "Design and Implementation of an Adaptive Sliding-Mode Dynamic Controller for Wheeled Mobile Robots", Mechatronics, Vol. 19, p.p. 156-166, 2009.

[۱۷] Corradini, M. L.; Leo, T.; and Orlando, G.; "Robust Stabilization of Mobile Robot Violating The Nonholonomic Constraint Via Quasi-Sliding Modes", Proc. of American Control Conference, San Diego, California, p.p. 3935-3939, 1999.

[۱۸] Dixon, W. E.; Dawson, D. M.; Zergeroglu, E.; and Behal, A.; Nonlinear Control of Wheeled Mobile Robots, 1st Edition, Springer-Verlag, 2001.

[۱۹] Kozlowski, K.; and Pazderski, D.; "Practical Stabilization of a Skid-Steering Mobile Robot- A Kinematic-Based Approach", IEEE 3rd Int. Conference on Mechatronics, Budapest, p.p. 519-524, 2006.

[۲۰] Pazderski, D.; and Kozłowski, K.; "Trajectory Tracking of Underactuated Skid-Steering Robot", American Control Conference, Washington, USA, p.p. 3506-3511, 2008.

[۲۱] Leroquais, W.; and d'Andrea-Novel, B.; "Modeling and Control of Wheeled Mobile Robots Not Satisfying Ideal Velocity Constraints: The Unicycle Case", Proc. of 35th Conf. on Decision and Control, Kobe, Japan, p.p. 1437-1442, 1996.

[۲۲] Motte, I.; and Campion, G.; "A Slow Manifold Approach for The Control of Mobile Robots Not Satisfying The Kinematic Constraints", IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 16, p.p. 875-880, 2000.

[۲۳] Wang, Z. P.; Su, C. Y.; Lee, T. H.; and Ge, S. S.; "Robust Adaptive Control of a Wheeled Mobile Robot Violating The Pure Nonholonomic Constraint", 8th Int. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision, Kumming, China, p.p. 987-992, 2004.

[۲۴] Lewis, F.; Abdallah, C.; and Dawson, D.; Control of Robot Manipulators, 1st Edition, MacMillan Publishing Co., 1993.

[۲۵] Ward, C. C.; and Iagnemma, K.; "A Dynamic-Model-Based Wheel Slip Detector for Mobile Robots on Outdoor Terrain", IEEE Trans. on Robotics, Vol. 24, p.p. 821-831, 2008.

[۲۶] Dawson, D. M.; Hu, J.; and Burg, T. C.; Nonlinear Control of Electric Machinery, 1st Edition, Marcel Dekker Inc., 1998.

۸- زیرنویس‌ها

1 - Nonholonomic
2 - Unified Approach
3 - Ge
4 - Dixon
5 - Ma
6 - Tso
7 - Skid Steer
8 - Kozlowski
9 - Pazderski
10 - Wang
11 - Unmatched Disturbance
12 - Unicycle
13 - Globally Uniformly Ultimately Bounded
14 - Radially Unbounded
15 - Standard Heaviside Step Function