ارائه حدود پايين جديد روي مقدار بهينه زمان انجام كل كارها در يک سيستم تک ماشينهي پردازشگر انباشته

علي حسين زاده كاشان[i]؛ بهروز كريمي[ii*]

چكيده

در اين مقاله زمان‌بندي يك ماشين پردازش‌گر انباشته با هدف حداقل‌سازي زمان انجام كل كارها (C_{max}) بررسي شده است. منظور از يك ماشين پردازشگر انباشته، ماشيني است كه قابليت انجام عمليات هم‌زمان روي گروهي از كارها را در قالب يك دسته يا انباشته دارد. البته با اعمال اين محدوديت كه مجموع اندازه كارهايي كه در يک انباشته باهم مي‌آيند از ظرفيت ماشين (B) بيشتر نباشد. براي هر يك از كارها دو عامل اندازه و زمان پردازش مفروض است. زمان انجام عمليات ماشين بر روي يک انباشته برابر با زمان عمليات مورد نياز كاري است كه در ميان كارهاي متعلق به آن انباشته بزرگ‌ترين زمان پردازش را دارد. براي اين مساله، دو روش جديد توليد حد پايين روي مقدار بهينه تابع هدف با نام‌هاي LB_2 و LB_3 ارائه شده و ثابت مي‌شود كه نسبت به تنها حد پايين موجود در ادبيات موضوع مساله (LB_1) عملكرد بهتري دارند. هم‌چنين ثابت مي‌شود كه عملكرد LB_3 حداقل به خوبي عملكرد LB_2 است.

كلمات كليدي : زمان‌بندي، ماشين پردازش‌گر انباشته، حد پايين، زمان انجام همه كارها

New Lower Bounds for the Optimal Makespan on a Single Batch Processing Machine

A. Husseinzadeh Kashan, B. Karimi

ABSTRACT

This paper considers minimizing makespan (C_{max}) on a single batch-processing machine. A batch-processing machine can process a group of jobs simultaneously, as long as the total size of jobs in the batch does not exceed the machine capacity (B). For each job, we assume a specific job size and job processing time. The processing time of a batch is just the longest processing time of all jobs in the batch. We introduce two new procedures for obtaining lower bounds of the optimal makespan, entitled LB_2 and LB_3, respectively. We prove that both of the new bounds are tighter than the only existing bound called LB_1. We also prove that LB_3 is at least as tight as LB_2.

KEYWORDS : Scheduling, batch-processing machine, lower bounds, makespan

تاريخ دريافت مقاله:۱۳۸۷/۹/۱۸

تاريخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۹/۹/۱۷

[i] دكتري صنايع؛ دانشگاه صنعتي اميركبير: A.kashani@aut.ac.ir

[ii] * نويسنده مسئول و دانشيار دانشكده صنايع؛ دانشگاه صنعتي اميركبير: B.karimi@aut.ac.ir

۱- مقدمه

در دو دهه اخير مسائل مربوط به تعيين توالي و زمان‌بندي عمليات در سيستم‌هاي توليد انباشته‌اي مورد توجه قرار گرفته‌اند. به‌طوري‌که امروزه زمان‌بندي انباشته‌ها در سيستم توليد، يکي از سياست‌هاي معمول در بسياري از صنايع است. به طور کلي مدل‌هاي زمان‌بندي در توليد انباشته‌اي، بر حسب نوع انباشته‌سازي به دو دسته طبقه‌بندي مي‌شوند. در نوع اول، سفارشات (که به آنها "کار" گفته مي‌شود) در صورتي در قالب يك انباشته توليد مي‌شوند که از نظر راه‌اندازي ماشين داراي نيازمندي‌هاي مشابه باشند. هم‌چنين در هر لحظه، عمليات ماشين فقط روي يك سفارش انجام مي‌شود. ولي طي دو دهه اخير شکل ديگري از مدل‌هاي زمان‌بندي توليد انباشته‌اي مورد توجه محققين فعال در زمينه نظريه تعيين توالي عمليات و زمان‌بندي قرار گرفته است که شامل نوع دوم انباشته‌سازي است. در اين نوع توليد انباشته‌اي، چندين کار به طور هم‌زمان تحت عمليات ماشين قرار مي‌گيرند. اما ظرفيت ماشين محدود بوده و گردآوري کارها (که هر يك ممکن است داراي نيازمندي‌هاي ظرفيتي متفاوت باشند) در قالب انباشته‌ها بايد به گونه‌ي مؤثر صورت پذيرد. به طور خاص به مدل‌هاي زمان‌بندي که با اين نوع محيط توليدي سروکار دارند، مدل‌هاي زمان‌بندي ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته[1] گفته مي‌شود.

در ادبيات زمان‌بندي، مثال‌هاي فراواني از ايستگاه‌هاي توليدي که در آن از ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته استفاده مي‌شود آورده شده‌اند. براي مثال، عمليات فر درون سوز[2] در توليد بوردهاي مدار مجتمع، در داخل فرهايي انجام مي‌شود که چندين گروه از بوردها را مي‌توانند در خود جاي داده و تحت عمليات حرارتي قرار دهند [۱۸]. در اينجا فرها نقش ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته را دارند.

در سال‌هاي اخير مدل‌هاي زمان‌بندي ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته با فرض وجود نيازمندي‌هاي ظرفيتي (اندازه) متفاوت براي کارها مورد توجه قرار گرفته‌اند. در عمل ممکن است تعابير متفاوتي از اندازه يك کار وجود داشته باشد. از طرفي ممکن است اندازه يك کار بعنوان عاملي درنظر گرفته شود که معرف ابعاد فيزيکي آن است. از سوي ديگر ممکن است اندازه يك کار معرف نيازمندي عملياتي آن باشد. به عنوان مثال مي‌توان مقدار انرژي مصرفي غيرمستقيم به‌وسيله يك کار در انباشته را در صورتي که مقدار انرژي صرف شده براي انباشته محدود باشد، به عنوان يك ويژگي از کار و در قالب اندازه کار درنظر گرفت. در مسائل زمان‌بندي با فرض وجود نيازمندي‌هاي ظرفيتي متفاوت براي کارها، فرض مي‌شود که شکستن يك کار و تخصيص آن به بيش از يك انباشته مجاز نيست. چنين فرضي با توجه به درنظرگرفتن يکپارچگي فيزيکي کارها مطرح مي‌شود. حتي اگر کارها از نظر فيزيکي قابل شکست باشند، ممکن است انقطاع مجاز نباشد. بعنوان مثال با درنظرگرفتن چنين سياستي، ردیابي سفارشات مشتريان و ارائه خدمات پس از فروش مي‌تواند با سهولت بيشتري انجام گيرد [۸]. نکته قابل توجه اين است که خانواده مسائل زمان‌بندي ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته با کارهاي با اندازه نامساوي در طبقه مسائل NP-hard قرار مي‌گيرد [۲۳]. زيرا اين مسائل به طور غيرمستقيم شامل مساله تخصيص کارها به انباشته‌ها هستند که جزء سخت‌ترين مسائل موجود در ادبيات مسائل ترکيباتي است.

به طور خاص، مساله در نظر گرفته شده در اين مقاله شامل زمان‌بندي يك ماشين پردازش‌گر انباشته با فرضيات زير است:

– تعداد n کار براي زمان‌بندي بر روي يك ماشين پردازش‌گر انباشته وجود دارد که همگي در لحظه صفر در دسترس هستند. فرض کنيد مجموعه J شامل انديس همه کارهاي در دسترس باشد.

– با شروع عمليات ماشين روي یک انباشته، توقف عمليات امکان‌پذير نبوده و پيش از اتمام عمليات ماشين هيچ کاري نمي‌تواند به انباشته اضافه و يا از آن خارج شود.

– براي هر کار i، مقدار کميتي معادل s_i واحد از منابع محدود (ظرفيت ماشين) مورد نياز است.

– زمان شروع و پايان عمليات تمام کارهايي که متعلق به یک انباشته هستند با يکديگر يکسان است. زمان پردازش انباشته نيز برابر با زمان پردازش کاري است که در بين ساير کارهاي متعلق به انباشته طولاني‌ترين زمان پردازش را دارد.

– حداکثر ظرفيت ماشين براي انجام عمليات همزمان روي کارها برابر B است. به عبارت ديگر مجموع اندازه کارهاي متعلق به یک انباشته نبايد از مقدار B بيشتر شود.

ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته در مقايسه با ساير عمليات، زمان انجام عمليات طولاني‌تري دارند و بنابراين ايستگاه گلوگاه توليد هستند. بنابراين ميزان بهره‌برداري بالا از اين نوع ماشين‌ها مي‌تواند منجر به افزايش توان عملياتي کل سيستم شود. از آنجا که ميزان بهره‌برداري بالاتر مي‌تواند به معني کاهش زمان انجام عمليات کليه کارها (يا به طور معادل مقدار C_{max}) به‌وسيله ماشين(ها) باشد، بنابراين معيار عملکرد حداقل‌سازي C_{max} است.

در ادامه، به مساله با فرضيات فوق با عنوان *BPM-CMAX*

اشاره خواهد شد. مساله *BPM-CMAX* نخستين بار در سال ۱۹۹۴ بررسي شد [۲۳]. پس از آن نيز اين مساله توجه عده زيادي از محققين را به خود جلب نمود. اما تلاش‌هاي صورت گرفته، فقط محدود به ارائه روش‌هاي حل بوده و در رابطه با ارزيابي عملکرد واقعي اين روش‌ها تلاش چنداني انجام نشده است. از اين‌رو در اين مقاله به جبران ضعف موجود در زمينه ارزيابي عملکرد الگوريتم‌هاي ارائه شده براي مساله *BPM-CMAX* خواهيم پرداخت. اين کار به طور خاص از طريق ارائه روش‌هاي کارا براي توليد حدود پايين قوي روي مقدار بهينه C_{max} انجام خواهد شد. منظور از يک حد پايين روي مقدار بهينه تابع هدف (z) در يک مساله حداقل‌سازي، مقداري است مانند l که همواره شرط $l \le z$ را برقرار مي‌سازد. از مهم‌ترين کاربردهاي حدود پايين عبارتند از:

– استفاده از حدود پايين در بدنه الگوريتم‌هاي دقيق مانند روش شاخه و حد.

– استفاده از حدود پايين در بدنه مدل‌هاي رياضي به عنوان يک محدوديت.

– استفاده از حدود پايين در ارزيابي ميزان نزديکي جواب‌هاي بدست آمده از الگوريتم‌هاي مختلف به جواب بهينه.

– استفاده از حدود پايين توسعه داده شده براي يک مساله در ايجاد حدود پايين براي مسائل پيچيده و کلي‌تر.

مقدار بهينه تابع هدف با نماد C^* نشان داده مي‌شود. هم‌چنين از نماد C^A براي اشاره به مقدار حد پايين حاصل از روش A استفاده مي‌شود. عبارات C_Q^A يا C_Q^* به ترتيب نشان دهنده مقدار بهينه تابع هدف و يا مقدار حد پايين حاصل از روش A، به ازاي مجموعه کارهايي است که انديس آنها متعلق به Q مي‌باشد.

پيش از ارائه حدود پايين براي مساله *BPM-CMAX* فرض مي‌شود که به ازاي هر نمونه مساله ورودي، نخست هر کار y متعلق به J' با شرط $J' = \{y \mid B - s_y < \min_{i \in J}\{s_i\}, y \in J\}$ را در يک انباشته مجزا قرار داده و آن را از مجموعه کارها (J) حذف مي‌نماييم. به اين دليل که کارهاي متعلق به J' نمي‌توانند با هيچ يک از کارهاي موجود در يک انباشته گروه‌بندي شوند. بنابراين داريم $C^* = \sum_{j \in J'} p_j + C^*_{J \setminus J'}$. بدون اينکه از کليت کار کاسته شود در ادامه فرض مي‌شود هيچ کاري وجود ندارد که در مجموعه J' قرار گيرد.

در بخش دوم مقاله به مرور مقالات مرتبط با موضوع پرداخته و در بخش سوم به معرفي تنها حد پايين ارائه شده براي مساله *BPM-CMAX* خواهيم پرداخت. در اين بخش هم‌چنين دو حد پايين جديد براي مقدار بهينه تابع هدف ارائه مي‌شود. در بخش چهارم نيز کيفيت حدود پايين سنجيده و مقايسه مي‌شوند. بخش پنجم به جمع‌بندي و نتيجه‌گيري مي‌پردازد.

۲- مرور ادبيات

در سال‌هاي اخير مسائل زمان‌بندي ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته به طور گسترده مورد توجه محققين فعال در زمينه زمان‌بندي و توالي عمليات قرار گرفته‌اند. در مرجع [۲۰] مروري جامع بر ادبيات مسائل زمان‌بندي ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته انجام گرفته است. در اين بخش به مرور مقالاتي مي‌پردازيم که فرضيات درنظر گرفته شده در آنها نزديک به فرضيات مساله *BPM-CMAX* است؛ يعني مقالاتي که در آنها اندازه کارها يکسان در نظر گرفته شده است.

نخستين تلاش صورت گرفته در زمينه زمان‌بندي ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته با فرض وجود کارهاي با اندازه نامساوي را مي‌توان به دابسون و نامبيمادوم [۸] نسبت داد. اما اين مدل‌ها به طور جدي پس از اينکه اوزوي [۲۳] محل کاربرد آنها را در صنايع توليد نيمه‌هادي‌ها يافت، مورد توجه محققين قرار گرفتند. در مرجع [۲۳]، حداقل‌سازي C_{max} و ΣC_i روي يک ماشين پردازش‌گر انباشته مورد توجه بوده است. در مرجع [۱۰] نيز دو الگوريتم ابتکاري براي مساله *BPM-CMAX* ارائه شده که يکي بر مبناي اصلاح الگوريتم معرفي شده در مرجع [۲۳] و ديگري بر مبناي تعيين اقلام يک انباشته با استفاده از حل يک مساله کوله‌پشتي عمل مي‌نمايد. ژانگ و همکاران [۲۵] به تحليل عملکرد الگوريتم‌هاي ارائه شده در مرجع [۲۳] براي مساله حداقل‌سازي C_{max} در بدترين حالت پرداخته و يک الگوريتم تقريبي جديد ارائه کرده‌اند. حسين زاده کاشان و همکاران [۱۳] فرضيات مساله معرفي شده در مرجع [۲۵] را تعميم داده و يک الگوريتم ابتکاري با نسبت عملکرد معلوم ارائه داده‌اند. آنها هم‌چنين به ارائه يک الگوريتم تقريبي براي حالتي که اندازه و زمان پردازش کارها موافق يکديگر هستند، پرداخته‌اند. در مرجع [۹]، محققان يک الگوريتم شاخه و حد براي مساله *BPM-CMAX* ارائه کرده‌اند که قابليت حل مسائل با ابعاد به نسبت بزرگ را داراست. اخيراً نيز مولفان مقاله حاضر روشي بر مبناي شاخه و قيمت را براي حل اين مساله ارائه کرده‌اند [۲۲] که قابليت رقابت با روش شاخه و حد [۹] را دارد.

حل مسائل زمان‌بندي ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته با فرض وجود کارهاي با اندازه نامساوي، با استفاده از الگوريتم‌هاي فرا ابتکاري نيز مورد توجه محققين قرار گرفته

است. در مرجع [۲۱] يک الگوريتم شبيه‌سازي بازپخت براي مساله *BPM-CMAX* ارائه شده و نشان داده شده است که روش معرفي شده در مقايسه با جواب‌هاي حاصل از حل مدل رياضي مساله با استفاده از نرم افزار سيپلکس[۳] نتايج بهتري را در زمان کمتر بدست مي‌دهد. در مرجع [۶] نيز يک الگوريتم ژنتيک ساده براي مساله *BPM-CMAX* ارائه شده و عملکرد آن با الگوريتم شبيه‌سازي بازپخت ارائه شده در مرجع [۲۱] مقايسه شده است. براي اين مساله، در مرجع [۱۵] مولفان مقاله يک الگوريتم ژنتيک بر مبناي نمايش کروموزومي بر اساس کليدهاي تصادفي و يک الگوريتم ژنتيک ترکيبي که از يک نمايش کروموزومي ابداعي بهره مي‌برد را ارائه کرده‌اند. نتايج محاسبات نشان مي‌دهد که الگوريتم ژنتيک ترکيبي ارائه شده کارا بوده و جواب‌هاي بسيار بهتري را نسبت به الگوريتم شبيه‌سازي بازپخت ارائه شده در مرجع [۲۱] و الگوريتم ژنتيک مبتني بر نمايش کروموزومي بر اساس کليدهاي تصادفي مي‌دهد. مساله حداقل‌سازي همزمان C_{max} و T_{max} در مرجع [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. براي اين مساله مولفين يک الگوريتم ژنتيک دو هدفه ترکيبي ارائه کرده‌اند. نتايج محاسبات آنها نشان مي‌دهد که اين الگوريتم قابليت يافتن جواب‌هاي نزديک به جواب‌هاي بهينه پارتو را دارد. اخيرا نيز محققين از روش‌هاي فرا ابتکاري نسل جديد مانند جستجوي آزاد [۲۷] و تکامل تفاضلي [۲۶] براي حل مساله *BPM-CMAX* بهره برده‌اند. تعدادي از محققين به مطالعه مساله حداقل‌سازي C_{max} روي ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته موازي [۴]، [۵]، [۱۴]، [۲۴] و هم‌چنين روي يک سيستم فلوشاپ از ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته [۷]، [۱۲]، [۱۹] با فرض وجود کارهاي با اندازه نامساوي پرداخته‌اند.

همان‌طور که گفته شد مسائل زمان‌بندي با فرض وجود کارهاي با اندازه نامساوي اولين‌بار در مرجع [۸] معرفي شدند. از جمله فرضيات مدل زمان‌بندي در نظر گرفته شده در آنجا، وجود خانواده‌هاي ناسازگار کارها است. با هدف حداقل‌سازي Σw_iC_i، در مرجع [۸] نشان داده شده است که اين مساله NP-hard بوده و يک مدل برنامه‌ريزي عدد صحيح ترکيبي براي مساله ارائه شده است. در مرجع [۲]، براي اين مساله يک روش شاخه و کران و در مرجع [۱۷] تعدادي روش ابتکاري و يک الگوريتم ژنتيک بر مبناي نمايش کروموزومي بر اساس کليدهاي تصادفي ارائه شده است. در مرجع [۱۱] نيز يک چارچوب بر مبناي بهينه‌سازي کولني مورچگان، در دو نسخه متفاوت ارائه شده است.

۳- حدود پايين براي مساله BPM-CMAX

در اين بخش به معرفي روش‌هاي توليد حد پايين روي مقدار بهينه C_{max} مي‌پردازيم. ابتدا به معرفي تنها روش موجود براي توليد حد پايين (LB_1) که در مرجع [۲۳] ارائه شده است پرداخته و سپس به معرفي رويه‌هاي جديد توليد حدود پايين مي‌پردازيم. تعدادي از محققين [۲۳]، [۱۰]، [۱۵] از LB_1 براي سنجش کيفيت جواب‌هاي حاصل از الگوريتم‌هاي خود استفاده کرده‌اند و يا از آن در بدنه الگوريتم‌هاي توليد حدود پايين براي ساير مسائل زمان‌بندي استفاده کرده‌اند [۱۲]، [۱۴] و يا از آن در بدنه الگوريتم شاخه و حد استفاده کرده‌اند [۹].

الگوريتم LB_1

ابتدا همه کارها را به ترتيب نزولي زمان پردازش آنها مرتب کنيد. با شروع از ابتداي ليست، نخستين کار را در تنها انباشته‌اي که به طور کامل پر نشده (ظرفيت آن کمتر از B است) قرار داده (اگر همه انباشته‌ها به حد بالاي ظرفيت خود رسيده‌اند يك انباشته جديد تشکيل دهيد) و چنانچه فضاي لازم براي قرار دادن کار در انباشته مذکور وجود ندارد، قسمتي از کار را که ظرفيت خالي انباشته را به طور کامل اشغال مي‌سازد درون انباشته قرار دهيد. سپس يك انباشته جديد تشکيل داده و باقيمانده کار خرد شده را در آن قرار دهيد. اين فرآيند را تا زماني‌که هيچ کاري در ليست باقي نماند تکرار نماييد.

مبناي الگوريتم فوق بر اساس آزادسازي است. بدين ترتيب که در آن فرض مجاز نبودن شکست کارها به اجزاي با اندازه کوچکتر، آزاد شده است. زمان اجراي الگوريتم فوق از مرتبه $n\log n$ است. اين پيچيدگي زماني فقط به دليل مرتب‌سازي کارهاست. اجراي ساير قسمت‌هاي الگوريتم در زمان $O(n)$ امکان‌پذير است. اخيراً ثابت شده که نسبت عملکرد الگوريتم فوق در بدترين حالت برابر ۰/۵ است[۴] [۱].

۳-۱- ارائه حدود پايين جديد براي مساله *BPM-CMAX*

وقتي اندازه کارها نسبت به ظرفيت ماشين کوچك است، عملکرد متوسط LB_1 خوب تلقي مي‌شود. در واقع ثابت شده که هر چه اندازه کارها نسبت به ظرفيت ماشين کوچکتر شود عملکرد LB_1 در بدترين حالت بهتر مي‌شود [۱]. همان‌طور که در مرجع [۱۵] گزارش شده است، براي بسياري از مسائلي که در آنها اندازه کارها نسبت به ظرفيت ماشين کوچك است، مقدار حد پايين توليد شده به‌وسيله LB_1 با مقدار بهينه C_{max} برابر است. اما از عملکرد LB_1 زماني کاسته مي‌شود که اندازه کارها به نسبت بزرگ باشد. از اين نقطه ضعف مي‌توان براي توليد حدود پايين جديد استفاده کرد.

فرض كنيد كارهاي در دسترس براي زمان‌بندي را در قالب دو مجموعه تفكيك نماييم. مجموعه كارهايي كه ابعاد آنها بزرگتر از نصف ظرفيت ماشين يعني $B/۲$ است و مجموعه كارهايي كه ابعاد آنها كوچكتر از نصف ظرفيت ماشين است. بديهي است كه هيچ دو كاري كه اندازه آنها بزرگتر از نصف ظرفيت ماشين است نمي‌توانند در قالب يك انباشته به‌وسيله ماشين پردازش شوند، زيرا در اين‌صورت محدوديت ظرفيت ماشين نقض مي‌شود. بنابراين، براي هر يك از اين نوع كارها يك انباشته جداگانه مورد نياز است. همچنين كاري با اندازه ε ($\varepsilon \le B/۲$) نيز نمي‌تواند با كاري با اندازه بزرگتر از $B\text{-}\varepsilon$ در يك انباشته قرار گيرد. بنابراين، براي رسيدن به يك حد پايين روي مقدار بهينه تابع هدف مي‌توان به ازاي مقادير مختلف ε ($\varepsilon \le B/۲$) فقط اجازه داد كارهايي كه اندازه آنها در دامنه $[\varepsilon, B-\varepsilon]$ قرار دارد قابل شكست به اجزايشان باشند. فرض كنيد $S(u,v)=\{g \mid u < s_g \le v,\ g\in J\}$ دلالت بر مجموعه كارهايي داشته باشد كه اندازه آنها بزرگتر از u و كوچكتر يا مساوي با v است. به طور مشابه مي‌توان تعريف كرد: $\bar{S}(u,v)=\{g \mid u \le s_g \le v,\ g\in J\}$. رويه زير با نام NLB يك حد پايين معتبر را روي مقدار بهينه C_{max} مي‌دهد.

الگوريتم NLB

۱- به ازاي يك مقدار $\varepsilon \in [0, B/۲]$، يك حد پايين روي مقدار بهينه Cmax را به صورت زير محاسبه كنيد:

$$C^{NLB^{\varepsilon}} = \sum_{j\in S(B-\varepsilon,B)} p_j + C^{LB_1}_{\bar{S}(\varepsilon,B-\varepsilon)}$$

كه در آن $C^{LB_1}_{\bar{S}(\varepsilon,B-\varepsilon)}$ مقدار حد پايين بدست آمده به‌وسيله LB_1، بر اساس مجموعه كارهايي است كه متعلق به مجموعه $\bar{S}(\varepsilon,B-\varepsilon)$ هستند.

۲- با تكرار گام ۱ به ازاي همه مقادير ε، بزرگ‌ترين مقدار بدست آمده براي $C^{NLB^{\varepsilon}}$، يك حد پايين روي مقدار بهينه C_{max} است. يعني:

$$C^{NLB} = \max_{\varepsilon\in[0,B/2]} \{C^{NLB^{\varepsilon}}\}. \qquad (۱)$$

لم ۱. C^{NLB} يك حد پايين روي مقدار بهينه C_{max} است. همچنين $C^{NLB} \ge C^{LB_1}$.

اثبات. به ازاي يك مقدار مفروض ε، از آنجا كه هيچ يك از كارهايي كه اندازه آنها در بازه $[\varepsilon, B\text{-}\varepsilon]$ است نمي‌توانند در انباشته‌اي قرار گيرند كه كاري با اندازه بزرگتر از $B\text{-}\varepsilon$ در آن قرار دارد، داريم:

$$C^{NLB^{\varepsilon}} = \sum_{j\in S(B-\varepsilon,B)} p_j + C^{LB_1}_{\bar{S}(\varepsilon,B-\varepsilon)} \le \sum_{j\in S(B-\varepsilon,B)} p_j + C^{*}_{\bar{S}(\varepsilon,B-\varepsilon)} = C^{*}_{\bar{S}(\varepsilon,B)}$$

از آنجا كه $\bar{S}(\varepsilon,B)\subseteq J$، پس $C^{*}_{\bar{S}(\varepsilon,B)} \le C^{*}$. در نتيجه $C^{NLB} \le C^{*}$. همچنين به ازاي $\varepsilon=0$ داريم $C^{NLB^{0}} = C^{LB_1}$ كه دلالت بر $C^{LB_1} \le C^{NLB}$ دارد.

از آنجا كه هيچ دو كاري كه اندازه آنها در بازه $[B/۲, B\text{-}\varepsilon]$ قرار مي‌گيرد نمي‌توانند در يك انباشته باشند، هنگامي كه $C^{LB_1}_{\bar{S}(\varepsilon,B-\varepsilon)} < \sum_{j\in S(B/2,B-\varepsilon)} p_j$، ممكن است بتوان مقدار C^{NLB} را قوي‌تر نمود. داريم:

$$C^{LB_2} = \max_{\varepsilon\in[0,B/2]} \left\{ \begin{matrix} \sum_{j\in S(B-\varepsilon,B)} p_j + \\ \max\left\{\sum_{j\in S(B/2,B-\varepsilon)} p_j, C^{LB_1}_{\bar{S}(\varepsilon,B-\varepsilon)}\right\} \end{matrix} \right\}$$

$$= \max_{\varepsilon\in[0,B/2]} \left\{ \begin{matrix} \sum_{j\in S(B/2,B)} p_j + \\ \max\left\{0, C^{LB_1}_{\bar{S}(\varepsilon,B-\varepsilon)} - \sum_{j\in S(B/2,B-\varepsilon)} p_j\right\} \end{matrix} \right\}$$

$$= \max\{C^{*}_{S(B/2,B)}, \max_{\varepsilon\in[0,B/2]} \{C^{NLB^{\varepsilon}}\}\} \qquad (۲)$$

كه در آن $C^{*}_{S(B/2,B)} = \sum_{j\in S(B/2,B)} p_j$.

در نتيجه از لم ۱ مي‌توان دريافت كه $C^{LB_1} \le C^{LB_2}$. همچنين از آنجا كه در گام ۲ در الگوريتم NLB فقط بايد به تعداد مقادير متمايز $\varepsilon\in[0, B/۲]$، مقدار $C^{NLB^{\varepsilon}}$ را محاسبه نمود، مي‌توان نتيجه گرفت كه پيچيدگي محاسباتي C^{LB_2} در بدترين حالت برابر با $O(n^2 \log n)$ است.

همان‌طور كه ديده شد، C^{LB_2} از طريق تفكيك مجموعه كارهاي در دسترس در قالب دو مجموعه بدست آمد. بدين ترتيب ممكن است بتوان از ايده تفكيك كارها در قالب سه مجموعه براي ارائه يك حد پايين ديگر (و در صورت امكان قوي‌تر) به صورت رابطه (۳) بهره برد:

$$C^{LB_3} = \max\left\{C^{*}_{S(B/3,B)}, \max_{\varepsilon\in[0,B/3]} \{C^{NLB^{\varepsilon}}\}\right\} \qquad (۳)$$

كه در آن $C^{*}_{S(B/3,B)}$ مقدار بهينه C_{max} در زير مساله‌اي از مساله اصلي است كه در آن فقط كارهاي با اندازه بزرگتر از $B/۳$ در نظر گرفته شده‌اند.

خوشبختانه، اين موضوع به صورت زير امكان‌پذير است. بنابر تعريف، مجموعه نخست شامل كارهايي است كه اندازه آنها بزرگتر از $B/۲$ هستند. مجموعه دوم نيز به وسيله كارهايي ساخته مي‌شود كه اندازه آنها در بازه $(B/۳, B/۲]$ قرار مي‌گيرد. در پايان، مجموعه سوم شامل كارهايي است كه در مجموعه اول و دوم قرار نمي‌گيرند. دوباره هر يك از كارهايي كه در

مجموعه نخست قرار مي‌گيرند بايد در يك انباشته جداگانه قرار گيرند. البته كارهايي كه در مجموعه دوم قرار دارند مي‌توانند حداكثر با يك كار از مجموعه نخست كه اندازه آن در بازه $[B/2, 2B/3)$ قرار دارد، در يك انباشته گروه‌بندي شوند. فرض كنيد H مجموعه كارهايي باشد كه عضو مجموعه نخست بوده و مي‌توانند با يكي از كارهاي متعلق به مجموعه دوم در يك انباشته قرار گيرند. با توجه به تفكيك‌بندي كارها به صورت فوق مي‌توان $C^*_{S(B/3,B)}$ را به صورت رابطه (٤) ارائه نمود:

$$C^*_{S(B/3,B)} = \sum_{j\in S(B/2,B)} p_j + C^*_X - \sum_{j\in H} p_j \qquad (۴)$$

كـه در آن C^*_X مقـدار بهينـه $C_{\max}$ در زيـر مـساله‌اي از مـساله اصلي است كه در آن فقط كارهايي كـه انـديس‌شـان متعلـق بـه مجموعه $X = S(B/3, B/2) \cup H$ است مورد نظـر قـرار دارنـد. بنـابراين بـا معرفـي چگـونگي محاسـبه C^*_X مـي‌تـوان بـه مقدار C^{LB_3} رسيد. C^{LB_3} به صورت رابطه (۵) نيز قابـل معرفـي است:

$$C^{LB_3} = \max_{\varepsilon\in[0,B/3]} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j\in S(B-\varepsilon,B)} p_j + \\ \max\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j\in S(B/2,B-\varepsilon)} p_j + C^*_X - \sum_{j\in H} p_j \\ , C^{LB_1}_{\bar{S}(\varepsilon,B-\varepsilon)} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$= \max_{\varepsilon\in[0,B/3]} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j\in S(B/2,B)} p_j + C^*_X - \sum_{j\in H} p_j + \\ \max\left\{ 0, \left(\begin{array}{l} C^{LB_1}_{\bar{S}(\varepsilon,B-\varepsilon)} - \sum_{j\in S(B/2,B-\varepsilon)} p_j \\ - C^*_X + \sum_{j\in H} p_j \end{array} \right) \right\} \end{array} \right\} \qquad (۵)$$

حال نشان خواهيم داد كه چگونه مساله زمان‌بندي كارهاي متعلق به مجموعه X و مقدار بهينه تابع هدف آن يعني C^*_X از طريق تبديل به يك مساله شناخته شده در نظريه گراف قابل حل است. ابتدا بايد توجه داشت كه به طور كلي، حداكثر دو كار متعلق به X مي‌توانند با يكديگر در يك انباشته گروه‌بندي شوند. در نتيجه يادآور مي‌شويم كه كارهاي متعلق به X كه اندازه آنها در بازه $(B/3, B/2]$ قرار مي‌گيرد (كارهاي متعلق به مجموعه دوم) فقط مي‌توانند حداكثر با يك كار ديگر متعلق به X كه آن نيز از مجموعه دوم آمده در يك انباشته گروه‌بندي شوند و يا مي‌توانند حداكثر با يك كار متعلق به X كه از مجموعه H آمده گروه‌بندي شوند. هم‌چنين هيچ دو كار متعلق به X كه از مجموعه H آمده باشند نمي‌توانند در يك انباشته قرار گيرند. به عبارت ديگر مي‌توان اين‌طور در نظر گرفت كه اين كارها با يكديگر ناسازگار هستند. به طور مشابه نيز مي‌توان رابطه سازگاري بين دو كار را در قالب امكان قرارگيري آنها در يك انباشته تعريف نمود. براي تعريف رابطه سازگاري و ناسازگاري ميان كارهاي متعلق به X مي‌توان از گراف $G_X(V,E)$ استفاده نمود كه در آن V مجموعه گره‌هاي گراف است كه به هر گره يك كار متعلق به X نظير مي‌شود. مجموعه E نيز مجموعه يال‌هاي گراف است. هنگامي كه دو كار (گره) i و j در مجموعه X با يكديگر سازگار باشند يعني $s_i + s_j \le B$، آنگاه يك يال بين گره‌هاي نظير آنها وجود دارد. بنابر تعريف، همه كارهاي متعلق به مجموعه H با يكديگر ناسازگار هستند و بنابراين مجموعه گره‌هاي نظير آنها تشكيل يك مجموعه استوار[5] با اندازه $|H|$ را مي‌دهند (منظور از يك مجموعه استوار در يك گراف، مجموعه‌اي از گره‌ها است كه همگي ايزوله بوده و هيچ يالي بين آنها نيست). هم‌چنين همه كارهاي متعلق به مجموعه دوم، دو به دو سازگار بوده و بنابراين مجموعه گره‌هاي نظير آنها تشكيل يك خوشه[6] با اندازه $|S(B/3, B/2]|$ مي‌دهند (منظور از يك خوشه در يك گراف مجموعه‌اي از گره‌ها است كه در آن هر جفت گره با يك يال به يكديگر متصل هستند). هم‌چنين وقتي يك كار متعلق به X كه انديس آن از مجموعه H آمده با كاري ديگر متعلق به X كه انديس آن در مجموعه دوم قرار دارد سازگار باشد يك يال بين گره‌هاي نظير آنها در گراف G_X وجود دارد. در نظريه گراف، گرافي نظير G_X كه از يك خوشه و از يك مجموعه استوار تشكيل شده است، گراف شكسته[7] گفته مي‌شود.

با توجه به اينكه حداكثر دو كار متعلق به X مي‌توانند در يك انباشته قرار گيرند، مي‌توان براي هر يك از كارهاي متعلق به X يک اندازه واحد در نظر گرفت (اندازه كار $i \in X$ را از s_i به يک كاهش داد) و ظرفيت انباشته را از B به ۲ كم كرد. هم‌چنين، اين محدوديت نيز بايد اعمال شود كه كارهايي كه با يكديگر ناسازگارند نبايد در يك انباشته قرار گيرند. بنابراين مساله يافتن زمان‌بندي بهينه كارهاي متعلق به X (با مقدار تابع هدف C^*_X) با فرضيات بخش [۱-مقدمه]، به مساله بخش‌بندي گراف G_X با خوشه‌هايي (انباشته‌هايي) با اندازه حداكثر ۲ و با هدف حداقل‌سازي مجموع زمان پردازش خوشه‌ها (انباشته‌ها) تبديل مي‌شود. با اين تبديل مي‌توان مقدار C^*_X را از طريق حل بهينه مساله بخش‌بندي با خوشه‌ها[8] در زمان $O(|X|^3)$ از طريق الگوريتم زير موسوم به $MWMA$ بدست آورد [۳].

الگوريتم ***MWMA***

۱. يك گراف وزني جديد $G^v_X(V,E)$ بسازيد كه در آن هر يال كه گره‌هاي i و j را به هم متصل مي‌سازد داراي وزن $\min\{p_j, p_j\}$ باشد.

۲. حداکثر تطابق وزني[۹] را در G_X^v بیابید و مقدار آن را برابر با $W(X)$ قرار دهید.

۳. انباشته‌ها را به ترتیب زیر تشکیل دهید:

– هر دو گره‌اي که یال بین آنها در مجموعه تطابق تشکیل شده در گام ۲ قرار مي‌گیرد را در یك انباشته قرار دهید.

– هر یك از گره‌هاي باقي‌مانده را در یك انباشته مجزا قرار دهید.

۴. مقدار C_X^* برابر است با مجموع زمان‌هاي پردازش همه کارهاي متعلق به مجموعه X منهاي ارزش تطابق وزني بدست آمده در گام ۲.

قضیه ۱. به ازاي هر نمونه مساله از $BPM\text{-}CMAX$ که در آن اندازه همه کارها بزرگتر از $B/3$ است، زمان‌بندي بهینه در زمان $O(n^3)$ به‌وسیله الگوریتم $MWMA$ بدست مي‌آید.

با اینکه امکان‌پذیر است به طریقي مشابه روند فوق را براي دستیابي به C^{LB_4}، C^{LB_5} و غیره توسعه داد، اما حل بهینه زیر مسائل بدست آمده که در واقع مسائل بخش‌بندي گراف با خوشه‌هایي با حداکثر اندازه ۳، ٤ و یا بیشتر هستند در زمان چند جمله‌اي امکان‌پذیر نیست.

قضیه ۲. $C^{LB_3} \ge C^{LB_2}$

اثبات. براي اثبات، حالت‌هاي زیر را در نظر مي‌گیریم:

حالت ۱) $\varepsilon \in [0, B/3]$

در این حالت کافي است نشان دهیم:

$$\sum_{j\in S(B/2,B-\varepsilon)} p_j \le \sum_{j\in S(B/2,B-\varepsilon)} p_j + C_X^* - \sum_{j\in H} p_j.$$

از نامساوي فوق داریم $C_X^* - \sum_{j\in H} p_j \ge 0$ که همواره برقرار است زیرا $H \subseteq X$.

حالت ۲) $\varepsilon \in (B/3, B/2)$

کافي است به ازاي $\varepsilon \in (B/3,B/2)$ ثابت کنیم $C^{NLB^{\varepsilon}} \le C^*_{S(B/3,B)}$. فرض کنید به ازاي $B/3 \le s < B/2$، مجموعه کارهاي متعلق به $S(B/2, B-s)$ که با کارهاي متعلق به $S(s, B/2)$ سازگار هستند را با $h(s)$ نشان دهیم. بنابر تعریف داریم $H=h(B/3)$. فرض کنید $x(s) = S(s, B/2) \cup h(s)$. به ازاي $\varepsilon \in (B/3,B/2)$ و $\sigma > 0$، مي‌خواهیم ثابت کنیم:

$$C^{LB_1}_{\bar S(\varepsilon,B-\varepsilon)} - \sum_{j\in S(B/2,B-\varepsilon)} p_j \le C^*_{x(\varepsilon-\sigma)} - \sum_{j\in h(\varepsilon-\sigma)} p_j$$

هم‌چنین فرض مي‌کنیم که شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $\varepsilon - \sigma > B/3$.

۲) کاري وجود ندارد که اندازه آن در بازه‌هاي $[\varepsilon-\sigma, \varepsilon)$ و $(B-\varepsilon, B-\varepsilon+\sigma]$ قرار گیرد.

از فرض دوم نتیجه مي‌شود: $\bar S(\varepsilon, B/2) = S(\varepsilon-\sigma, B/2)$ و

$$S(B/2, B-\varepsilon) = S(B/2, B-\varepsilon+\sigma)$$

بنابراین داریم $\bar S(\varepsilon, B-\varepsilon) = S(\varepsilon-\sigma, B-\varepsilon+\sigma)$. بر این اساس مي‌توان استدلال نمود که محاسبه $C^{LB_1}_{\bar S(\varepsilon,B-\varepsilon)} - \sum_{j\in S(B/2,B-\varepsilon)} p_j$ و $C^*_{x(\varepsilon-\sigma)} - \sum_{j\in h(\varepsilon-\sigma)} p_j$ بر مبناي یك مجموعه یکسان از کارها صورت مي‌پذیرد و بنابراین حکم ثابت است. این نتیجه‌گیري از آنجاست که در محاسبه سمت چپ نامساوي با توجه به مجاز بودن شکست کارها، از ظرفیت انباشته‌ها به طور کامل استفاده مي‌شود. در حالي‌که در محاسبه سمت راست نامساوي ممکن است از ظرفیت انباشته‌ها به طور کامل استفاده نشود. حال مي‌خواهیم درستي نامساوي $C^*_{x(\varepsilon-\sigma)} - \sum_{j\in h(\varepsilon-\sigma)} p_j \le C_X^* - \sum_{j\in H} p_j$ را نشان دهیم. فرض کنید s و $\hat s$ به گونه‌اي موجود باشند که $B/3 \le \hat s \le s < B/2$. بدیهي است که $S(s,B/2) \subseteq S(\hat s, B/2)$ و $S(B/2, B-s) \subseteq S(B/2, B-\hat s)$. هم‌چنین داریم $h(s) \subseteq h(\hat s)$ که نتیجه مي‌دهد $x(s) \subseteq x(\hat s)$. از گام ٤ الگوریتم $MWMA$ داریم $C^*_{x(s)} = \sum_{j\in x(s)} p_j - W(x(s))$ که در آن $W(x(s))$ مقدار حداکثر تطابق وزني محاسبه شده در گام ۲ به ازاي گراف $G_{x(s)}$ است که به‌وسیله کارهاي متعلق به $x(s)$ ساخته شده است. مي‌خواهیم ثابت کنیم $C^*_{x(s)} - \sum_{j\in h(s)} p_j \le C^*_{x(\hat s)} - \sum_{j\in h(\hat s)} p_j$. در واقع معادل این نامساوي مي‌تواند به صورت $W(x(s)) \ge W(x(\hat s))$ تعریف شود. نامساوي اخیر نیز همواره برقرار است زیرا $x(s) \subseteq x(\hat s)$. با تعریف $s = \varepsilon - \sigma$ و $\hat s = B/3$ نتیجه مورد نظر بدست مي‌آید.

حالت ۳) $\varepsilon = B/2$.

به ازاي $\varepsilon = B/2$ داریم:

$$C^{LB_2^{B/2}} = \sum_{j\in S(B/2,B)} p_j + C^{LB_1}_{\bar S(B/2,B/2)}.$$

همان‌طور که دیده مي‌شود $C^{LB_2^{B/2}}$ به ازاي مجموعه کارهایي که اندیس آنها متعلق به $\bar S(B/2,B)$ است محاسبه مي‌شود. بنابراین داریم $C^{LB_2^{B/2}} \le C^*_{\bar S(B/2,B)}$. از آنجا که $\bar S(B/2,B) \subseteq S(B/3,B)$ لذا $C^*_{\bar S(B/2,B)} \le C^*_{S(B/3,B)}$. نامساوي اخیر نیز درستي حکم را به ازاي $\varepsilon = B/2$ مي‌دهد.

مثال. براي آگاهي بیشتر از نحوه محاسبه حدود پایین، در این قسمت از یک مثال عددي کمک گرفته مي‌شود که در آن $B=10; s_1=7; s_2=5; s_3=4; s_4=6; s_5=5; s_6=9; s_7=1$ و $p_1=10; p_2=14; p_3=13; p_4=1; p_5=7; p_6=19; p_7=6;$.

حل: براي محاسبه C^{LB_2} داریم:

$$\varepsilon = 0 \Rightarrow C^{NLN^0} = C^{LB_1}_{\bar{S}(0,B)} = C^{LB_1} = 49$$

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow C^{NLN^1} = \sum_{j \in S(9,10)} P_j + C^{LB_1}_{\bar{S}(1,9)} = 0 + 49$$

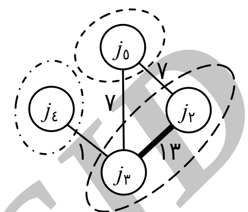
$$\varepsilon = 4 \Rightarrow C^{NLN^4} = \sum_{j \in S(6,10)} P_j + C^{LB_1}_{\bar{S}(4,6)} = 10 + 19 + 21 = 50$$

$$\varepsilon = 5 \Rightarrow C^{NLN^5} = \sum_{j \in S(5,10)} P_j + C^{LB_1}_{\bar{S}(5,5)} = 1 + 10 + 19 + 14 = 44$$

$$C^*_{S(B/2,B)} = \sum_{j \in S(5,10)} P_j = 30$$

$$C^{LB_2} = \max\{30,49,49,50,44\} = 50$$

براي محاسبه C^{LB_3} كافي است مقدار $C^*_{S(B/3,B)}$ را محاسبه نماييم. ابتدا گراف $G^v_X(V,E)$ را به شكل زير تشكيل مي‌دهيم:



مي‌توان دريافت كه حداكثر تطابق وزني با مقدار ۱۳ به ازاي قرار گرفتن يال j_2-j_3 در مجموعه تطابق ايجاد مي‌شود. داريم $C^*_X =$ (۱۴+۱۳+۱+۷)-۱۳=۲۲. مقدار $C^*_{S(B/3,B)}$ نيز به صورت زير محاسبه مي‌شود.

$$C^*_{S(B/3,B)} = \sum_{j \in \{j_1, j_4, j_6\}} p_j + C^*_X - \sum_{j \in \{j_4\}} p_j = ۳۰+۲۲-۱=۵۱$$

بنابراين داريم: $C^{LB_2} = \max$ {۵۱,۴۹,۴۹}=۵۱ .

۳- نتايج محاسباتي

براي بررسي كيفيت حدود پايين ارائه شده و انجام مقايسات با حد پايين موجود، يك برنامه كامپيوتري در نرم افزار مطلب ۷,۳,۰ نوشته شده و آزمايش‌ها روي يك كامپيوتر پنتيوم ٤ با ۲/٦٦ گيگا هرتز سرعت پردازش و ۵۱۲ مگابايت حافظه انجام شده است. براي انجام آزمايش‌هاي محاسباتي، ۱۰ مجموعه مساله در نظر گرفته شده كه تعداد كارهاي آنها از ۱۰ تا ۱۰۰ است. براي هر مجموعه، ۱۰۰ نمونه مساله به صورت تصادفي توليد شده و مقادير حدود پايين براي آنها حساب شده‌اند. براي كليه مسائل، اندازه كارها به طور تصادفي در بازه اعداد صحيح بين ۱ تا ۹۹ و زمان‌هاي پردازش نيز در بازه اعداد صحيح بين ۸۰ تا ۱۲۰ توليد شده‌اند. نتايج در جدول (۱) آمده است. در جدول (۱) عملكرد حدود پايين بر اساس كيفيت حدود و نيز زمان اجرا سنجيده شده است. براي سنجش كيفيت حدود (LB) روي هر مجموعه از مسائل، از رابطه $AVG((C^{UB} - C^{LB})/C^{LB})$ استفاده شده است كه در آن $AVG(.)$ تابع ميانگين است كه روي نتايج حاصل از ۱۰۰ نمونه مساله توليد شده براي هر مجموعه اعمال مي‌شود. از آنجا كه دسترسي به جواب‌هاي بهينه به دليل سركش بودن مساله به آساني امكان‌پذير نيست، كيفيت حدود پايين در مقايسه با يك حد بالا (C^{UB}) سنجيده شده است. براي توليد حد بالا نيز از الگوريتم FFLPT استفاده شده است [۲۳]. به تجربه ثابت شده است كه اين الگوريتم بسيار سريع بوده و به طور معمول جواب‌هاي نزديك به بهينه را توليد مي‌نمايد. البته اگرچه شاخص كيفيت گزارش شده در جدول (۱) معرف عملكرد دقيق حدود نيست اما به درستي مي‌تواند روند عملكرد حدود را نشان دهد. از آنجا كه عملكرد حدود بر مبناي فاصله آنها نسبت به يك نقطه مرجع واحد (حد بالا) سنجيده شده است، بنابراين صرف نظر از ماهيت نقطه مرجع، نتايج گزارش شده به طور دقيق ميزان قوت هر يك از حدود را نشان مي‌دهند. به عنوان شاخص ديگري از عملكرد، زمان اجراي هر يك از حدود نيز گزارش شده‌اند. قابل توجه است كه هنگام محاسبه C^{LB_3}، براي حل مساله حداكثر تطابق وزني در گام دوم الگوريتم $MWMA$ از جعبه ابزار بهينه‌سازي موجود در نرم‌افزار مطلب ۷,۳,۰ استفاده شده است كه بر مبناي روش شاخه و حد عمل مي‌نمايد. اگرچه براي يافتن تطابق وزني بيشينه در يك گراف الگوريتم‌هاي مؤثر با زمان چند جمله‌اي چنان توسعه داده شده‌اند كه ظرف كسري از ثانيه مي‌توانند زير مسائل مربوطه را حل نمايند، اما اين الگوريتم‌ها بسيار پيچيده بوده و پياده‌سازي آنها دشوار است. همان‌طور كه به طور نظري نيز انتظار مي‌رود، در ميان حدود پايين مقايسه شده، LB_1 ضعيف‌ترين و LB_3 قوي‌ترين عملكرد را از خود نشان داده‌اند. البته از نقطه نظر زمان اجرا، اين مساله وارون است. همان‌طور كه نتايج نشان مي‌دهند عملكرد LB_2 نزديك به ۲/۵% بهبود را نسبت به عملكرد LB_1 نشان مي‌دهد. اين مساله بين LB_2 و LB_3 نيز برقرار است. اما اين‌بار LB_2 ضعيف‌تر است.

جدول (۱): مقايسه بين حدود پايين

تعداد كارها (n)	LB_1 كيفيت (%)	LB_1 زمان (ثانيه)	LB_2 كيفيت (%)	LB_2 زمان (ثانيه)	LB_3 كيفيت (%)	LB_3 زمان (ثانيه)
۱۰	۸/۹٤	۰/۰۰	٤/۹۸	۰/۰۰	٤/۳٤	۰/۰۱
۲۰	۱۲/۵۱	۰/۰۰	۸/۸۰	۰/۰۰	۵/۷٦	۰/۱۳
۳۰	۱۲/۸۲	۰/۰۰	۹/۷۳	۰/۰۱	٦/٦۹	۰/۵۰
٤۰	۱۲/٤۲	۰/۰۰	۹/۷۰	۰/۰۱	٦/۷۲	۰/٦۳
۵۰	۱۱/۹۲	۰/۰۰	۹/٦۳	۰/۰۲	٦/۷۲	۰/۷٤
٦۰	۱۱/٤۹	۰/۰۰	۹/٤۰	۰/۰۳	٦/۹۲	۰/۸۵
۷۰	۱۱/۰۵	۰/۰۰	۹/۰۵	۰/۰۵	٦/۷٦	۰/۹۷
۸۰	۱۰/۹۲	۰/۰۰	۹/۰۲	۰/۰۷	٦/٤۰	۱/۲۳
۹۰	۱۰/۵۲	۰/۰۰	۸/۷٤	۰/۹	٦/۳۵	۱/٤۰
۱۰۰	۹/۷۸	۰/۰۰	۷/۹٦	۰/۱۱	۵/٦۰	۱/۵۵
متوسط	۱۱/۲۳		۸/۷۰		٦/۲۲	

٤- جمع‌بندي و نتيجه‌گيري

در اين مقاله روش‌هاي جديدي براي توليد حدود پايين قوي روي مقدار بهينه زمان انجام عمليات بر روي همه كارها به‌وسيله يک ماشين پردازنده انباشته با فرض وجود كارهاي با اندازه نامساوي ارائه شده و ثابت شد كه عملكرد آنها حداقل به خوبي عملكرد تنها حد پايين موجود در ادبيات موضوع است. همچنين ثابت شد كه به طور خاص عملكرد يكي از حدود پايين معرفي شده بايد حداقل به خوبي عملكرد حد پايين ديگر باشد.

براي تحقيقات آينده، استفاده از حدود پايين ارائه شده در بدنه الگوريتم‌هايي مانند شاخه و كران و سنجش موازنه بين زمان و كيفيت قابل توجه است. همچنين توسعه حدود پايين براي مسائل زمان‌بندي در سيستم‌هاي توليد پيچيده كه در آن ماشين‌هاي پردازش‌گر انباشته به صورت موازي و يا فلوشاپ فعاليت مي‌كنند نيز قابل ملاحظه است.

٥- مراجع

[۱] حسين زاده كاشان، علي؛ "ارائه حدود بالا و پايين براي مسائل زمان‌بندي تک ماشين و جريان كارگاهي در سيستم‌هاي توليد انباشته‌اي با فرض وجود نيازمندي ظرفيتي متفاوت براي كارها". رساله دكتري مهندسي صنايع، دانشگاه صنعتي اميركبير، ۱۳۸۸.

[۲] Azizoglu, M.; Webster, S.; "Scheduling a batch processing machine with incompatible job families". Computers & Industrial Engineering, vol. 39, p.p. 325-335, 2000.

[۳] Boudhar, M.; Finke, G.; "Scheduling on a batch machine with job compatibilities", Belgian Journal of Operations Research, Statistics and Computer Science, vol. 40, p.p. 69–80, 2000.

[۴] Chang, P.Y.; Damodaran, P.; Melouk, S.; "Minimizing makespan on parallel batch processing machines", International Journal of Production Research, vol. 42, p.p. 4211-4220, 2004.

[۵] Damodaran, P., Chang, P.Y.; "Heuristics to minimize makespan of parallel batch processing machines", International Journal of Advance Manufacturing Technology, vol. 37, p.p. 1005-1013, 2008.

[۶] Damodaran, P.; Manjeshwar, P.K.; Srihari, K.; "Minimizing makespan on a batch-processing machine with non-identical job sizes using genetic algorithms", International journal of production economics, vol. 103, p.p. 882-891, 2006.

[۷] Damodaran, P.; Srihari, K.; "Mixed integer formulation to minimize makespan in flow shop with batch processing machines". Mathematical and Computer Modeling, vol. 40, p.p. 1465-1472, 2004.

[۸] Dobson, G.; Nambimadom, R.S.; "The batch loading and scheduling problem", Research Report, Simon School of Business Administration. University of Rochester, Rochester, NY, 1992.

[۹] Dupont, L.; Dhaenens-Flipo, C.; "Minimizing the makespan on a batch machine with non-identical job sizes: an exact procedure", Computers & Operations Research, vol. 29, p.p. 807-819,2002.

[۱۰] Dupont, L.; Jolai Ghazvini, F.; "Minimizing Makespan on a Single Batch Processing Machine with Non identical Job Sizes", European journal of Automation Systems, vol. 32, p.p. 431-440, 1998.

[۱۱] Husseinzadeh Kashan, A.; Karimi, B.; "Scheduling a single batch-processing machine with arbitrary job sizes and incompatible job families: an ant colony framework", Journal of the Operational Research Society, vol. 59, p.p. 1269-1280, 2008.

[۱۲] Husseinzadeh Kashan, A.; Karimi, B.; "An improved mixed integer linear formulation and several lower bounds for minimizing makespan on a flowshop with batch processing machines", International Journal of Advanced manufacturing Technology, vol. 40, p.p. 582-594, 2009.

[۱۳] Husseinzadeh Kashan, A.; Karimi, B.; Fatemi Ghomi, S.M.T.; "A note on: Minimizing makespan on a single batch processing machine with non-identical job sizes", Theoretical Computer Science, vol. 410, p.p. 2754-2758, 2009.

[۱۴] Husseinzadeh Kashan, A.; Karimi, B.; Jenabi, M.; "A hybrid genetic heuristic for scheduling parallel batch processing machines with arbitrary job sizes", Computers & Operations Research, vol. 35, p.p. 1084-1098, 2008.

[۱۵] Husseinzadeh Kashan, A.; Karimi, B.; Jolai, F.; "Effective hybrid genetic algorithm for minimizing makespan on a single-batch-processing machine with non-identical job sizes", International Journal of Production Research, vol. 44, p.p. 2337-2360, 2006.

[۱۶] Husseinzadeh Kashan, A.; Karimi, B.; Jolai, F.; "An effective hybrid multi-objective genetic algorithm for bi-criteria scheduling on a single batch processing machine with non-identical job sizes". Engineering Applications of Artificial Intelligence, vol. 23, p.p. 911-922, 2010.

[۱۷] Koh, S.G.; Koo, P.H.; Kim, D.C.; Hur, W.S.; "Scheduling a single-batch-processing machine with arbitrary job sizes and incompatible job families", International Journal of Production Economics, vol. 98, p.p. 81–96, 2005.

[۱۸] Lee, C.Y.; Uzsoy, R.; Martin-Vega, L.A.; "Efficient Algorithms for Scheduling Semiconductor Burn-in Operations", Operations Research, vol. 40, p.p. 764-775, 1992.

[۱۹] Liao L.M.; Huang, C.J.; "Tabu search heuristic for two-machine flowshop with batch processing machines", Computers & Industrial Engineering, In Press, 2010.

[۲۰] Mathirajan, M.; Sivakumar, A.I.; "A Literature Review, Classification and Simple Meta-analysis on Scheduling of Batch Processors in Semiconductor", International Journal of Advanced Manufacturing Technology, vol. 29, p.p. 990-1001, 2006.

[۲۱] Melouk, S.; Damodaran, P.; Cheng, P.Y.; "Minimizing make span for single machine batch processing with non-identical job sizes using simulated annealing", International Journal of Production Economics, vol. 87, p.p. 141-147, 2004.

[۲۲] Rafiee Parsa, N.; Karimi, B.; Husseinzadeh Kashan, A.; "A branch and price algorithm to minimize makespan on a single batch processing machine with non-identical job sizes", Computers & Operations Research, vol. 37, p.p. 1720-1730, 2010.

[۲۳] Uzsoy, R.; "A Single Batch Processing Machine with Non-identical Job Sizes", International Journal of Production Research, vol. 32, p.p. 1615-1635, 1994.

[۲۴] Wang, H.M.; Chou, F.D.; "Solving the parallel batch-processing machines with different release times, job sizes, and capacity limits by metaheuristics", Expert Systems with Applications, vol 37. p.p. 1510-1521, 2010.

[۲۵] Zhang, G.; Cai, X.; Lee, C.Y.; Wong, C.K.; "Minimizing makespan on a single batch processing machine with nonidentical job sizes", Naval Research Logistics, vol. 48, p.p. 226-240, 2001.

[۲۶] Zhang, W.G.; Chen, H.P.; Lu, D.; Shao, H.; "A Novel Differential Evolution Algorithm for a Single Batch-processing Machine with Non-identical Job Sizes", Proc. Fourth International Conference on Natural Computation, p.p. 447-451, 2008.

[۲۷] Zhang, Y.L.; Chen, H.P.; Shao, H.; Xu, R.; "Minimizing Makespan for Single Batch Processing Machine with Non-identical Job Sizes Using a Novel Algorithm: Free Search", Proc. International Conference on Information Technology and Computer Science p.p. 180-183, 2009.

٦- زیرنویس‌ها

[1] Batch processing machine
[2] Burn-in oven
[3] CPLEX

[4] فرض کنید A یک الگوریتم تولید حد پایین براي مساله باشد. مي‌توان عملکرد A را به ازاي نمونه مساله Q به صورت C_Q^A/C_Q^* تعریف کرد که در آن C_Q^A مقدار حد پایین حاصل از A براي نمونه مساله Q است ($C_Q^A \le C_Q^*$). اگر به ازاي هر نمونه مساله Q داشته باشیم $C_Q^A/C_Q^* \ge \rho$، که در آن ρ بزرگترین مقدار حقیقي به ازاي تمامي نمونه مسائل ممکن Q است، آنگاه شاخصي از عملکرد A بدست مي‌آید. بنابر تعریف، نسبت عملکرد A در بدترین حالت ($\rho(A)$) عبارت است از: $\rho(A)=\inf\{C_Q^A/C_Q^*, \forall Q\}$.

[5] Stable set
[6] Clique
[7] Split graph
[8] Partitioning with cliques
[9] Maximum weight matching