# حل مسئله بهينه‌سازي مانور ضربه‌اي سه بعدي مقيد و نامقيد زماني

محمد نوابي[i] *؛ محمد صنعتي[ii]

چكيده

مانورهاي مداري يا انتقال ماهواره‌ها بين مدارها، جايگاه ويژه‌اي در هر ماموريت فضايي دارد. منظور از انتقال ضربه‌اي بهينه، صرف حداقل ميزان انرژي (ضربه) مورد نياز براي انجام انتقال است. مسئله انتقال بهينه مداري ضربه‌اي سه بعدي از مسائل كاربردي است ولي به‌علت پيچيدگي خاص مسئله، حل آن در مقالات كمتر مورد بررسي قرار گرفته است. بهينه‌سازي و حل اين مسئله بسيار مشكل بوده و نيازمند ابتكار براي حل هر حالت است. در اين مقاله علاوه بر استخراج معادلات بهينه‌سازي براي بيان هندسه‌ي مدارهاي اوليه، هدف و انتقالي نسبت به يكديگر با استفاده از بحث مثلثات كروي، براي اولين بار حالت‌هاي مختلف قرارگيري مدار اوليه و هدف بيان مي‌شود. با توجه به مسائل كاربردي، اين مسئله در دو حالت مقيد و نامقيد زماني بررسي و حل شود. از ويژگي‌هاي اين مسئله بهينه‌سازي، دارا بودن حداقل‌هاي محلي متعددي است كه براي دستيابي به پاسخ كلي مسئله، تغييرات تابع ضربه بر حسب متغيرهاي مستقل ارائه مي‌شود. براي يک مثال عددي، نتايج مانور ضربه‌اي بهينه در فضاي سه بعدي ارائه شده‌است كه نتايج در يک حالت خاص با حل مسئله لمبرت مقايسه شده كه نشان‌دهنده‌ي دقت مناسب استخراج معادلات و محاسبات و كامل بودن آن‌ها در بدست آوردن همه عوامل مورد نياز است.

كلمات كليدي : مانورهاي مداري ضربه‌اي، مثلثات كروي، مدار انتقالي، مسئله لمبرت

# *Optimal Impulsive Orbital 3D Maneuver with or without Time Constraint*

M. Navabi and M. Sanatifar

***ABSTRACT***

Orbital transfers are an inevitable part of space missions. An optimal impulsive maneuver is one that consumes the minimum amount of energy to accomplish the transfer. The problem of optimal impulsive orbital 3D maneuver has been the subject of very few published researches due to its particular complications. Finding the optimized solution to this problem needs innovations in every aspect. However, this paper tries to turn this special kind of transfer into an applicable concept. In this paper, optimization equations to express the geometry of initial, target and transfer orbits with respect to each other are derived using the spherical trigonometry. Moreover, several cases for positioning the initial and target orbits relative to each other are presented. Based on actual applications, the problem is solved for both unconstrained and time-constrained cases. Comprising several local minimums is a characteristic of this optimization problem, consequently, variations of the delta-V are presented as a function of independent variables to achieve the general solution. The numerical results for the optimal impulsive orbital 3D maneuver are presented for a case study, and it is verified by comparing the results in a particular case with those from the Lambert problem. The illustrated results show the appropriate accuracy of the derived equations and performed computations.

***KEYWORDS :*** Impulsive Orbital Maneuver, Spherical Triangle, Transfer Orbit, Lambert's Problem

---

تاريخ دريافت مقاله:۱۳۸۹/۱۰/۲۵

تاريخ اصلاحات مقاله: ۱۳۹۰/۷/۳

i * نويسنده مسئول و استاديار، دانشگاه شهيد بهشتي- دانشكده مهندسي فن‌آوري‌هاي نوين، مهندسي هوافضا- مهندسي فضايي، sciences.edu@gmail.com

ii دانشجوي كارشناسي ارشد مهندسي فضايي، دانشگاه شهيد بهشتي – دانشكده مهندسي فن‌آوري‌هاي نوين

## ۱- مقدمه

به طور معمول ماهواره‌ها پس از پرتاب در مدار پارک قرار مي‌گيرند بنابراين براي انتقال به مدار ماموريتي خود نيازمند مانورهاي مداري هستند [۱]. هم‌چنين به‌علت نيروهاي اغتشاشي مختلفي که به ماهواره وارد مي‌شوند، ماهواره از مدار ماموريتي خود خارج شده و درنتيجه مدار ماهواره‌ها بايد بصورت دوره‌اي تصحيح شود [۲]. مدارهاي عملياتي ماهواره‌ها با توجه به ماموريت تعريف شده، مي‌توانند از نظر شکل مدار، اندازه مدار و نوع مدار متفاوت باشند که اين موضوع، پيچيدگي مسئله انتقالات بين مداري را افزايش مي‌دهد. انتقال به مدار ماموريتي، به طور عموم توسط پيشران‌هاي[۱] نصب شده روي ماهواره انجام مي‌شود و در نتيجه حداقل‌سازي مصرف سوخت مورد نياز براي انتقال، همواره مورد توجه قرار مي‌گيرد. با توجه به روش در دسترس و رايج که موتورهاي راکتي هستند، بحث انتقالات بين مداري با يک فرض نزديک به واقعيت بررسي مي‌شود. اين فرض، تغيير لحظه‌اي سرعت است که در بحث‌هاي فضايي بخصوص طراحي‌هاي اوليه، بيش‌تر مورد استفاده قرار مي‌گيرد. در انتقالات ضربه‌اي، ميزان سوخت مصرفي با $\Delta v$ مورد نياز براي انتقال رابطه دارد [۳].

انتقالات مداري ضربه‌اي مي‌توانند براساس هندسه‌ي مدارهاي اوليه و هدف، تعداد ضربات مورد استفاده، تغيير صفحه مداري يا ثابت بودن آن تقسيم‌بندي شوند [۴]. در مراجع مختلف، بيش‌تر به حالت‌هاي هندسي ساده براي مدارهاي اوليه و هدف پرداخته شده است که به نظر مي‌رسد به دليل اجتناب از پيچيدگي‌هاي خاص رياضي و هندسي اين‌گونه مسائل است [۵]. در ساده‌ترين حالت، مسئله انتقال بين مدارهاي دايروي هم‌صفحه مطرح مي‌شود که اولين بار توسط هومن، مداري براي اين انتقال طراحي شد [۶]. اين مدار در نقاط نزديکي[۲] و اوجش[۳] به مدارهاي اوليه و هدف مماس بوده و ماهواره روي اين مدار از نقطه حضيض تا اوج و يا برعکس (بسته به اينکه شعاع مدار اوليه بيش‌تر است يا شعاع مدار هدف) را مي‌پيمايد. اين نوع مدار، به‌عنوان مدارانتقالي هومن شناخته شده است. اين نوع انتقالات مي‌توانند براي حالت‌هاي خاصي نيز بکار روند. به اين نوع انتقالات، که ماهواره از نقطه حضيض يا اوج به نقطه مقابل سفر نمايد، انتقالات «هومن‌گونه» گفته مي‌شود. در حالت‌هاي پيچيده‌تر انتقال، مانند حالتي که مدارهاي اوليه و هدف بيضي‌هاي غير هم‌محور و غيرهم‌صفحه باشند و يا حالتي که زمان انتقال مقيد باشد، روش‌هاي معمول قادر به حل مسئله انتقال بهينه نيستند. در اين مقاله مسئله انتقال مداري ضربه‌اي بين مدارهاي بيضوي غيرهم‌محور و غيرهم‌صفحه مورد مطالعه قرار مي‌گيرد. اين نوع انتقالات براي اولين بار در مرجع [۷] مطرح شده و معادلاتي براي آن بيان شد اما پس از آن به دليل دشوار بودن هندسه مدارها و حالت‌هاي مختلف و هم‌چنين غيرخطي بودن معادلات، در مرجع ديگري به آن نه از نظر درستي معادلات و نه حل عددي آن‌ها پرداخته نشد. براي حل مسائل مانور مداري با اين هندسه‌هاي پيچيده، نياز به بررسي حالت‌هاي ممکن قرارگيري مداري است و دشوارترين مرحله محاسبات، يافتن زواياي موجود خواهد بود [۷]. حالت‌هاي مختلف ناشي از قرارگيري مدارهاي اوليه، انتقالي و هدف، تاکنون در هيچ مرجعي مورد بررسي قرار نگرفته است.

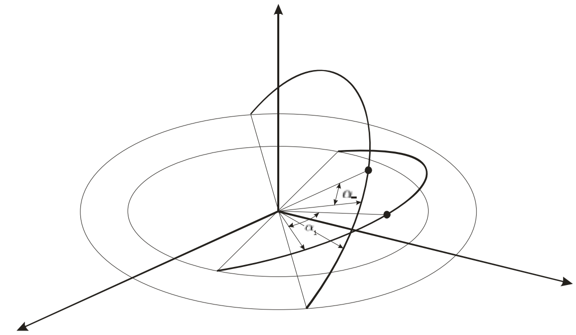
بطور خلاصه در اين مقاله به ۱- استخراج و بررسي درستي معادلات بهينه‌سازي انتقال سه بعدي، ۲- بيان و بررسي حالت‌هاي مختلف قرارگيري مدارهاي اوليه، انتقالي و هدف نسبت به يکديگر، ۳- حل عددي معادلات و ٤- دستيابي و ارائه پاسخ کلي مسئله پرداخته مي‌شود.

روابط بدست آمده براي يک مثال عددي در دو حالت انتقال مقيد زماني و نامقيد زماني اجرا مي‌شود. از آنجا که پاسخ انتقال مقيد زماني را مي‌توان با حل مسئله لمبرت مقايسه نمود، درستي پاسخ مورد ارزيابي قرار مي‌گيرد. البته حل مسئله لمبرت، با توجه به ماهيت تعريف آن فقط برخي از عوامل مورد نياز را ارائه مي‌دهد، اما در روش ارائه شده، همه عوامل لازم براي حل مسئله بهينه‌سازي مانور مداري، بدست خواهند آمد. هم‌چنين، براي بررسي درستي روش حل ارائه شده، آخرين مثال حل شده مرتبط که در مرجع [۸] آمده است، دوباره حل شده‌است. در اين مثال مدارها هم‌صفحه و غير هم‌محور هستند که در نتيجه؛ اول نمي‌توان از روش هومن يا روش‌هاي مشابه آن استفاده نمود و هم‌چنين براي حل يک مثال عددي که در آن مدارهاي اوليه و هدف هم‌صفحه هستند، بايد معادلات براي مسئله هم‌صفحه دوباره بازنويسي شوند که در اين مقاله انجام شده است. در مرجع [۸] اين مثال با يک روش پيچيده رياضي حل شده که فقط دو پاسخ براي آن بدست آمده و حتي نويسنده مرجع نيز احتمال داده که يکي از پاسخ‌ها، پاسخ کلي مسئله است اما در اين مقاله، با استفاده از الگوريتم ارائه شده پاسخ کلي مسئله بدست آمده است. نتايج نشان‌دهنده دقت مناسب اين روش و کامل بودن آن در بدست آوردن عوامل لازم است.

## ۲- تعريف مسئله

براي بيان مسئله فرض مي‌شود، انتقال از نقطه‌اي روي مدار اوليه، مانند نقطه (۱) به نقطه‌اي روي مدار هدف، مانند نقطه (۲)، باشد. اين نقاط که نقطه تلاقي مدار اوليه و انتقالي و هم‌چنين نقطه تلاقي مدار انتقالي و هدف هستند، نقاط تلاقي ناميده

مي‌شوند. براي مشخص نمودن موقعيت اين نقاط از ترو‌آنومالي[4] استفاده خواهد شد. نماي مدارهاي اوليه، هدف و نقاط تلاقي بصورت شكل(۱) است.



شكل(۱): مدارهاي اوليه و هدف و نقاط انتقال

هدف، حداقل‌سازي ميزان ضربه‌ي مورد نياز براي انجام انتقال در زمان انتقال مقيد و يا نامقيد است. براي اين‌منظور بايد ميزان ضربه‌ي لازم و زمان بر حسب چند متغير مستقل بدست آيند. اين متغيرهاي مستقل $\alpha_1$، ترو‌آنومالي نقطه (۱) روي مدار اوليه، $\alpha_2$ ترو‌آنومالي نقطه (۲) روي مدار هدف و هم‌چنين نيم‌شكم مداري مدار انتقالي، $p$ در نظر گرفته مي‌شوند زيرا ساير عوامل مياني و در نتيجه توابع $\Delta V$ و زمان برحسب اين متغيرهاي مستقل مشخص خواهند شد. همان‌طور كه در مرجع [۷] نيز به آن اشاره شده است، پيچيده‌گي‌هاي رياضي معادلات و هندسي مدارهاي اوليه و هدف سبب كاربردي نبودن اين معادلات است.

## ۳- شرايط بهينگي مقيد و نامقيد زماني

در اين قسمت توابع لازم براي شرايط بهينگي مقيد بيان مي‌شوند. مقدار كل ضربه لازم با فرض انتقال دوضربه‌اي بصورت رابطه (۱) محاسبه مي‌شود.

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = F(\xi) \quad (۱)$$

كه $\Delta V$؛ تغييرات كل سرعت در مانور توسط سامانه پيشران، $\Delta V_1$؛ تغييرات سرعت در ضربه‌ي اول، $\Delta V_2$؛ تغييرات سرعت در ضربه‌ي دوم و $\xi$؛ سه متغير مستقل $\alpha_1$ و $\alpha_2$ و $p$ هستند.

زمان انتقال نيز بر حسب متغيرهاي مستقل بصورت رابطه (۲) بيان مي‌شود.

$$\tau = G(\xi) \quad (۲)$$

### ۳-۱- مسئله انتقال بهينه بدون قيد زمان

منظور از انتقال بهينه بدون قيد زمان، انتقالي است كه هدف آن فقط حداقل‌سازي ميزان مصرف سوخت باشد و براي زمان انتقال، هيچ قيدي وجود نداشته باشد. براي انتقال بهينه بين دو مدار بدون قيد زمان؛ بديهي‌است كه بايد گراديان تابع $\Delta V$ نسبت به متغيرهاي مستقل صفر شود:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial p} = 0 \quad (۳)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (٤)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (٥)$$

كه در پايان اين روابط براي سه متغير مستقل $p$ و $\alpha_1$ و $\alpha_2$ حل خواهند شد.

### ۳-۲- مسئله انتقال بهينه همراه با قيد زمان

منظور از مسئله انتقال بهينه همراه با قيد زمان، انتقال مداري است كه در زمان مشخصي بين دو مدار انجام شود و نسبت به انتقالات ديگر كه بين همان دو مدار در زمان مشخص شده مي‌توانند انجام شوند، انرژي كم‌تري مصرف نمايد. براي اين‌منظور بايد روابط (٦) تا (۹) برقرار باشند.

$$\tau - \tau_0 = 0 \quad (٦)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial p} + k\,\frac{\partial \tau}{\partial p} = 0 \quad (۷)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_1} + k\,\frac{\partial \tau}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (۸)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_2} + k\,\frac{\partial \tau}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (۹)$$

اين معادلات براي سه متغير مستقل $p$ و $\alpha_1$ و $\alpha_2$ و هم‌چنين ضريب لاگرانژ $k$ حل خواهند شد. البته مي‌توان در روابط (۷) تا (۹) ضريب $k$ را حذف نمود. در نتيجه براي مسئله انتقال بهينه مقيد زماني، بايد روابط (۷)، (۱۰) و (۱۱) برقرار باشند.

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial p}\frac{\partial \tau}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \tau}{\partial p} = 0 \quad (۱۰)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial p}\frac{\partial \tau}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \tau}{\partial p} = 0 \quad (۱۱)$$

كه در پايان اين روابط براي سه متغير مستقل $p$، $\alpha_1$ و $\alpha_2$ حل خواهند شد.

## ٤- ارتباط $\Delta V$ و زمان با متغيرهاي مستقل

براي بدست آوردن ارتباط $\Delta V$ و زمان با متغيرهاي مستقل نياز به بيان عوامل مياني و ارتباط آن‌ها با عوامل مستقل است زيرا توابع $\Delta V$ و زمان براساس اين عوامل مياني مطرح مي‌شوند.

## ٤-١- استخراج مشتقات جزيي عوامل مياني نسبت به متغيرهاي مستقل

اگر نقاط (۱) و (۲) را موقعيت ضربات در نظر بگيريم، همان‌طور كه گفته شد، تروآنومالي‌هاي آنها با $\alpha_1$ (در صفحه مداري مدار اوليه) و $\alpha_2$ (در صفحه مداري مدار نهايي) مشخص مي‌شوند (شكل(۱)) كه فواصل آنها از مركز جسم جذاب $r_1$ و $r_2$ خواهد بود. از اين رو در صفحات مدارهاي اوليه و هدف معادله حركت مسئله دوجسمي بصورت رابطه (۱۲) خواهد بود [۱] :

$$r_1 = \frac{p_1}{1+e_1 cos\,\alpha_1} \quad , \quad r_2 = \frac{p_2}{1+e_2 cos\,\alpha_2} \qquad (۱۲)$$

كه در آن $e$، خروج از مركز مدار[5] و $p$، نيم‌شكم مداري[6] است. در صفحه مدار انتقالي، $f_1$ و $f_2$ تروآنومالي‌هاي نقاط (۱) و (۲) درنظر گرفته مي‌شوند و درنتيجه مي‌توان نوشت:

$$p = r_1\left(1+e_1 cosf_1\right) = r_2\left(1+e_2 cosf_2\right) \qquad (۱۳)$$

با حل معادله براي p و e خواهيم داشت:

$$p = \frac{r_1 r_2\left(\cos f_1 - cosf_2\right)}{r_1 cosf_1 - r_2 cosf_2} \quad , \quad e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 cosf_1 - r_2 cosf_2} \qquad (۱٤)$$

اگر زاويه مركزي انتقال كه ماهواره در مدار انتقالي مي‌پيمايد، $\Delta$ ناميده شود، خواهيم داشت:

$$\Delta = f_2 - f_1 \qquad (۱۵)$$

$$\tan f_1 = \cot\Delta - \frac{r_1\left(p-r_2\right)}{r_2\left(p-r_1\right)\sin\Delta} \qquad (۱٦)$$

$$\tan f_2 = -\cot\Delta + \frac{r_2\left(p-r_1\right)}{r_1\left(p-r_2\right)\sin\Delta} \qquad (۱۷)$$

زاويه‌ي بين صفحه مدار اوليه با صفحه مدار انتقالي با $\gamma_1$ و زاويه‌ي صفحه مدار انتقالي با صفحه مدار هدف با $\gamma_2$ نامگذاري مي‌شود. مقادير $\Delta$ ، $\gamma_1$ ، $\gamma_2$ و زاويه بين دو صفحه مدارهاي اوليه و هدف $\Phi$ و ديگر زواياي موجود، از بحث مثلثات كروي كه در بخش ٦- به طور كامل بررسي مي‌شود، بدست خواهند آمد. اما در اين قسمت نياز به معرفي ارتباط بين اين زوايا با سه متغير مستقل براي بدست آوردن مشتقات آنها است. اين روابط بصورت رابطه (۱۸) هستند.

$$\begin{aligned}
&\cos\Delta = \cos\left(\beta_1-\alpha_1\right)\cos\left(\beta_2-\alpha_2\right) + \\
&\sin\left(\beta_1-\alpha_1\right)\sin\left(\beta_2-\alpha_2\right)cos\Phi \\
&\cos\Phi = \cos\gamma_1\cos\gamma_2 - \\
&\sin\gamma_1\sin\gamma_2\cos\Delta \\
&\sin\gamma_1 = -\frac{\sin(\beta_2-\alpha_2)}{\sin\Delta}\sin\Phi \\
&\sin\gamma_2 = \frac{\sin\left(\beta_1-\alpha_1\right)}{\sin\Delta}\sin\Phi \\
&\cos\gamma_1 = \cos\gamma_2\cos\Phi + \sin\gamma_2\cos\left(\beta_2-\alpha_2\right)\sin\Phi \\
&\cos\gamma_1\cos\Phi + \sin\gamma_1\cos\left(\beta_1-\alpha_1\right)\sin\Phi
\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

در ابتدا نياز به مشخص شدن مشتقات جزيي اين متغيرها و وابستگي آنها به متغيرهاي مستقل است. وابستگي متغيرهاي مياني نسبت به متغيرهاي مستقل در جدول (۱) آمده است. به‌عنوان‌مثال همان‌طور كه ديده مي‌شود، متغيرمياني $r_1$ فقط به متغير مستقل $\alpha_1$ وابسته است.

جدول (۱): وابستگي متغيرهاي مياني نسبت به متغيرهاي مستقل

| متغيرها | توابعي از |
|---|---|
| $r_1$ | $\alpha_1$ |
| $r_2$ | $\alpha_2$ |
| $\Delta$ | $\alpha_1$ , $\alpha_2$ |
| $\gamma_1, \gamma_2$ | $\alpha_1$ , $\alpha_2$ |
| $f_1$ , $f_2$ | $\alpha_1$ , $\alpha_2, p$ |
| $e$ | $\alpha_1$ , $\alpha_2, p$ |

در نتيجه، گراديان متغيرهاي مياني نسبت به متغيرهاي مستقل، بر اساس جدول (۱) و معادلات (۱۳) تا (۱۸)، محاسبه مي‌شود كه پس از انجام عمليات رياضي و مرتب نمودن و ساده‌سازي معادلات، مشتقات متغيرهاي مياني نسبت به متغيرهاي مستقل، بصورت روابط (۱۹) تا (۳۰) براي استفاده در بخش بعد، ارائه مي‌شوند.

$$\frac{\partial r_1}{\partial\alpha_1} = r_1^2\frac{e_1}{p_1}\sin\alpha_1 \quad , \quad \frac{\partial r_2}{\partial\alpha_2} = r_2^2\frac{e_2}{p_2}\sin\alpha_2 \qquad (۱۹)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_1} = \frac{\cos(\beta_1-\alpha_1)\sin(\beta_2-\alpha_2)\cos\varphi}{\sin\Delta} \\
&-\frac{\cos(\beta_2-\alpha_2)\sin(\beta_1-\alpha_1)}{\sin\Delta} = -\cos\gamma_1 \quad , \\
&\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_2} = \frac{\cos(\beta_2-\alpha_2)\sin(\beta_1-\alpha_1)\cos\varphi}{\sin\Delta} \\
&-\frac{\cos(\beta_1-\alpha_1)\sin(\beta_2-\alpha_2)}{\sin\Delta} = \cos\gamma_2
\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1} = \frac{\cos\Delta\dfrac{\partial\Delta}{\partial\alpha_1}\sin(\beta_2-\alpha_2)\sin\varphi}{\cos\gamma_1\sin^2\Delta} = \sin\gamma_1\cot\Delta \\
&\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_2} = \left(\begin{array}{c}\dfrac{\cos\left(\beta_2-\alpha_2\right)\sin\Delta}{\cos\gamma_1\sin^2\Delta} + \\ \dfrac{\cos\Delta\dfrac{\partial\Delta}{\partial\alpha_2}\sin\left(\beta_2-\alpha_2\right)}{\cos\gamma_1\sin^2\Delta}\end{array}\right)\sin\varphi = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\Delta}
\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_1} = -\left(\begin{array}{c}\dfrac{\cos\left(\beta_1-\alpha_1\right)\sin\Delta}{\cos\gamma_2\sin^2\Delta} + \\ \dfrac{\cos\Delta\dfrac{\partial\Delta}{\partial\alpha_1}\sin\left(\beta_1-\alpha_1\right)}{\cos\gamma_2\sin^2\Delta}\end{array}\right)\sin\varphi = -\frac{\sin\gamma_1}{\sin\Delta} \\
&\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_2} = -\frac{\cos\Delta\dfrac{\partial\Delta}{\partial\alpha_2}\sin(\beta_1-\alpha_1)\sin\varphi}{\cos\gamma_2\sin^2\Delta} = -\sin\gamma_2\cot\Delta
\end{aligned} \qquad (۲۲)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial p}=-\frac{\cos^2 f_1\begin{bmatrix} r_1r_2(p-r_1)\sin\Delta- \\ r_1r_2(p-r_2)\sin\Delta \end{bmatrix}}{\left(r_2(p-r_1)\sin\Delta\right)^2}=\frac{r_1-r_2}{e^2r_1r_2 sin\Delta}=$$

$$\frac{cos f_2-cos f_1}{ep\,sin\Delta}=\frac{\partial f_2}{\partial p}=\frac{\cos^2 f_2\begin{bmatrix} -r_1r_2(p-r_1)\sin\Delta+ \\ r_1r_2(p-r_2)\sin\Delta \end{bmatrix}}{\left(r_1(p-r_2)\sin\Delta\right)^2} \tag{۲۳}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1}=\cos^2 f_1 \left[\frac{-\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_1}}{\sin^2\Delta}-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial\alpha_1}(p-r_2)r_2(p-r_1)\sin\Delta}{\left(r_2(p-r_1)\sin\Delta\right)^2}+\frac{r_1r_2(p-r_2)\left(-\frac{\partial r_1}{\partial\alpha_1}\sin\Delta+\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_1}\cos\Delta(p-r_1)\right)}{\left(r_2(p-r_1)\sin\Delta\right)^2}\right] \tag{۲٤}$$

$$=\frac{1}{sin\Delta}\left(\cos\gamma_1\cos f_1\sin f_2-\frac{e_1\,p}{ep_1}\sin\alpha_1\cos f_2\right)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2}=\cos^2 f_1 \left[\frac{-\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_2}}{\sin^2\Delta}+\frac{\frac{\partial r_2}{\partial\alpha_2}r_1r_2(p-r_1)\sin\Delta}{\left(r_2(p-r_1)\sin\Delta\right)^2}+\frac{r_1(p-r_2)(p-r_1)\left(\frac{\partial r_2}{\partial\alpha_2}\sin\Delta+\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_2}r_2\cos\Delta\right)}{\left(r_2(p-r_1)\sin\Delta\right)^2}\right] \tag{۲۵}$$

$$=-\frac{\cos f_1}{\sin\Delta}\left(\cos\gamma_2\sin f_2-\frac{e_2p}{ep_2}\sin\alpha_2\right)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \alpha_1}=\cos^2 f_2 \left[\frac{\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_1}}{\sin^2\Delta}+\frac{\frac{\partial r_1}{\partial\alpha_1}r_1r_2(p-r_2)\sin\Delta}{\left(r_1(p-r_2)\sin\Delta\right)^2}-\frac{r_2(p-r_2)(p-r_1)\left(\frac{\partial r_1}{\partial\alpha_1}\sin\Delta+\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_1}r_1\cos\Delta\right)}{\left(r_1(p-r_2)\sin\Delta\right)^2}\right] \tag{۲٦}$$

$$=\frac{\cos f_2}{\sin\Delta}\left(\cos\gamma_1\sin f_1-\frac{e_1p}{ep_1}\sin\alpha_1\right)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2}=\cos^2 f_2 \left[\frac{\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_2}}{\sin^2\Delta}+\frac{\frac{\partial r_2}{\partial\alpha_2}(p-r_1)r_1(p-r_2)\sin\Delta}{\left(r_1(p-r_2)\sin\Delta\right)^2}-\frac{r_1r_2(p-r_1)\left(-\frac{\partial r_2}{\partial\alpha_2}\sin\Delta+\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_2}\cos\Delta(p-r_2)\right)}{\left(r_1(p-r_2)\sin\Delta\right)^2}\right] \tag{۲۷}$$

$$=-\frac{1}{sin\Delta}\left(cos\gamma_2 cos f_2 sin f_1-\frac{e_2p}{ep_2}sin\alpha_2 cos f_1\right)$$

$$\frac{\partial e}{\partial p}=-\frac{\left(-r_1\sin f_1\frac{\partial f_1}{\partial p}+r_2\sin f_2\frac{\partial f_2}{\partial p}\right)(r_2-r_1)}{\left(r_1\cos f_1-r_2\cos f_2\right)^2} \tag{۲۸}$$

$$=\frac{1}{sin\Delta}\left(\frac{sin f_2}{r_1}-\frac{sin f_1}{r_2}\right)=\frac{e}{p}+\frac{sin f_2-sin f_1}{p\,sin\Delta}$$

$$\frac{\partial e}{\partial\alpha_1}=\frac{-\frac{\partial r_1}{\partial\alpha_1}(r_1\cos f_1-r_2\cos f_2)}{(r_1\cos f_1-r_2\cos f_2)^2}-\frac{\left(\frac{\partial r_1}{\partial\alpha_1}\cos f_1-\sin f_1\frac{\partial f_1}{\partial\alpha_1}r_1+r_2\sin f_2\frac{\partial f_2}{\partial\alpha_1}\right)(r_2-r_1)}{(r_1\cos f_1-r_2\cos f_2)^2} \tag{۲۹}$$

$$=\frac{\sin f_2}{\sin\Delta}\left(e\sin f_1\cos\gamma_1-\frac{e_1p}{p_1}\sin\alpha_1\right)$$

$$\frac{\partial e}{\partial\alpha_2}=\frac{\frac{\partial r_2}{\partial\alpha_2}(r_1\cos f_1-r_2\cos f_2)}{(r_1\cos f_1-r_2\cos f_2)^2}-\frac{\left(-\frac{\partial r_2}{\partial\alpha_2}\cos f_2+\sin f_2\frac{\partial f_2}{\partial\alpha_2}r_2-r_1\sin f_1\frac{\partial f_1}{\partial\alpha_2}\right)(r_2-r_1)}{(r_1\cos f_1-r_2\cos f_2)^2} \tag{۳۰}$$

$$=-\frac{\sin f_1}{\sin\Delta}\left(e\sin f_2\cos\gamma_2-\frac{e_2p}{p_2}\sin\alpha_2\right)$$

### ٤-۲- وابستگي توابع $\Delta V$ و زمان انتقال، به متغيرهاي مياني

اگر در صفحه حركت مداري، $u$؛ مولفه شعاعي سرعت و $v$؛ مولفه انتقالي سرعت باشد، مي‌توان نوشت:

$$u=\sqrt{\frac{\mu}{p}}esinf \quad , v=\frac{\sqrt{\mu p}}{r} \tag{۳۱}$$

كه در آن $\mu$ ثابت جاذبه است. اگر پانويس‌هاي + و - بعنوان المان‌هاي قبل و بعد از ضربه در نظرگرفته شوند، خواهيم داشت.

$$u_1^-=\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}e_1 sin\alpha_1 \quad , \ u_1^+=\sqrt{\frac{\mu}{p}}esinf_1 \tag{۳۲}$$

$$u_2^-=\sqrt{\frac{\mu}{p}}esinf_2 \quad , \ u_2^+=\sqrt{\frac{\mu}{p_2}}e_2 sin\alpha_2 \tag{۳۳}$$

$$v_1^-=\frac{\sqrt{\mu p_1}}{r_1} \quad , \ v_1^+=\frac{\sqrt{\mu p}}{r_1} \tag{۳٤}$$

$$v_2^-=\frac{\sqrt{\mu p}}{r_2} \quad , \ v_2^+=\frac{\sqrt{\mu p_2}}{r_2} \tag{۳۵}$$

براي تغييرات سرعت در صفحه مدار انتقالي از قانون دست راست و سيستم مختصات Ixyz كه در آن محور x در امتداد بردار موقعيت، محور y عمود بر آن و در براي حركت و محور z نيز عمود بر صفحه مداري خواهد بود، استفاده شده است [۳].

براي مولفه $x_i$ خواهيم داشت:

$$x_i=u_i^+-u_i^- \tag{۳٦}$$

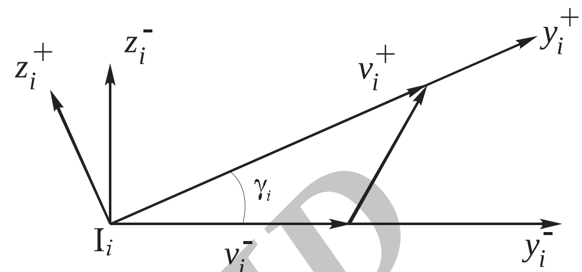
براي مولفه‌هاي $y_i$ و $z_i$ با توجه به شكل (۲) كه در آن دياگرام مولفه‌هاي سرعت در صفحه افق محلي ترسيم شده است، مي‌توان نوشت:

$$y_i^+ = v_i^+ - v_i^- \cos\gamma_i \qquad (۳۷)$$

$$z_i^+ = v_i^- \sin\gamma_i \qquad (۳۸)$$

$$y_i^- = v_i^+ \cos\gamma_i - v_i^- \qquad (۳۹)$$

$$z_i^- = v_i^+ \sin\gamma_i \qquad (۴۰)$$




شكل (۲): مولفه‌هاي سرعت در صفحه افقي در نقاط تلاقي

درنتيجه مي‌توان نوشت:

$$x_1 = \sqrt{\mu}\left(\frac{e}{\sqrt{p}}\sin f_1 - \frac{e_1}{\sqrt{p_1}}\sin\alpha_1\right) \qquad (۴۱)$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{r_1}\left(\sqrt{p} - \sqrt{p_1}\cos\gamma_1\right) \qquad (۴۲)$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{\mu p_1}}{r_1}\sin\gamma_1 \qquad (۴۳)$$

$$x_2 = \sqrt{\mu}\left(\frac{e_2}{\sqrt{p_2}}\sin\alpha_2 - \frac{e}{\sqrt{p}}\sin f_2\right) \qquad (۴۴)$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{\mu}}{r_2}\left(\sqrt{p_2}\cos\gamma_2 - \sqrt{p}\right) \qquad (۴۵)$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{\mu p_2}}{r_2}\sin\gamma_2 \qquad (۴۶)$$

كه در نتيجه براي كل ضربه مورد نياز انتقال مي‌توان نوشت:

$$\Delta V = \sum\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴۷)$$

رابطه (۴۷) از طريق متغيرهاي مياني $e, r_i, \gamma_i, f_i$ با متغيرهاي مستقل $\alpha_1, \alpha_2, p$ وابستگي دارند. براي مشتق گرفتن نسبت به متغيرهاي مستقل، ساده‌تر است $\Delta V$ به صورت رابطه (۴۸) نوشته شود:

$$\Delta V_i = \left(x_i^2 + h_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴۸)$$

كه در آن $h_i$ عبارت است از:

$$h_i^2 = y_i^2 + z_i^2 = \frac{\mu}{r_i^2}\left(p + p_i - 2\sqrt{pp_i}\cos\gamma_i\right) \qquad (۴۹)$$

براي محاسبه زمان بايد از معادله كپلر استفاده نمود [۳]:

$$M = E - e\sin E \qquad (۵۰)$$

كه در آن $M$؛ مين‌آنومالي[۷] و $E$؛ اكسنتريك آنومالي[۸] است كه بر حسب ترو‌آنومالي بصورت رابطه (۵۱) قابل محاسبه است:

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin f}{1 + e\cos f} \qquad (۵۱)$$

با استفاده از رابطه (۵۲) مي‌توان زمان را محاسبه نمود:

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p) \qquad (۵۲)$$

كه در آن $t$؛ زمان، $t_p$؛ زمان عبور از نقطه نزديكي مداري، $\mu$؛ ثابت جاذبه جسم جذاب و $a$؛ نيم قطر اصلي مدار است كه از رابطه (۵۳) محاسبه مي‌شود:

$$a = \frac{p}{1-e^2} \qquad (۵۳)$$

در پايان زمان انتقال بين ضربات را پس از N بار چرخش كامل روي مدار انتقالي مي‌توان از رابطه (۵۴) محاسبه نمود:

$$\tau = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left(M_2 - M_1 + 2\pi N\right) \qquad (۵۴)$$

## ۵- استخراج معادلات بهينگي

براي استخراج معادلات بهينگي نياز به گرايان توابع $\Delta V$ و زمان نسبت به سه متغير مستقل $\alpha_1, \alpha_2, p$ است. براي اين‌منظور بايد براساس قاعده‌ي مشتقات زنجيره‌اي عمل نمود. بنابراين مي‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \xi} = \sum \frac{1}{\Delta V_i}\left(x_i\frac{\partial x_i}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial h_i^2}{\partial \xi}\right) \qquad (۵۵)$$

هم‌چنين مي‌توان از كسينوس‌هاي هادي استفاده نمود:

$$S_i = \frac{x_i}{\Delta V_i} \quad , \quad T_i = \frac{y_i}{\Delta V_i} \quad , \quad W_i = \frac{z_i}{\Delta V_i} \qquad (۵۶)$$

كه در آن $S_i$ ، $T_i$ و $W_i$ معرف كسينوس‌هاي هادي هستند. با استفاده از روابط (۵۵) و (۵۶) خواهيم داشت:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \xi} = \sum S_i\frac{\partial x_i}{\partial \xi} + \frac{1}{2\Delta V_i}\frac{\partial h_i^2}{\partial \xi} \qquad (۵۷)$$

مشتق تابع $\Delta V$ نسبت به متغير مستقل $p$ بصورت رابطه (۵۸) است:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial p} = \frac{1}{\Delta V_1}\left(x_1\frac{\partial x_1}{\partial p} + 0.5\frac{\partial h_1^2}{\partial p}\right) + \frac{1}{\Delta V_2}\left(x_2\frac{\partial x_2}{\partial p} + 0.5\frac{\partial h_2^2}{\partial p}\right) \qquad (۵۸)$$

جمله‌هاي معادله (۵۸) با استفاده از روابط مشتقات جزيي نسبت به متغير مستقل $p$ قابل محاسبه هستند:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p} = \frac{\sqrt{\mu}}{p}\left(\left(\frac{\partial e}{\partial p}\sin f_1 + \cos f_1\frac{\partial f_1}{\partial p}e\right)\sqrt{p} - \frac{1}{2\sqrt{p}}e\sin f_1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\left(e\sin f_1 - 2\tan\frac{\Delta}{2}\right) \qquad (۵۹)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial p} = \frac{\sqrt{\mu}}{p}\left(-\left(\frac{\partial e}{\partial p}\sin f_2 + \cos f_2 \frac{\partial f_1}{\partial p} e\right)\sqrt{p} + \frac{1}{2\sqrt{p}} e \sin f_2\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\left(e\sin f_2 + \frac{2\tan\Delta}{2}\right)$$

و

$$\frac{\partial h_1^2}{\partial p} = \frac{\mu}{r_1^2}\left(1 - \frac{\sqrt{p_1}\cos\gamma_1}{\sqrt{p}}\right) = \frac{y_1}{r_1}\sqrt{\frac{\mu}{p}}$$
$$\frac{\partial h_2^2}{\partial p} = \frac{\mu}{r_2^2}\left(1 - \frac{\sqrt{p_2}\cos\gamma_2}{\sqrt{p}}\right) = -\frac{y_2}{r_2}\sqrt{\frac{\mu}{p}}$$
(۶۰)

با جايگذاري (۵۹) و (۶۰) در (۵۸) مي‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial p} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\begin{bmatrix} q_1\left(\frac{S_1 cos\Delta - S_2}{sin\Delta} + T_1\right) - \\ q_2\left(\frac{S_1 - S_2 cos\Delta}{sin\Delta} + T_2\right) - \\ \frac{(S_2 + S_1)\tan\Delta}{2}\end{bmatrix}$$
(۶۱)

که $q_i$ عبارت است از:

$$q_i = \frac{p_i}{r_i} = (1 + e cos f_i)$$
(۶۲)

بطور مشابه براي مشتق تابع $\Delta V$ نسبت به $\alpha_1$ مي‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{\Delta V_1}\left(x_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + 0.5\frac{\partial h_1^2}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{1}{\Delta V_2}\left(x_2\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} + 0.5\frac{\partial h_2^2}{\partial \alpha_1}\right)$$
(۶۳)

که جمله‌هاي آن از روابط (۶۴) بدست خواهند آمد:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} = \sqrt{\mu}\left[\frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{\partial e}{\partial \alpha_1}\sin f_1 + \cos f_1\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} e\right) - \frac{e_1}{\sqrt{p_1}}\cos\alpha_1\right] = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[\frac{esinf_2cos\gamma_1}{sin\Delta} - \frac{e_1}{p_1}p\sin\alpha_1\cot\Delta - e_1\sqrt{\frac{p}{p_1}}\cos\alpha_1\right]$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} = \sqrt{\mu}\left[-\frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{\partial e}{\partial \alpha_1}\sin f_2 + \cos f_2\frac{\partial f_2}{\partial \alpha_1} e\right)\right] = -\frac{1}{sin\Delta}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[e\sin f_1\cos\gamma_1 - \frac{e_1}{p_1}p\sin\alpha_1\right]$$
$$\frac{\partial h_1^2}{\partial \alpha_1} = \mu\frac{\begin{pmatrix}2\sqrt{pp_1}r_1\sin\gamma_1\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1} - \\ 2\frac{\partial r_1}{\partial\alpha_1}\left(p + p_1 - 2\sqrt{pp_1}\cos\gamma_1\right)\end{pmatrix}}{r_1^3} = 2\sqrt{\frac{\mu}{p}}\begin{bmatrix} z_1 q_1\sin\gamma_1\cot\Delta - \frac{e_1}{p_1}y_1 p\sin\alpha_1 - \\ \sqrt{\frac{\mu}{p}}q_1\left(1 - \sqrt{\frac{p}{p_1}}\cos\alpha_1\right)e_1\sin\alpha_1\end{bmatrix}$$
$$\frac{\partial h_2^2}{\partial \alpha_1} = \frac{\mu}{r_2^2}2\sqrt{pp_2}\sin\gamma_2\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_1} = -2\sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{\sin\gamma_1}{\sin\Delta}q_2 z_2$$
(۶۴)

بطور مشابه، اگر جمله‌هاي (۶۳) با روابط ارائه شده در (۶۴) جايگزين شود، رابطه مشتق تابع $\Delta V$ نسبت به $\alpha_1$ بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_1} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\begin{bmatrix}\left(\frac{S_1 cos\Delta - S_2}{sin\Delta} + T_1\right)\times \\ \left(esinf_1cos\gamma_1 - \frac{e_1}{p_1}psin\alpha_1\right) \\ +S_1\left(\sqrt{\frac{p}{p_1}} - cos\gamma_1\right) + \\ sin\gamma_1\begin{pmatrix}\left(\frac{W_1 - W_2}{sin\Delta}\right)q_2 \\ -\frac{W_1\tan\Delta}{2}\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$
(۶۵)

بطور مشابه براي مشتقات مربوط به $\alpha_2$ مي‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{\Delta V_1}\left(x_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} + 0.5\frac{\partial h_1^2}{\partial \alpha_2}\right) + \frac{1}{\Delta V_2}\left(x_2\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} + 0.5\frac{\partial h_2^2}{\partial \alpha_2}\right)$$
(۶۶)

که با استفاده از عمليات مشتق‌گيري و ساده‌سازي مشابه قبل مي‌توان براي جمله‌هاي آن نوشت:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} = \sqrt{\mu}\left[\frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{\partial e}{\partial \alpha_2}\sin f_1 + \cos f_1\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2} e\right)\right]$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} = \sqrt{\mu}\left[\frac{e_2}{\sqrt{p_2}}\cos\alpha_2 - \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{\partial e}{\partial \alpha_2}\sin f_2 + \cos f_2\frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} e\right)\right]$$
$$\frac{\partial h_1^2}{\partial \alpha_2} = \frac{\mu}{r_1^2}2\sqrt{pp_1}\sin\gamma_1\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_2}$$
$$\frac{\partial h_2^2}{\partial \alpha_2} = \mu\frac{\begin{pmatrix}2\sqrt{pp_2}r_2\sin\gamma_2\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_2} - \\ 2\frac{\partial r_2}{\partial\alpha_2}\left(p + p_2 - 2\sqrt{pp_2}\cos\gamma_2\right)\end{pmatrix}}{r_2^3}$$
(۶۷)

در پايان نيز با جايگذاري جمله‌هاي رابطه (۶۶) با روابط ارائه شده در (۶۷)، رابطه (۶۸) به‌دست مي‌آيد.

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_2} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}}\begin{bmatrix}\left(\frac{S_1 - S_2 cos\Delta}{sin\Delta} + T_2\right)\left(esinf_2cos\gamma_2 - \frac{e_2}{p_2}psin\alpha_2\right) \\ +S_2\left(\sqrt{\frac{p}{p_2}} - cos\gamma_2\right) + sin\gamma_2\begin{pmatrix}\left(\frac{W_2 - W_1}{sin\Delta}\right)q_1 \\ -\frac{W_2\tan\Delta}{2}\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$
(۶۸)

تا اينجا به استخراج روابط مشتق $\frac{\partial \Delta V}{\partial p}$، $\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_1}$ و $\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha_2}$ پرداخته شد.

هم‌چنين براي تابع زمان که از معادله کپلر بدست آمد

مي‌توان نسبت به متغيرهاي مستقل مشتق گرفت و در نتيجه خواهيم داشت:

$$\partial\tau/\partial\xi=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(a^{\frac{3}{2}}M_2\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(a^{\frac{3}{2}}M_1\right)\\+2\pi N\frac{\partial}{\partial\xi}\left(a^{\frac{3}{2}}\right)\end{bmatrix}\qquad(۶۹)$$

در نتيجه مشتقات بر اساس $a^{\frac{3}{2}}$ و M مورد نياز هستند. بر اساس رابطه كپلر، M تابعي از e و f است و براساس جدول (۱) تابعي از ۳ متغير $\alpha_1$، $\alpha_2$ و $p$ خواهد بود. مي‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial\xi}&=\left(1-e\cos E\right)\frac{\partial E}{\partial\xi}-\sin E\frac{\partial e}{\partial\xi}=\\&\frac{\left(1-e^2\right)}{q}\frac{\partial E}{\partial\xi}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{q}\sin f\frac{\partial e}{\partial\xi}\end{aligned}\qquad(۷۰)$$

سپس

$$\frac{\partial E}{\partial\xi}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{q}\frac{\partial f}{\partial\xi}-\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial e}{\partial\xi}\qquad(۷۱)$$

با جايگذاري (۷۱) در (۷۰) خواهيم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial\xi}&=\frac{\left(1-e^2\right)}{q}\frac{\sqrt{1-e^2}}{q}\frac{\partial f}{\partial\xi}-\frac{sinf}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial e}{\partial\xi}-\\&\frac{\sqrt{1-e^2}}{q}\sin f\frac{\partial e}{\partial\xi}=\\&\frac{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}{q^2}\frac{\partial f}{\partial\xi}-\frac{\sqrt{1-e^2}\left(q+1\right)}{q^2}\sin f\frac{\partial e}{\partial\xi}\end{aligned}\qquad(۷۲)$$

براي جمله نيم قطر اصلي نيز مانند روند فوق مي‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}a^{\frac{3}{2}}=\frac{3ep^{\frac{3}{2}}}{\left(1-e^2\right)^{\frac{5}{2}}}\frac{\partial e}{\partial\alpha}\qquad(۷۳)$$

در نتيجه:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(a^{\frac{3}{2}}M\right)&=a^{\frac{3}{2}}\frac{\partial M}{\partial\alpha}+M\frac{\partial a^{\frac{3}{2}}}{\partial\alpha}=\\&\frac{p^{\frac{3}{2}}}{q^2}\left[\frac{\partial f}{\partial\alpha}-\frac{q+1}{1-e^2}sinf\frac{\partial e}{\partial\alpha}\right]+\frac{3eMp^{\frac{3}{2}}}{\left(1-e^2\right)^{\frac{5}{2}}}\frac{\partial e}{\partial\alpha}\end{aligned}\qquad(۷٤)$$

در پايان:

$$\frac{\partial\tau}{\partial\alpha}=\sqrt{\frac{p^3}{\mu}}\begin{Bmatrix}\frac{1}{q_2^2}\left[\frac{\partial f_2}{\partial\alpha}-\frac{1}{e}\cot f_2\frac{\partial e}{\partial\alpha}\right]-\\\frac{1}{q_1^2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}-\frac{1}{e}\cot f_1\frac{\partial e}{\partial\alpha}\right]+\frac{1}{e}Y\sin\Delta\frac{\partial e}{\partial\alpha}\end{Bmatrix}\qquad(۷۵)$$

كه در آن Y ، بصورت رابطه (۷٦) تعريف شده است:

$$Y=\frac{1}{\left(1-e^2\right)sin\Delta}\begin{bmatrix}3e^2\tau\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}-2e\left(\frac{1}{q_2sinf_2}-\frac{1}{q_1sinf_1}\right)\\+cotf_2-cotf_1\end{bmatrix}\qquad(۷٦)$$

در نتيجه با توجه به رابطه (۷۵) مشتق تابع زمان نسبت به $\alpha_1$ و $\alpha_2$ بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial\tau}{\partial\alpha_1}=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{p^3}{\mu}}\left[-\frac{r_1^2e_1sin\alpha_1}{pp_1sinf_1}+Ysin\Delta\frac{\partial e}{\partial\alpha_1}\right]\qquad(۷۷)$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial\alpha_2}=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{p^3}{\mu}}\left[-\frac{r_2^2e_2sin\alpha_2}{pp_2sinf_2}+Ysin\Delta\frac{\partial e}{\partial\alpha_2}\right]\qquad(۷۸)$$

با جايگذاري جمله‌هاي $\frac{\partial e}{\partial\alpha_1}$ و $\frac{\partial e}{\partial\alpha_2}$ از روابط (۲۹) و (۳۰) خواهيم داشت:

$$\frac{\partial\tau}{\partial\alpha_1}=\frac{r_1V_1}{e\mu}\sqrt{\frac{p^3}{p_1}}\begin{bmatrix}-\frac{W_1r_1e_1\sin\alpha_1}{q_1p_1\sin f_1\sin\gamma_1}+\\Y\sin f_2\left(S_1q_1-T_1e\sin f_1\right)\end{bmatrix}\qquad(۷۹)$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial\alpha_2}=\frac{r_2V_2}{e\mu}\sqrt{\frac{p^3}{p_2}}\begin{bmatrix}-\frac{W_2r_2e_2\sin\alpha_2}{q_2p_2\sin f_2\sin\gamma_2}+\\Y\sin f_1\left(S_2q_2-T_2e\sin f_2\right)\end{bmatrix}\qquad(۸۰)$$

براي مشتق $a^{3/2}$ نسبت به p مي‌توان نوشت:

$$\frac{\partial a^{\frac{3}{2}}}{\partial p}=\frac{3\sqrt{p}A}{2\left(1-e^2\right)^{\frac{5}{2}}}\qquad(۸۱)$$

كه در آن A بصورت رابطه (۸۲) تعريف مي‌شود:

$$A=\left(1-e^2\right)+2ep\frac{\partial e}{\partial p}=1+e^2+\frac{2e\left(sinf_2-sinf_1\right)}{sin\Delta}\qquad(۸۲)$$

با تركيب (۸۱) و (۸۲) با (۷۲) مي‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a^{\frac{3}{2}}M}{\partial p}&=\frac{p^{\frac{3}{2}}}{q^2}\left[\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{(q+1)}{2\ ep}sinf\right]+\\&\frac{\sqrt{p}A}{2e\left(1-e^2\right)}\left[\frac{3eM}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\left(q+1\right)}{q^2}sinf\right]\end{aligned}\qquad(۸۳)$$

در نتيجه پس از ساده‌سازي خواهيم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p}\left(a^{\frac{3}{2}}M\right)&=\frac{\sqrt{p}}{eq^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{sinf}-cotf\ \frac{\sin f_2-\sin f_1}{sin\Delta}+\\\frac{\left(cosf_2-cosf_1\right)}{sin\Delta}\end{bmatrix}\\&-\frac{\sqrt{p}}{2e^2}cotf+\frac{\sqrt{p}A}{2e\left(1-e^2\right)}\left[\frac{3eM}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{pcosf\ -2er}{pesinf}\right]\end{aligned}\qquad(۸٤)$$

با قرار دادن $f=f_1$ يا $f=f_2$ در معادله (۸٤)، جمله اول از بين خواهد رفت:

$$\frac{\partial\tau}{\partial p}=\frac{1}{2e^2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\begin{Bmatrix}\cot f_1-\cot f_2+\\Y\left[\left(1+e^2\right)\sin\Delta+2e(\sin f_2-\sin f_1)\right]\end{Bmatrix}\qquad(۸۵)$$

در نتيجه در مسائل بهينه مقيد، روابط (۱۰) و (۱۱) به روابط (۸٦) و (۸۷) تبديل مي‌شوند:

$$\begin{aligned}&\left(X_1+YZe\sin f_2\right)(S_1q_1-T_1e\sin f_1)+S_1T_1+\\&W_1\left[\frac{W_1-W_2}{\sin\Delta}q_2-W_1\tan\frac{\Delta}{2}\right]-\frac{W_1Zer_1e_1\sin\alpha_1}{q_1p_1\sin f_1\sin\gamma_1}=0\end{aligned}\qquad(۸٦)$$

$$(X_2+YZe\sin f_1)(S_2q_2-T_2e\sin f_2)+S_2T_2-$$
$$W_2\left[\frac{W_2-W_1}{\sin\Delta}q_1-W_2\tan\frac{\Delta}{2}\right]+\frac{W_2Zer_2e_2\sin\alpha_2}{q_2p_2\sin f_2\sin\gamma_2}=0 \quad (۸۷)$$

که در آنها $Z$ عبارت است از:

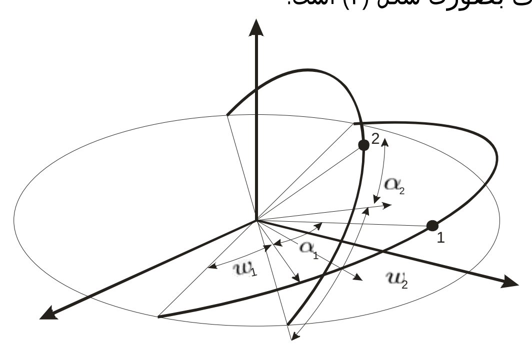
$$Z=\frac{q_2X_2-q_1X_1+(S_1+S_2)\tan\frac{\Delta}{2}}{\cot f_1-\cot f_2+Y\left[\begin{array}{l}(1+e^2)\sin\Delta+\\2e(\sin f_2-\sin f_1)\end{array}\right]} \quad (۸۸)$$

همچنین براي مسائل نامقيد زماني، همان‌طور كه در بخش ۳-۱- اشاره شد، كافي‌است روابط (۵۸)، (۶۳) و (۶۶) برابر صفر شوند.

در مرجع [۷] گفته شده است كه براي محاسبات عملي، مشكل اصلي بدست آوردن زواياي مثلثاتي و توابعي است كه شامل آنها هستند. در اين مقاله براي اولين بار با استفاده از هندسه مثلثات كروي به بيان حالت‌هاي ممكن قرارگيري مدار اوليه، هدف و انتقالي نسبت به يكديگر و بررسي كامل هندسي و بدست آوردن زواياي مثلثاتي، در بخش بعدي پرداخته خواهد شد.

## ۶- بررسي هندسه مدارهاي اوليه و هدف

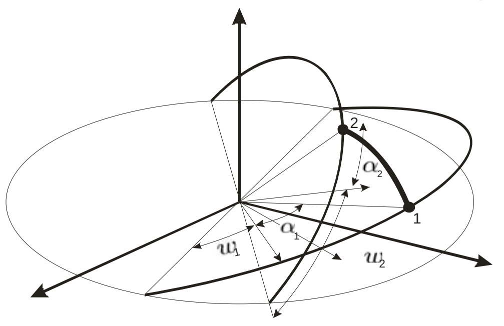
همان‌طور كه در بخش قبل نيز اشاره شد، مشكل اصلي بدست آوردن زواياي مثلثاتي است. زواياي مانند زاويه بين دو صفحه، تروآنومالي نقطه تقاطع مدارها روي مدارهاي اوليه و هدف، مقدار زاويه‌اي كه روي مدار انتقالي پيموده خواهد شد و غيره. بنابراين مي‌توان براي بدست آوردن زوايا، از تصوير مدارهاي اوليه و هدف به روي كره‌اي به شعاع واحد استفاده نمود. تصوير مدارهاي اوليه و هدف روي كره‌اي به شعاع واحد به فهم هندسه مسئله كمك مي‌نمايد. تصوير مدارهاي اوليه و هدف بصورت شكل (۳) است:




شكل (۳): تصوير مدارهاي اوليه و هدف و نقاط انتقال روي كره‌ي واحد

تصوير مدار انتقالي روي كره‌ي واحد نيز از نقطه (۱) به (۲)، به‌صورت شكل (۴) فرض مي‌شود.

در شكل (۴)، $\omega_1$؛ آرگومان نقطه حضيض مدار اوليه و $\omega_2$؛ آرگومان نقطه حضيض مدار دوم است. همچنين فرض مي‌شود تروآنومالي نقطه تقاطع تصوير مدارهاي اوليه و هدف روي كره واحد، روي مدار اوليه $\beta_1$ و روي مدار هدف، $\beta_2$ باشد. زاويه بين دو صفحه مدارهاي اوليه و هدف، $\Phi$ در نظر گرفته مي‌شود.

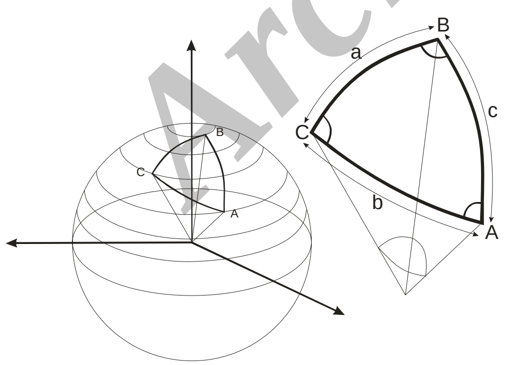



شكل (۴): تصوير مدار انتقالي روي كره‌ي واحد از نقطه (۱) به (۲)

براي بدست آوردن زواياي $\gamma_1$، $\gamma_2$ و $\Delta$، بايد مثلث كروي شامل نقاط (۱)، (۲) و نقطه تقاطع تصوير دو مدار اوليه و هدف را حل نمود. منظور از حل يک مثلث كروي، دستيابي به مقادير تعدادي از زوايا در آن مثلث كروي با داشتن زواياي ديگر است. براي روشن شدن بحث، به موضوع مثلثات كروي پرداخته مي‌شود.

### ۶-۱- مثلثات كروي

بحث مثلثات كروي، از قرارگيري سه نقطه روي يک كره آغاز مي‌شود. زواياي گوشه‌اي اين سه نقطه مشابه زواياي مثلث بوده و به اختصار «زاويه» ناميده مي‌شوند. زواياي مركزي كه از رسم خطوط شعاعي اين سه نقطه بدست خواهند آمد، نيز به اختصار «كمان» ناميده مي‌شوند. مقادير زوايا و كمان‌ها با يكديگر ارتباط دارند. شكل (۵) نمايي از موقعيت اين سه نقطه و زواياي مورد بحث را نشان مي‌دهد.




شكل (۵): قرارگيري سه نقطه روي يک كره و تشكيل مثلث كروي

مقادير سينوس اين زوايا بصورت روابط (۸۹) تا (۹۱) با يكديگر ارتباط دارند [۸] و [۹]:

$$\sin a\sin B=\sin b\sin A \quad (۸۹)$$

$$\sin a\sin C=\sin c\sin A \quad (۹۰)$$

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B \qquad (91)$$

بنابراین مي‌توان نوشت:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C} \qquad (92)$$

همچنین مقادیر کسینوس این زوایا نیز بصورت روابط (۹۳) تا (۹۵) با یکدیگر در ارتباط هستند [۹] و [۱۰] .

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \qquad (93)$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \qquad (94)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \qquad (95)$$

از روابط فوق مي‌توان نوشت:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \qquad (96)$$

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \qquad (97)$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \qquad (98)$$

براي حل روابط بالا نیاز به داشتن ۳ عامل از ٦ عامل است. با توجه به اینکه کدامیک از عامل معلوم باشند، تعداد پاسخ‌ها و روابط مورد نیاز متفاوت خواهد بود. براي سه عامل معلوم، ٦ حالت مختلف مي‌تواند وجود داشته باشد [۱۱].

۱) زاویه - زاویه – زاویه: سه زاویه موجود و کمان‌ها خواسته شده باشد.

۲) زاویه - کمان – زاویه: دو زوایه و کمان بین آنها موجود و دیگر زوایا خواسته شده باشد.

۳) کمان - زاویه - زاویه: یک کمان و دو زاویه روبرو موجود و دیگر زوایا خواسته شده باشد.

٤) کمان - کمان – زاویه: دو کمان و زاویه روبروي آنها موجود و دو زاویه و کمان دیگر خواسته شده باشد.

٥) کمان- زاویه – کمان: دو کمان و زاویه بین آنها موجود و دو زاویه دیگر و کمان بین آنها خواسته شده باشد.

٦) کمان-کمان-کمان: سه کمان موجود و سه زاویه خواسته شده باشد.

در حالت‌هاي فوق مسئله مي‌تواند ۰ یا ۲ پاسخ داشته باشد. در جدول (۲) این شش حالت به همراه تعداد پاسخ‌ها آورده شده است.

جدول (۲): شش حالت ممکن در مثلثات کروي و تعداد پاسخ‌ها

| حالت | زوایاي داده شده | زوایاي خواسته شده | تعداد پاسخ‌ها |
|---|---|---|---|
| ۱ | a, b, c | A, B, C | ۰ یا ۲ |
| ۲ | a, C, b | A, c, B | ۲ پاسخ |
| ۳ | a, b, A | B, c, C | ۰ یا ۲ |
| ۴ | A, B, a | b, c, C | ۰ یا ۲ |
| ۵ | A, c, B | a, b, C | ۲ پاسخ |
| ۶ | A, B, C | a, b, c | ۰ یا ۲ |

از بین حالت‌هاي مختلف، دو حالت (۲) و (۵) کارایي بیش‌تري دارند. این دو حالت، دو پاسخ مجزا دارند که در مثال عددي علت وجود این دو پاسخ و کارایي آنها بیان مي‌شود.

## ٦-۲- کاربرد مثلثات کروي در یافتن زوایاي $\Phi$، $\beta_1$ و $\beta_2$

هندسه مدارهاي اولیه و هدف و همچنین زوایاي $\Phi$، $\beta_1$ و $\beta_2$ در شکل (٦) آمده است. گفتني است که مدارهاي اولیه و هدف در دو نقطه یکدیگر را قطع مي‌نمایند. نقطه‌اي باید در نظر گرفته شود که مدار هدف نسبت به مدار اولیه در موقعیت بالا آمدن[۹] باشد. در شکل (٦)، $\Omega$؛ طول زاویه‌اي گره‌ي صعودي، $i$ زاویه میل صفحه مداري و $\omega$؛ آرگومان نقطه حضیض مداري هستند که این سه زاویه بیان‌کننده مدار، در فضاي سه بعدي هستند. با مشخص بودن $i_1$ ، $i_2$ ، $\Omega_1$ و $\Omega_2$ یک مثلث کروي وجود خواهد داشت که دو زاویه و کمان بین آنها مشخص است و به دنبال یافتن دو کمان ( $\omega_1+\beta_1$ و $\omega_2+\beta_2$ ) و زاویه دیگر، ( $\Phi$: زاویه بین دو صفحه) هستیم و این حالت (زاویه – کمان – زاویه)، حالت دوم در جدول (۲) است. یکي از این پاسخ‌ها، پاسخي است که ما به آن نیاز خواهیم داشت و دیگري مکمل این پاسخ است. چگونگي انتخاب صحیح این پاسخ به مقادیر $i_1$ ، $i_2$ ، $\Omega_1$ و $\Omega_2$ بستگي کامل دارد که در این قسمت به تقسیم‌بندي آنها اشاره خواهد شد.

درحالت کلي موقعیت قرارگیري دو مدار به دو دسته کلي تقسیم‌بندي مي‌شود: ۱) $\Omega_2>\Omega_1$ و ۲) $\Omega_2<\Omega_1$. هر کدام از این حالت‌ها مي‌توانند ۸ حالت مختلف داشته باشند.

این حالت‌ها عبارتند از:

الف) $\Omega_2>\Omega_1$

$180\ \Omega_2-\Omega_1<0$ و $i_2$ و $i_1>$

$180\ \Omega_2-\Omega_1<0$ و $i_2>0$ و $i_1<$

$180\ \Omega_2-\Omega_1<0$ و $i_2<0$ و $i_1>$

$180\ \Omega_2-\Omega_1<0$ و $i_2\ \&i_1<$

$180\ \Omega_2-\Omega_1>0$ و $i_2\ \&i_1>$

$180\ \Omega_2-\Omega_1>0$ و $i_1>0$ و $i_2<$

$180\ \Omega_2-\Omega_1>0$ و $i_2>0$ و $i_1<$

$180\ \Omega_2-\Omega_1>0$ و $i_2\ \&\ i_1<$

ب) $\Omega_2<\Omega_1$

$180\ \Omega_1-\Omega_2<0$ و $i_2\ \&i_1>$

$180\ \Omega_1-\Omega_2<0$ و $i_2>0$ و $i_1<$

$180\ \Omega_1-\Omega_2<0$ و $i_1>0$ و $i_2<$

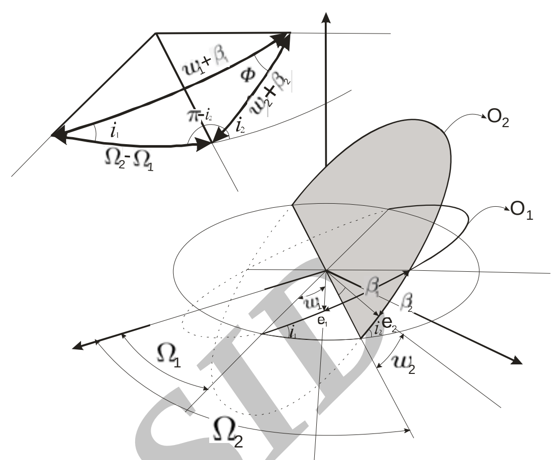
$180\ \Omega_1-\Omega_2<0$ و $i_2\ \&i_1<$

$180\ \Omega_1-\Omega_2>0$ و $i_2\ \&i_1>$

$180\ \Omega_1-\Omega_2>0$ و $i_1>0$ $i_2<$

$180\ \Omega_1-\Omega_2>0$ و $i_2>0$ $i_1<$

$180\ \Omega_1-\Omega_2>0$ و $i_2\ \&i_1<$




شکل (٦): هندسه مدارهاي اوليه، هدف و زواياي $\Phi$، $\beta_1$ و $\beta_2$

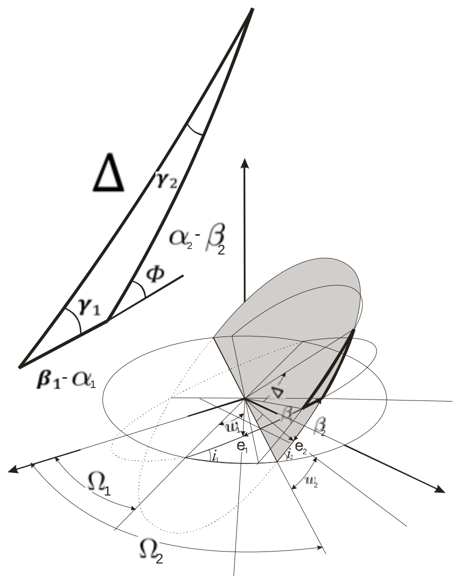
در هر کدام از اين حالت‌ها، موقعيت قرارگيري مثلث کروي متفاوت است. نکته مهم اين است که هنگامي که $\Omega$ يک مدار ۱۸۰ درجه بيش‌تر شود معادل اين است که زاويه ميل صفحه مداري قرينه شده باشد و برعکس. هم‌چنين مي‌توان گفت اگر هر دو شرط بطور هم‌زمان باشند، يعني هم $\Omega$ يک مدار ۱۸۰ درجه بيش‌تر گردد و هم زاويه ميل صفحه مداري قرينه شود، همان مدار اولي بدست خواهد آمد.

## ٦-٣- کاربرد مثلثات کروي در يافتن زواياي $\gamma_1$، $\gamma_2$ و $\Delta$

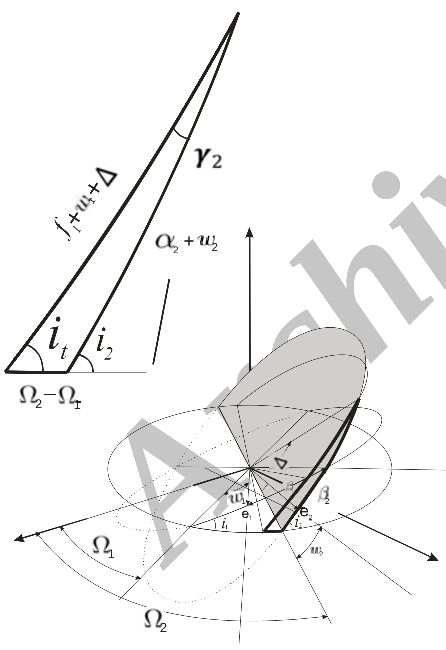
براي بدست آوردن مقادير زواياي $\gamma_1$، $\gamma_2$ و $\Delta$ نياز به بررسي هندسي مدار انتقالي است. هندسه مدار انتقالي و چگونگي تشکيل مثلث کروي در شکل (٧) آمده است. زواياي $\pi-\varphi$، $\beta_1-\alpha_1$ و $\alpha_2-\beta_2$ تشکيل يک مثلث کروي را مي‌دهند. در واقع اين حالت مشخص بودن دو کمان و زاويه‌ي بين آنهاست که حالت پنجم (کمان - زاويه - کمان)، از بخش ٦-١- است. در اين قسمت چهار حالت مختلف اساسي بررسي مي‌شود. اين چهار حالت بسته به مقادير $\alpha_1$ و $\alpha_2$ نسبت به $\beta_1$ و $\beta_2$ شکل گرفته‌اند. گفتني است هر کدام از اين ٤ حالت اصلي به ٤ حالت فرعي نيز تقسيم‌بندي مي‌شوند. هندسه اين چهار حالت اصلي در شکل (٩) آمده است.

## ٦-٤- کاربرد مثلثات کروي در يافتن عوامل مداري مدار انتقالي

براي بدست آوردن مقادير عوامل مدار انتقالي بايد مدار انتقالي نسبت به يکي از مدارهاي اوليه و يا هدف در نظر گرفته شود. که در اينجا، مدار انتقالي نسبت به مدار هدف در نظر گرفته مي‌شود. نماي مثلث کروي حاصل بصورت شکل (٨) است.




شکل (٧): هندسه مدار انتقالي و زواياي $\gamma_1$، $\gamma_2$ و $\Delta$




شکل (٨): عوامل مدار انتقالي و تشکيل مثلث کروي

در اين صورت همان‌طور که در شکل (٨) ديده مي‌شود، يک مثلث کروي از نوع زاويه – کمان – زاويه خواهيم داشت که زاويه‌هاي $\pi-i_2$ و $\gamma_2$ و کمان بين آنها يعني $\alpha_2+\omega_2$ مشخص است و به دنبال به دست آوردن کمان‌هاي ديگر و زاويه بين آنها هستيم که پس از يافتن آنها، عوامل مداري

$\Omega_t$ ,$i_t$ ,$\omega_t$ با مشخص بودن مقدار $f_1$ براحتي قابل استخراج هستند.

## ۷- مثال عددي

در اين قسمت با استفاده از کد نوشته شده در محيط نرم‌افزار مطلب، براي يک مثال عددي، مسئله انتقال بهينه ضربه‌اي بين مداري در فضاي سه بعدي در دو حالت مقيد و نامقيد زماني حل شده است. اين مسئله، انتقال بهينه از مدار اوليه به مدار هدف با مشخصات داده شده که در جدول (۳) آمده است، در دو حالت الف) انتقال مقيد زماني با زمان انتقال ۲۵۰۰ ثانيه و ب) انتقال بدون قيد زمان حل شده‌است.

جدول (۳): مشخصات مدارهاي اوليه و هدف

| | i | $\Omega$ | $\omega$ | P(km) | e |
|---|---|---|---|---|---|
| مدار اوليه | ۳۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۸،۰۰۰ | ۰/۲ |
| مدار هدف | ۳۵ | ۶۰ | ۱۰ | ۱۰،۰۰۰ | ۰/۵ |

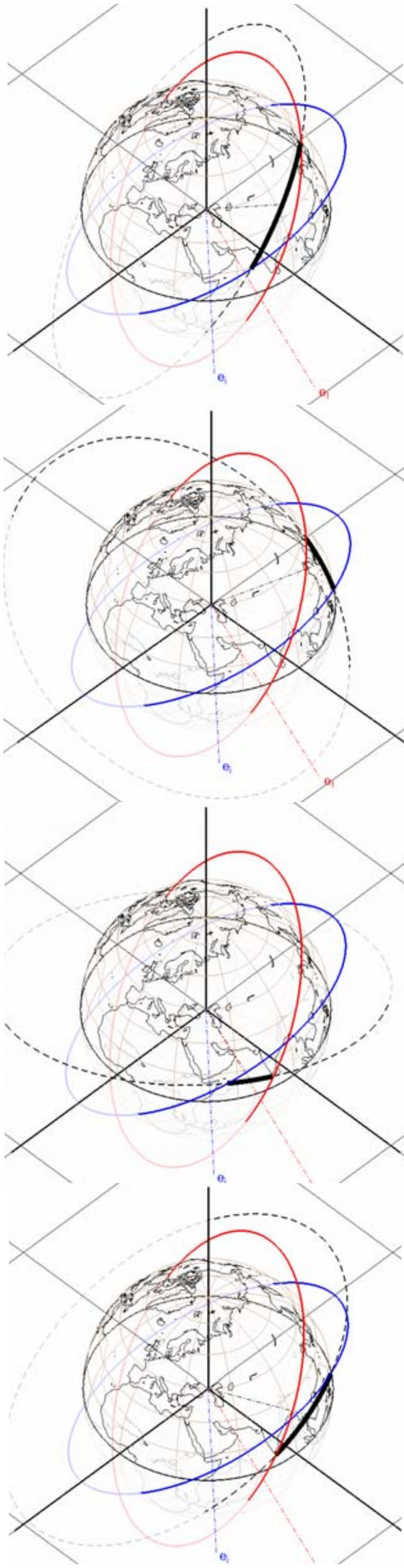
الف) انتقال مقيد زماني با زمان انتقال ۲۵۰۰ ثانيه:

در اين صورت لازم است تا معادلات (۸۶) و (۸۷) به‌همراه قيد زمان ارضا شوند. هندسه مدار انتقالي پاسخ بصورت شکل (۱۰) خواهد بود. عوامل مدار انتقالي و ميزان ضربات لازم به شرح جدول (٤) است.

جدول (٤): عوامل مدار انتقالي براي انتقال مقيد زماني

| عوامل | مقدار |
|---|---|
| ضربه‌ي اول، $\Delta v_1$ | ۳/۳۷۵۶ $(\frac{km}{s})$ |
| ضربه‌ي دوم، $\Delta v_2$ | ۰/۰۹۰۶۷ $(\frac{km}{s})$ |
| ضربه‌ي کل $\Delta v_T$ | ۳/۴۶۶۳ $(\frac{km}{s})$ |
| زمان انتقال | ۲۵۰۰ $(s)$ |
| زاويه بين صفحات مداري اول و دوم، $\varphi$ | ۲۱/۷۰۵۲ |
| تروآنومالي تقاطع مداري مدار اول، $\beta_1$ | ۶۴/۵۰۶۳ |
| تروآنومالي تقاطع مداري مدار دومي، $\beta_2$ | ۵۰/۳۴۶ |
| آرگومان نقطه حضيض مدار انتقالي، $\omega$ | ۸/۵۷۸۲ |
| زاويه ميل صفحه مداري مدار انتقالي، $i$ | ۳۵/۶۴۱۷ |
| مدار انتقالي $\Omega$ | ۵۹/۰۷۷۶ |
| زاويه مرکزي روي مدار انتقالي، $\Delta$ | ۸۱/۶۲۴۷ |
| زاويه تغيير صفحه در ضربه اول، $\gamma_1$ | ۲۱/۵۶۸۷ |
| زاويه تغيير صفحه در ضربه دوم، $\gamma_2$ | ۰/۸۳۴۴ |
| خروج از مرکز مدار انتقالي، $e$ | ۰/۵۰۹۶۲ |

براي اطمينان بيش‌تر از درستي پاسخ، مقادير بدست آمده با حل مسئله لمبرت مقايسه شده‌است. گفتني است که در مسئله لمبرت فقط ورودي‌هاي مسئله موقعيت نقاط اوليه و هدف در فضا و هم‌چنين زمان انتقال بين آنهاست. در اينجا زمان انتقال بين دو نقطه ۲۵۰۰ ثانيه است.



شکل (۹): چهار حالت اساسي قرارگيري مدار انتقالي نسبت به مدارهاي اوليه و هدف

همچنين براي موقعيت دو نقطه از فضا، مقادير $\alpha_1$ و $\alpha_2$ را در عوامل مدارهاي اوليه و هدف لحاظ نموده و موقعيت برداري در مختصات $x,y,z$ ايجاد شده‌اند که بصورت زير مي‌باشند:

$$r_1 = [-۲٤۳۹/۰۲ \; ۵۸۵۲/۱۵ \; ۳٦۵٦/٦۰] \, (km)$$

$$r_1 = [-۲٤۳۹/۰۲ \; ۵۸۵۲/۱۵ \; ۳٦۵٦/٦۰] \, (km)$$

درجدول (۵)، پاسخ‌بدست آمده با پاسخ مسئله لمبرت مقايسه شده است

جدول (۵): مقايسه پاسخ‌هاي بدست آمده با پاسخ لمبرت

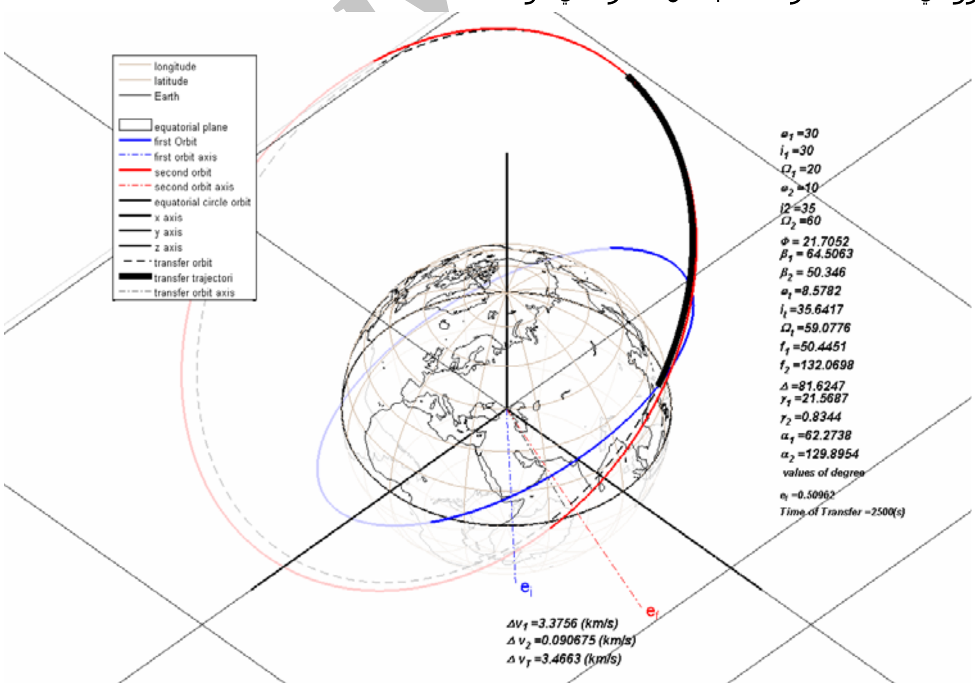
| پارامتر | پاسخ | پاسخ لمبرت |
|---|---|---|
| ضربه کل ، $\Delta v_t$ | ۳/۴۶۶۳ | – |
| آرگومان نقطه حضيض مدار انتقالي، $\omega$ | ۸/۵۷۸۲ | ۸/۵۷۸۲ |
| زاويه ميل مدار انتقالي، $i$ | ۳۵/۶۴۱۷ | ۳۵/۶۴۱۷ |
| $\Omega$ مدار انتقالي | ۵۹/۰۷۷۶ | ۵۹/۰۷۷۶ |
| زاويه مرکزي انتقالي ، $\Delta$ | ۸۱/۶۲۴۷ | – |
| تغيير صفحه در ۱، $\gamma_1$ | ۲۱/۵۶۸۷ | – |
| تغيير صفحه در ۲، $\gamma_2$ | ۰/۸۳۴۴ | – |
| خروج از مرکز مدار انتقالي، $e$ | ۰/۵۰۹۶۲ | ۰/۵۰۹۶۲ |

ب) انتقال نامقيد زماني

در ادامه به حل مثال مطرح شده در حالت انتقال بهينه نامقيد زماني، پرداخته مي‌شود. هدف، انتقال از مدار اوليه به مدار نهايي است بطوريکه کم‌ترين انرژي لازم براي انتقال بين اين دو مدار مصرف شود. يکي از راه‌هاي رسيدن به پاسخ کلي مسئله، استفاده از روشي است که در ادامه به آن اشاره مي‌شود.

اساس کار به اين صورت است که؛ از نقطه‌اي مشخص روي مدار اوليه به نقطه‌اي مشخص روي مدار هدف با مقادير مختلف نيم‌شکم مداري، انتقال انجام شود. در اينصورت فقط يکي از نيم‌شکم‌هاي انتخاب شده، کم‌ترين ميزان ضربه‌ي مورد نياز را ارائه مي‌نمايد. اين فرايند مي‌تواند براي نقاط مختلف از مدار اوليه و هدف تکرار شود و در نتيجه براي اين نقاط، مسير انتقالي بهينه بدست آيد. اگر نقاط در نظر گرفته شده بصورت قابل قبول، کل مدار اوليه و هدف را پوشش دهند، مي‌توان به پاسخ بهينه‌ي کلي رسيد. براي اين مثال بخصوص، مقادير $\alpha_1$ و $\alpha_2$ بين ۱۸۰- تا ۱۸۰درجه با فواصل ۱ درجه و همچنين مقدار $p$ بين مقادير ۸۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ با فواصل ۱۰ کيلومتر که نيم‌شکم‌هاي مداري مدارهاي اوليه و هدف هستند، تغيير نموده و رفتار تابع $\Delta v_T$ بر حسب تغييرات $\alpha_1$ و $\alpha_2$ در نيم‌شکم‌هاي مداري بصورت شکل (۱۱) رسم شده است

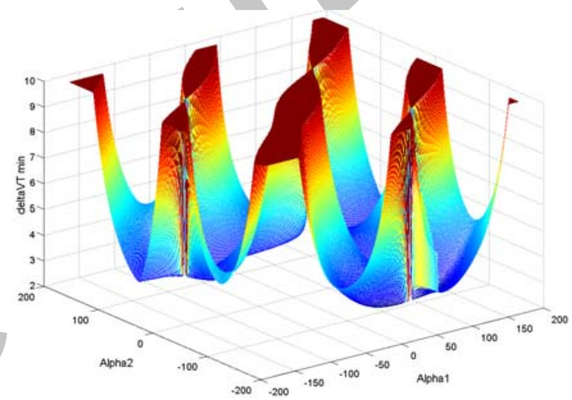
همان‌طور که در شکل (۱۲) و شکل (۱٤) ديده مي‌شود، بهينه‌ترين پاسخ به ازاي مقادير تقريبي$\alpha_1 =$ ۴۵ و $\alpha_2 =$ -۱۲۵ بدست مي‌آيند که براي اين مقادير $\alpha_1$ و $\alpha_2$ مقدار تقريبي نيم‌شکم مداري حدود ۹۸۷۰ کيلومتر است. با در نظر گرفتن اين مقادير بعنوان حدس اوليه براي حل معادلات، مقادير دقيق پاسخ، بدست خواهند آمد که در اين‌صورت هندسه مدار انتقالي در شکل (۱۳) آمده است. همچنين عوامل انتقال بصورت جدول (٦) است.



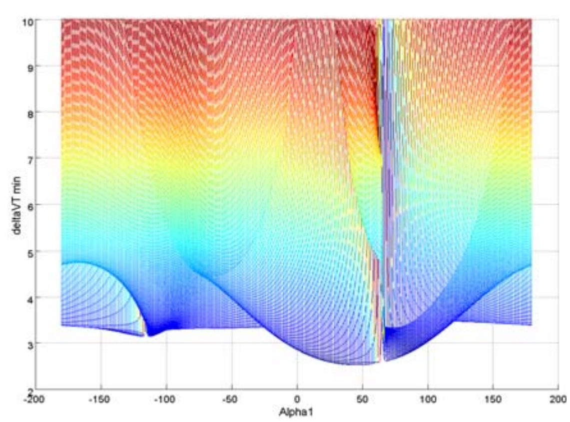

شکل (۱۰): هندسه مدار انتقالي به همراه عوامل مدار انتقالي و زمان انتقال براي يک انتقال بهينه مقيد زماني

جدول (٦): عوامل مدار انتقالي براي انتقال نامقيد زماني

| عوامل | مقدار |
|---|---|
| ضربه‌ي اول، $\Delta v_1$ | ۰/۹۷۷۳۷ $(km/s)$ |
| ضربه‌ي دوم، $\Delta v_2$ | ۱/۵۵۴۴ $(km/s)$ |
| ضربه‌ي كل $\Delta v_T$ | ۲/۵۳۱۷ $(km/s)$ |
| آرگومان نقطه حضيض مدار انتقالي، $\omega$ | ۴۶/۹۰۶۸ |
| زاويه ميل صفحه مداري مدار انتقالي، $i$ | ۳۰/۶۹۶۱ |
| مدار انتقالي $\Omega$ | ۲۴/۵۹۶۹ |
| زاويه مركزي روي مدار انتقالي ، $\Delta$ | ۲۰۱/۴۴۰۹ |
| زاويه تغيير صفحه در ضربه اول، $\gamma_1$ | ۲/۴۲۴۱ |
| زاويه تغيير صفحه در ضربه دوم، $\gamma_2$ | -۱۹/۴۳۱۵ |
| خروج از مركز مدار انتقالي ، $e$ | ۰/۴۴۷۰۳ |
| نيم‌شكم مدار انتقالي، $p$ | ۹۸۷۱/۷۵۱ $(km)$ |




شكل (١١): پاسخ‌هاي بهينه محلي و كلي مانور مداري ضربه‌اي




شكل (١٢): تغييرات تابع $\Delta v_T$ بهينه برحسب $\alpha_1$

در ادامه براي اطمينان از روش حل ارائه شده، مثال‌مرجع [۸] حل مي‌شود. در اين مثال، مدارهاي اوليه و هدف، بيضي‌هاي غير هم‌شكل و (با خروج از مركزهاي متفاوت) هم‌صفحه ولي غير هم‌محور هستند كه بعلت غير هم‌محور بودن مدارها، نمي‌توان از روش هومن و يا روش‌هاي مشابه آن استفاده نمود. عوامل مدار اوليه و هدف به‌صورت جدول (۷) مي‌باشند.

در مرجع [۸] اين مثال با يک روش پيچيده عددي حل شده و فقط دو پاسخ براي آن به شرح جدول (۸) بدست آمده است.

با توجه به اينكه يكي از پاسخ‌ها نسبت به ديگري مقدار كمتري دارد، نويسنده مرجع [۸] احتمال داده‌است كه پاسخ بهينه‌ي اين مثال همان پاسخ اول است. در اينجا با استفاده از روابط مطرح شده و همچنين روشي ارائه شده، پاسخ كلي مسئله بدست آمده است. پاسخ حاصل از حل معادلات مطرح شده به‌صورت خلاصه در جدول (۹) آمده است.

جدول (۷): عوامل مدارهاي اوليه و هدف

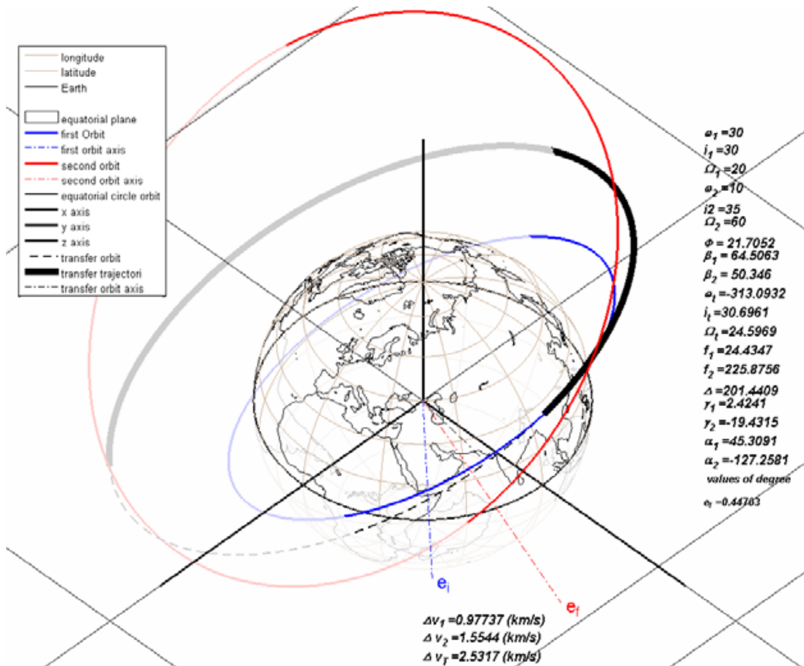
| | i | $\Omega$ | $\omega$ | P(km) | e |
|---|---|---|---|---|---|
| مدار اوليه | ۰ | ۰ | ۰ | ۳۳۳،۳۳ | ۰/۳۳ |
| مدار هدف | ۰ | ۰ | ۳۰ | ۵۰،۰۰۰ | ۰/۵ |

جدول (۸): دو پاسخ ارائه شده در مرجع [۸]

| | (km/s) $\Delta V_T$ | p(km) | $\alpha_2$ | $\alpha_1$ |
|---|---|---|---|---|
| پاسخ اول | ۰/۶۲۰۰ | ۴۱۸۵۳/۴۳۷ | ۱۵۵/۰۸۵ | ۶۱/۲۴۵ |
| پاسخ دوم | ۰/۶۶۸۵ | ۳۹۷۸۷/۳۷۶ | ۴۶/۸۸۳ | ۱۶۴/۹۸۹ |

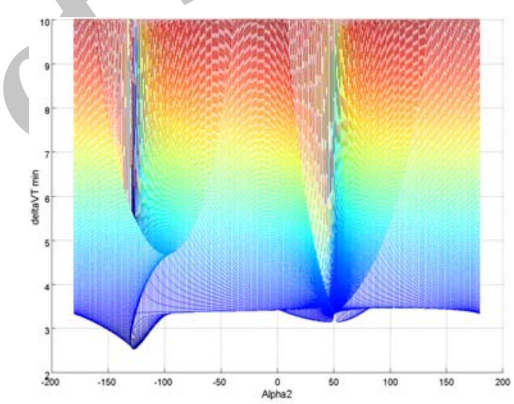
جدول (۹): مقايسه عوامل مدار انتقالي مثال حل شده در مرجع [۸] و روش پيشنهادي

| عوامل | پاسخ | مرجع [۸] |
|---|---|---|
| ضربه كل ، $\Delta v_t$ $\left(\frac{km}{s}\right)$ | ۰/۶۲۰۰ | ۰/۶۲۰۰ |
| آرگومان نقطه حضيض مدار انتقالي، $\omega$ | ۲۴/۰۴۸ | ۲۴/۰۴۸ |
| $\alpha_1$ | ۶۱/۲۴۵ | ۶۱/۲۴۵ |
| $\alpha_2$ | ۱۵۵/۰۸۵ | ۱۵۵/۰۸۵ |
| زاويه مركزي انتقال، $\Delta$ | ۱۲۳/۸۴ | - |
| زمان انتقال (S) | ۵۰۲۲۱/۱۴۷۸ | - |
| خروج از مركز مدار انتقالي، $e$ | ۰/۵۷۳۶۵ | ۰/۵۷۳۶۴۷ |

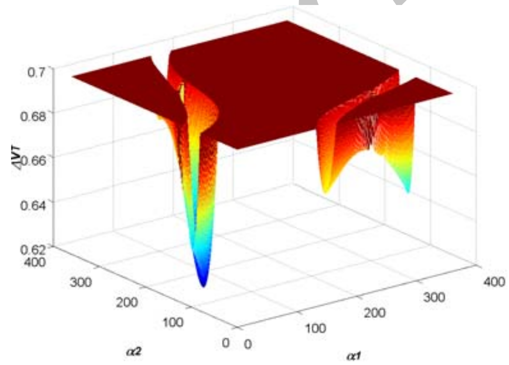



شکل (۱۳): هندسه مدارهاي اوليه، هدف، انتقالي بهينه و عوامل انتقال براي يک انتقال بهينه نامقيد زماني

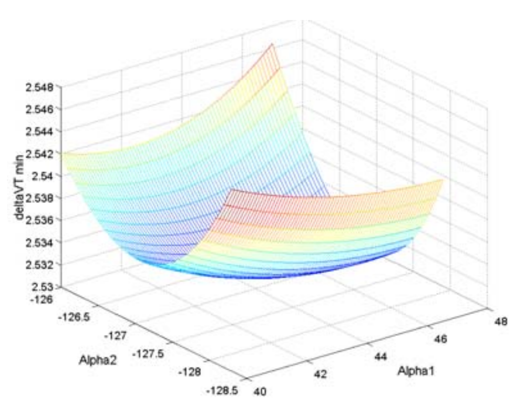
تغييرات تابع $\Delta v_T$ برحسب تغييرات متغيرهاي مستقل در شکل‌هاي (۱۶) تا (۱۹) آمده‌است. همان‌طور که مشاهده مي‌گردد، با اطمينان مي‌توان در مورد کلي بودن پاسخ بدست آمده اظهار نظر نمود. هم‌چنين، کانتورهاي تابع $\Delta v_T$ بر حسب متغيرهاي مستقل $\alpha_1$ و $\alpha_2$ در شکل (۲۰) ترسيم گرديده‌است که بوضوح مقادير مناسب اين متغيرها که مقدار $\Delta v_T$ کمينه‌را ارائه مي‌دهند، آشکار مي‌سازد. همچنين هندسه مدارهاي اوليه، انتقالي و هدف نيز در شکل (۲۱) نشان داده شده‌است.



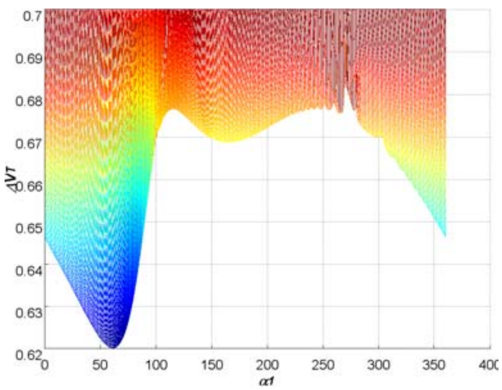

شکل (۱٤): تغييرات تابع $\Delta v_T$ بهينه برحسب $\alpha_2$



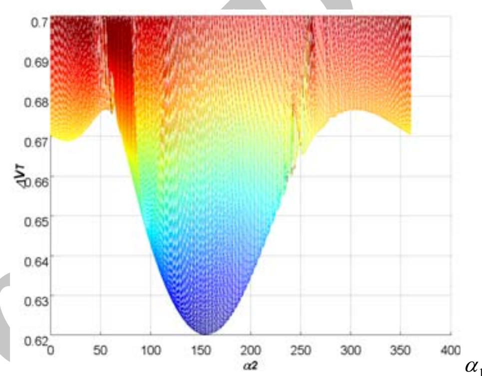

شکل (۱٦): پاسخ‌هاي بهينه محلي و کلي مانور ضربه‌اي



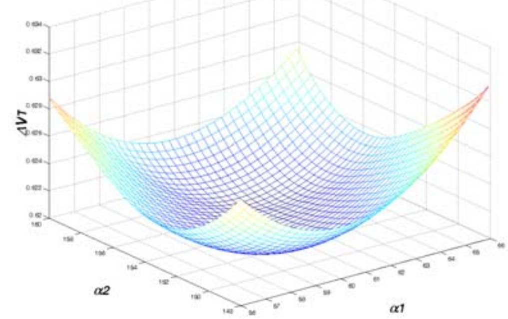

شکل (۱٥): تغييرات تابع $\Delta v_T$ بهينه برحسب $\alpha_1$ و $\alpha_2$ در همسايگي پاسخ بهينه



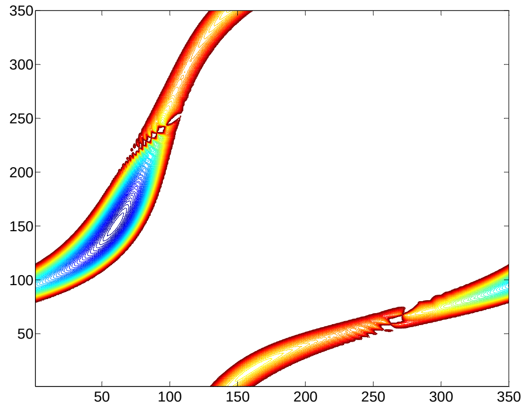

شکل (١٧): تغییرات تابع $\Delta v_T$ برحسب




شکل (١٨): تغییرات تابع $\Delta v_T$ بهینه برحسب $\alpha_2$



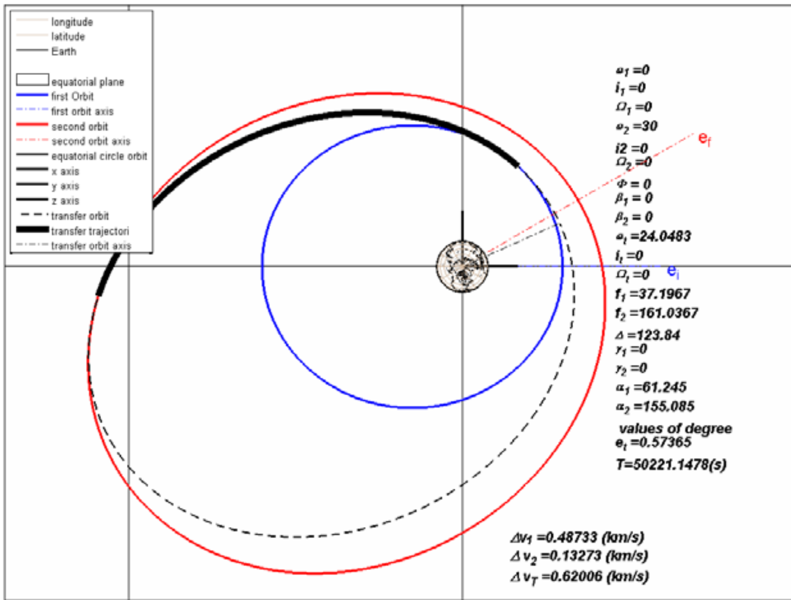

شکل (١٩): تغییرات تابع $\Delta v_T$ در همسایگي پاسخ بهینه کلي




شکل (٢٠): کانتورهاي تابع $\Delta v_T$ بهینه برحسب $\alpha_1$ و $\alpha_2$

## ٨- نتیجه‌گیري

یکي از مراحل ضروري ماموریت‌هاي فضایي، مانور مداري است. در این مقاله به استخراج معادلات بهینگي مانور ضربه‌اي در فضاي سه بعدي با احتساب قید زمان و بدون آن، پراخته شده است. بررسي هندسه‌ي مدارهاي اولیه، هدف و انتقالي نسبت به یکدیگر نیازمند مبحث مثلثات کروي بوده که یکي از بخش‌هاي مهم و دشوار محاسبات زوایا در حالت‌هاي مختلف است که تاکنون در هیچ مرجعي به آن پرداخته نشده‌بود. در این مقاله ١٦ حالت مختلف قرارگیري مدارهاي اولیه و هدف نسبت به یکدیگر و ٤ حالت اصلي قرارگیري مدار انتقالي نسبت به مدارهاي اولیه و هدف مورد بررسي قرار گرفت. در پایان به حل یک مثال عددي پرداخته شد و با توجه به تغییرات تابع $\Delta v_T$ نسبت به متغیرهاي مستقل، پاسخ کلي بهینه مسئله استخراج شد و در حالت مقید زماني درستي نتایج با حل مسئله لمبرت بررسي شد. با توجه به معادلات استخراج شده و روند بیان شده در مقاله، ابزار مناسبي براي حل انواع مسائل پیچیده‌ي مانور بهینه ضربه‌اي و دستیابي به پاسخ‌هاي کمینه محلي و پاسخ کلي به دست آمد.




شکل (۲۱): هندسه مدارهاي اوليه و هدف و انتقالي بهينه و عوامل انتقال براي يک انتقال بهينه نامقيد زماني

## ۹- مراجع


[۱] Chobotov, Vladimir A. Orbital Mechanics Second Edition. Ohio : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.

[۲] Michael D. Griffin, James R. French. Space Vehicle Design, Reston, Virginia : American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, 2002.

[۳] Curtis, H. Orbital Mechanics for Engineering Students Elsevier Aerospace Engineering Series, 2005.

[٤] F. W. Gobetz and J. R. Doll. "A survey of Impulsive Trajectories", AIAA Journal. 1969, Vol. 7, 5.

[٥] Larson, J. and Wertz, J. R. Space Mission Analysis and Design, 3rd edition, Wiley and Sons Ltd., 1999.

[٦] Hohmann, Walter. "Die Erreichbarkeit der Himmelshkörper", Oldenburg , 1925.

[۷] Eckel, Karl G. "Optimal Switching Condition for Minimum Fuel Fixed Time Transfer Between Non Coplanar Elliptical Orbits", Acta Astronautica., Vol. 11, 10/11,1984.

[۸] Lawden, Derek F. "Optimal Transfer Between Coplanar Elliptical Orbits" Journal of Guidance, 1991, Vol. 15, No. 3.

[۹] Keith, Thomas. "An Introduction To the Theory and Practice of Plain and Spherical Trigonometry", London, 2010.

[۱۰] Rothrock, David Andrew. Element of plane and Spherical Trigonometry, Macmillan, 2009.

[۱۱] Wertz, James R. Mission Geometry: Orbit and Constellation design and management: spacecraft orbit and attitude systems, 2001.


## ۱۰- زيرنويس‌ها

[۱] Thruster
[۲] Periapsis
[۳] Aopapsis
[٤] True anomaly
[٥] Eccentricity
[٦] Semi latus rectum
[۷] Mean Anomaly
[۸] Eccentric Anomaly
[۹] Ascending