



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دوره چهل و شش، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۳، صفحه ۴۶ تا ۳۷
Vol. 46, No. 1, Summer 2014, pp. 37- 46



نشریه علمی - پژوهشی امیرکبیر (مهندسی مکانیک)
Amirkabir Journal of Science & Research (Mechanical Engineering)
(AJSR - ME)

استفاده از توابع پایه نمایی در حل معادله انتقال حرارت گذرا در مواد لایه‌ای محوری

بشیر موحدبان عطار^۱، بیژن برومند^{۲*}

۱- دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان
۲- استاد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت ۱۳۹۱/۳/۹ پذیرش ۱۳۹۱/۱۱/۹)

چکیده

در این مقاله یک روش حل جدید بر مبنای استفاده از توابع پایه نمایی برای معادله انتقال حرارت گذرا در مواد لایه‌ای محوری ارائه شده است. در این روش ابتدا هر لایه از ماده به صورت یک المان مجزا در نظر گرفته می‌شود. در مرحله بعد توزیع دما درون هر لایه به صورت سری متشکل از توابع پایه نمایی صدق‌کننده در معادله دیفرانسیل انتقال حرارت گذرا بیان می‌شود. سپس ضرایب ثابت سری جواب با استفاده از یک تبدیل گسسته به مقادیر شرایط اولیه و شرط مرزی درج‌شده هر لایه، مرتبط می‌شوند. در پایان شرایط پیوستگی دما و شار گرمایی بین لایه‌ای در روندی مشابه با روش اجزاء محدود معمولی ارضاء می‌شود. در این روش دوگانه شرایط اولیه و شرایط مرزی انتهایی حاکم بر مسأله به صورت همزمان بر روی مجموعه‌ای از نقاط مرزی ارضاء می‌شود. با حل چند مسأله نمونه، قابلیت روش پیشنهادی در برآورد دقیق جواب معادله در مقایسه با سایر روش‌های موجود، نمایش داده شده است.

کلمات کلیدی

انتقال حرارت گذرا، مواد لایه‌ای، روش بدون شبکه، توابع پایه نمایی، تبدیل گسسته.

* نویسنده مسئول و عهده دار مکاتبات Email: boromand@cc.iut.ac.ir

۱- مقدمه

روندی مشابه روش اجزاء محدود ارضاء شده و به این ترتیب جواب معادله در تمام دامنه برآورد می‌گردد. سرعت و دقت روش حل پیشنهادی را می‌توان با استفاده از یک الگوی حل گام به گام زمانی افزایش داد. برای این منظور، دامنه زمانی مسأله به مجموعه‌ای از زیر بازه‌ها افزاز شده و سپس روند حل به صورت پیشرو در زمان و با محاسبه شرایط اولیه هر زیر بازه از انتهای زیر بازه قبلی، تا رسیدن به زمان مورد نظر ادامه می‌یابد.

تفاوت اصلی روش معرفی شده با روش‌های حل قبلی در نوع پایه‌های جواب و تکنیک ارضاء شرایط مرزی و شرایط پیوستگی است. استفاده از پایه‌های نمایی در این روش امکان محاسبه آسان مشتقات مراتب بالاتر تابع پاسخ و از جمله شار گرمایی را فراهم می‌سازد. همچنین به علت ویژگی توابع نمایی، می‌توان به سادگی از این روش برای حل سایر معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان (با ضرایب ثابت) بهره برد. این مزیت به ویژه در مقایسه با روش حل‌های اساسی همیت بالایی دارد. استفاده از تکنیک جدید برای رضاء همزمان شرایط مرزی و اولیه نیز، علاوه بر ارضاء انواع شرایط مرزی (دریغله، نویمان و شرایط مرزی انتگرالی) امکان استفاده از تعداد توابع پایه متفاوت با تعداد نقاط مرزی را میسر می‌سازد. با مقایسه نتایج بدست آمده از این روش و سایر روش‌های موجود (به ویژه روش حل‌های اساسی در [۱۰]) دیده می‌شود که دقت روش پیشنهادی در حدود ۲ تا ۳ مرتبه بیشتر است.

در این مقاله ابتدا مدل استفاده شده برای مسأله انتقال حرارت گذرا در مواد لایه‌ای معرفی می‌شود. سپس روش دوگانه بر مبنای استفاده از توابع پایه نمایی و تکنیک ارضاء شرایط پیوستگی مشابه روش اجزاء محدود توسعه داده می‌شود. در بخش چهارم یک الگوی گام به گام زمانی برای افزایش سرعت و دقت روش، پیشنهاد شده است. در بخش مثال‌های عددی، دقت بسیار مناسب روش در مقایسه با سایر روش‌های موجود در حل سه مسأله نمونه نمایش داده خواهد شد. مثال سوم این بخش می‌تواند به عنوان یک مسأله نمونه در پژوهش‌های بعدی مورد استفاد قرار گیرد. در پایان جمع‌بندی نتایج بدست آمده از این مقاله ارائه خواهد شد.

۲- بیان مسأله

در این مقاله از معادلات معرفی شده در [۱۰] برای بررسی مسأله انتقال حرارت در یک ماده متشکل از N_l لایه محوری طبق شکل (۱) استفاده شده است. صورت همگن معادله دیفرانسیل حاکم در لایه n ام ماده به صورت رابطه (۱) در نظر گرفته می‌شود [۱۰]:

برآورد دقیق توزیع دما و شار گرمایی وابسته به زمان در مواد لایه‌ای نیاز دسته فراوانی از مسائل موجود در علوم مهندسی است. برای مثال در محاسبات بار حرارتی ناشی از گرمایش و سرمایش برخی سازه‌ها لازم است تا توزیع دقیق دما در جداکننده‌های چند لایه مشخص شود [۱]. هم‌چنین تعیین زمان دقیق رسیدن به توزیع دمایی پایدار در طراحی برخی دستگاه‌های مکانیکی ضرورت دارد.

با بررسی در پژوهش‌های قبلی مشخص می‌شود که تاکنون چندین روش حل تحلیلی برای تعیین توزیع دما در مواد چند لایه توسعه داده شده است ([۵]، [۶]، [۹] و [۱۲]). با این حال در برخی موارد روش حل تحلیلی برای این مسائل وجود ندارد و حل مسأله بدون استفاده از روش‌های عددی امکان‌پذیر نیست. در این راستا، انواع مختلفی از روش‌های عددی از قبیل روش تفاوت محدود، روش المان محدود و روش‌های بدون شبکه برای حل این دسته از مسائل به کار گرفته شده‌اند.

روش حل‌های اساسی^۱ کی از انواع روش‌های بدون شبکه محسوب می‌شود که برای حل مسائل انتقال حرارت گذرا در مواد همگن ([۴]، [۷] و [۱۱]) و چند لایه در مرجع [۱۰] مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش از مجموعه‌ای از حل‌های اساسی معادله حاکم به عنوان پایه‌های تشکیل‌دهنده سری جواب استفاده می‌شود. ضرایب ثابت سری جواب نیز با استفاده از روش ارضاء نقطه‌ای^۲ شرایط مرزی و با حل یک دستگاه معادلات خطی تعیین می‌شود. مشکل روش حل‌های اساسی؛ نحوه انتخاب نقاط مرجع برای تولید پایه‌های جواب و همچنین ایجاد ماتریس‌های بدرفتار در محاسبه ضرایب سری است. همچنین استفاده از این روش تنها برای حل معادلاتی محدود می‌شود که حل اساسی آنها موجود باشد.

در این مقاله ایده به کار گرفته شده در مراجع [۳]، [۱۳] و [۱۵] برای حل معادله حرارت گذرا در مواد لایه‌ای محوری توسعه داده شده است. در این راستا با در نظر گرفتن زمان به عنوان یک محور کمکی، پایه‌های نمایی صدق‌کننده در معادله یک‌بعدی انتقال حرارت گذرا در هر لایه بر حسب زمان و مکان تعیین می‌شوند. در مرحله بعد جواب تقریبی مسأله به صورت یک سری از پایه‌های محاسبه شده برای هر لایه بازنویسی می‌شود. سپس با انتخاب مجموعه‌ای از نقاط در دو وجه هر لایه، ضرایب ثابت در سری جواب با استفاده از یک تکنیک تبدیل گسسته به مقادیر شرایط اولیه و شرط دمایی در دو لبه هر لایه مرتبط می‌شوند. این تکنیک اولین بار در مرجع [۲] برای حل مسأله موج در محیط بی نهایت مورد استفاد قرار گرفت.

در ادامه شرایط پیوستگی دما و شار گرمایی بین لایه‌ها در

شرایط مرزی و اولیه سازگاری لازم را داشته باشند، معادله دیفرانسیل ارائه شده در رابطه (۱) همراه با مجموعه شرایط مرزی و شرایط اولیه در روابط (۵)-(۲) جواب یکتا خواهد داشت.

۳- روش حل عددی دوگانه

در این بخش ابتدا حل هر لایه به صورت سری متشکل از توابع پایه صدق‌کننده در معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت مجهول تقریب زده می‌شود. سپس با استفاده از تکنیک تبدیل گسسته معرفی شده در پژوهش‌های قبلی، ضرایب ثابت سری جواب به مقادیر دما بر روی نقاط انتخابی اولیه و مرزی هر لایه مرتبط می‌شوند. با انجام یک عملیات جبر ماتریسی می‌توان یک رابطه مناسب بین مقادیر شار گرمایی و دما برای نقاط انتخابی در دو مرز کناری هر لایه در راستای زمان برآورد نمود. این رابطه در مرحله دوم روش دوگانه برای ارضاء شرایط پیوستگی بین لایه‌ای در روندی مشابه روش اجزاء محدود به کار گرفته می‌شود.

۳-۱- توابع پایه نمایی

یک دسته کلی از توابع صدق‌کننده در معادله (۱) می‌تواند به صورت توابع نمایی وابسته به زمان و مکان در نظر گرفته شود. در این راستا، جواب (۱) برای هر لایه و بر حسب این توابع به شکل زیر بیان می‌شود:

$$u_n(\tilde{x}_n, t, \alpha_n, \beta_n) = A_n(\alpha_n, \beta_n) e^{\alpha_n \tilde{x}_n + \beta_n t} \quad (۸)$$

با جایگذاری رابطه (۸) در (۱)، رابطه مناسب بین ضرایب α_n و β_n برای تعیین فرم پایه‌های صدق‌کننده در معادله به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$(\alpha_n)^2 - \mu_n \beta_n = 0 \quad (۹)$$

با استفاده از رابطه جبری فوق دو ریشه برای ضریب α_n بر حسب β_n به صورت زیر

$$\alpha_n^1 = +\sqrt{\mu_n \beta_n}, \quad \alpha_n^2 = -\sqrt{\mu_n \beta_n} \quad (۱۰)$$

و یک ریشه برای ضریب β_n بر حسب α_n تعیین می‌شود.

$$\beta_n = \frac{(\alpha_n^1)^2}{\mu_n} \quad (۱۱)$$

گفتنی است در ادامه برای تشکیل پایه‌های مناسب، یکی از دو ضریب α_n یا β_n به صورت یک عدد مختلط اختیاری انتخاب شده و ضریب دوم به عنوان ریشه رابطه (۹) محاسبه می‌شود. ادامه جواب نهایی مسأله می‌تواند به طور نمونه به صورت مجموعه‌ای از پایه‌های صدق‌کننده در معادله (۱) برای حالت انتخاب اختیاری ضریب β_n بیان شود.

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial \tilde{x}_n^2} - \mu_n \frac{\partial u_n}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq \tilde{x}_n \leq l_n, \quad n=1, \dots, N_l \quad (۱)$$

که در آن u_n توزیع دما در لایه n ام است که باید بر حسب متغیر مکانی محلی \tilde{x}_n و متغیر زمانی t تعیین شود و μ_n نیز ضریب پخش حرارتی لایه است. اگر طول لایه n ام با l_n مشخص شود، در این صورت متغیر مکانی هر لایه در دستگاه مختصات کلی x_n ، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x_n = \tilde{x}_n + \sum_{j=1}^{n-1} l_j \quad (۲)$$

شرایط مقدار اولیه لازم برای حل معادله دیفرانسیل (۱) برای هر لایه به صورت زیر است:

$$u_n(\tilde{x}_n, 0) = f_n(\tilde{x}_n), \quad 0 \leq \tilde{x}_n \leq l_n, \quad n=1, \dots, N_l \quad (۳)$$

همچنین شرایط مقدار مرزی در ریشه (دمایی) و نویمان (شار گرمایی) حاکم بر مسأله در دو انتهای ماده به ترتیب مطابق روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$u_1(0, t) = L_D(t) \quad \text{or} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{x}_1}(0, t) = L_N(t), \quad t \geq 0 \quad (۴)$$

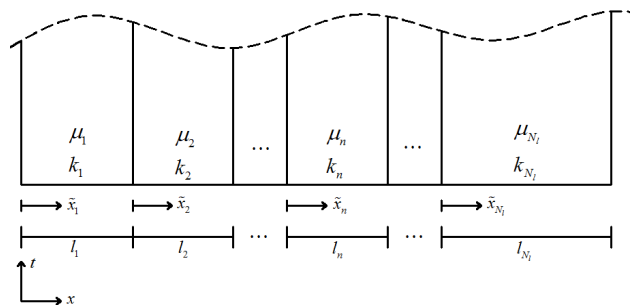
$$u_{N_l}(l_{N_l}, t) = R_D(t) \quad \text{or} \quad \frac{\partial u_{N_l}}{\partial \tilde{x}_{N_l}}(l_{N_l}, t) = R_N(t), \quad t \geq 0 \quad (۵)$$

که در روابط فوق L و R بیانگر شرایط مرزی وابسته به زمان معادله (۱) بر روی مرز سمت چپ و راست ماده هستند. اندیس‌های " D " و " N " نیز مشخص‌کننده نوع شرط مرزی اعم از شرط در ریشه و نویمان هستند. شرایط پیوستگی دما و شار گرمایی بین دو لایه مجاور نیز با روابط زیر بیان می‌شود:

$$u_n(l_n, t) = u_{n+1}(0, t), \quad t \geq 0, \quad n=1, \dots, N_l-1 \quad (۶)$$

$$k_n \frac{\partial u_n}{\partial \tilde{x}_n}(l_n, t) = k_{n+1} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \tilde{x}_{n+1}}(0, t), \quad t \geq 0, \quad n=1, \dots, N_l-1 \quad (۷)$$

در رابطه فوق k_n ضریب هدایت گرمایی لایه n ام است. گفتنی است که در هر ماده یک رابطه خطی بین k و μ به صورت $\mu = k/c_p$ برقرار است که در آن c_p ظرفیت گرمایی ماده است.



شکل (۱): مدل کلی یک ماده چند لایه محوری

در مرجع [۸] نشان داده شده است که اگر اطلاعات موجود از

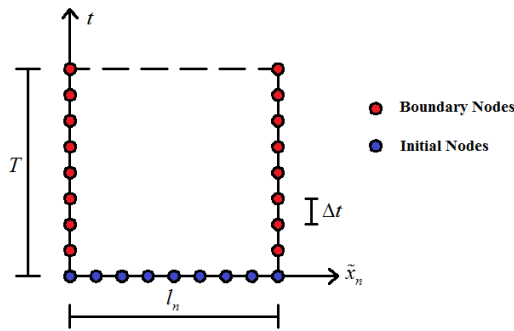
شارگرمایی در هر لایه برآورد شود. برای این منظور، باید یک رابطه مناسب بین مقادیر دما و شارگرمایی بر روی مرزهای کناری هر لایه در راستای زمان مشخص شود. این امر با استفاده از یک تکنیک تبدیل گسسته که در پژوهش‌های قبلی نیز مورد استفاده قرار گرفته است، امکان‌پذیر می‌شود.

در این تکنیک گسسته ابتدا مجموعه‌ای از نقاط شامل N_p^x نقطه اولیه و $2N_p^t$ نقطه مرزی تا زمان مورد نظر T ، در دو لبه هر لایه مطابق شکل (۲) انتخاب می‌شود. سپس ضریب $C_{n,j}$ با استفاده از روابط زیر به مقادیر دمایی لایه n ام در نقاط انتخابی مرتبط می‌شود.

$$C_{n,j} = (\bar{\mathbf{V}}_{n,j})^T \cdot \mathbf{H}_n \cdot \bar{\mathbf{U}}_n \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_{n,j} = \left[(\mathbf{V}_{n,j}^D)^T \mid (\mathbf{f}_{n,j})^T \right]^T \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_n = \left[(\mathbf{U}_n^D)^T \mid (\mathbf{F}_n)^T \right]^T \quad (18)$$



شکل (۲): انتخاب نقاط اولیه و نقاط مرزی در لایه n ام

در روابط (۱۸)–(۱۶)، $\bar{\mathbf{V}}_{n,j}$ و $\bar{\mathbf{U}}_n$ دو برداری هستند که درایه‌های آنها به ترتیب شامل مقادیر تابع پایه z ام و مقادیر شرایط اولیه و شرایط مرزی دمایی بر روی مجموعه نقاط انتخابی لایه n ام هستند. درایه‌های بردار $\bar{\mathbf{V}}_{n,j}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{V}_{n,j}^D = \left[(\mathbf{e}_{n,j}^D)_{left}^T \mid (\mathbf{e}_{n,j}^D)_{right}^T \right]^T \quad (19)$$

$$(\mathbf{e}_{n,j}^D)_{left} = \left[e^{\beta_{n,j}(t_1)}, \dots, e^{\beta_{n,j}(t_{N_p^t})} \right]^T \quad (20)$$

$$(\mathbf{e}_{n,j}^D)_{right} = \left[e^{\alpha_{n,j}(I_n) + \beta_{n,j}(t_1)}, \dots, e^{\alpha_{n,j}(I_n) + \beta_{n,j}(t_{N_p^t})} \right]^T \quad (21)$$

$$\mathbf{f}_{n,j} = \left[e^{\alpha_{n,j}(\tilde{x}_{n,1})}, \dots, e^{\alpha_{n,j}(\tilde{x}_{n,N_p^x})} \right]^T \quad (22)$$

درایه‌های بردار $\bar{\mathbf{U}}_n$ نیز به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\mathbf{U}_n^D = \left[(\mathbf{L}_n^D)^T \mid (\mathbf{R}_n^D)^T \right]^T \quad (23)$$

$$\mathbf{L}_n^D = \left[u_n(0, t_1), \dots, u_n(0, t_{N_p^t}) \right]^T \quad (24)$$

$$u_n = \int_{\Omega_{\beta_n}} \left(A_n^1(\alpha_n^1, \beta_n) e^{\alpha_n^1 \tilde{x}_n + \beta_n t} + A_n^2(\alpha_n^2, \beta_n) e^{\alpha_n^2 \tilde{x}_n + \beta_n t} \right) d\Omega_{\beta_n} \quad (12)$$

در رابطه بالا Ω_{β_n} محدوده مناسب در فضای گوس برای انتخاب ضریب β_n است. همچنین $A_n^1(\alpha_n^1, \beta_n)$ و $A_n^2(\alpha_n^2, \beta_n)$ دو دسته ضرایب ثابت مجهولی هستند که باید با استفاده از ارضاء شرایط مرزی اولیه و کناری برای هر لایه مشخص شوند. با توجه به نامحدود بودن تعداد پایه‌های تشکیل‌دهنده جواب، محاسبه این ضرایب ثابت به نوعی ناممکن خواهد بود. برای رفع این مشکل لازم است جواب معادله (۱) در فرم گسسته و به صورت یک سری متشکل از تعداد محدودی از پایه‌های نمایی بازنویسی شود.

$$\hat{u}_n(\tilde{x}_n, t) = \sum_{j=1}^{N_{\beta_n}} \left(C_{n,j}^1 e^{\alpha_{n,j} \tilde{x}_n + \beta_{n,j} t} + C_{n,j}^2 e^{\alpha_{n,j}^2 \tilde{x}_n + \beta_{n,j} t} \right) \quad (13)$$

در رابطه فوق، \hat{u}_n جواب تقریبی مسأله در لایه n ام و به ازای N_{β_n} پایه متناظر با انتخاب اختیاری ضریب β_n است. C_n^1 و C_n^2 نیز دو دسته ضرایب ثابت سری هستند که در ادامه نحوه محاسبه آنها بر اساس شرایط اولیه و شرایط مرزی هر لایه ارائه خواهد شد. چنانچه در یک روند مشابه، سری جواب برای حالت انتخاب اختیاری ضریب α_n تشکیل داده شود، جواب تقریبی را می‌توان به صورت رابطه (۱۴) در نظر گرفت:

$$\hat{u}_n(\tilde{x}_n, t) = \sum_{j=1}^{N_{\beta_n}} \left(C_{n,j}^1 e^{\alpha_{n,j} \tilde{x}_n + \beta_{n,j} t} + C_{n,j}^2 e^{\alpha_{n,j}^2 \tilde{x}_n + \beta_{n,j} t} \right) + \sum_{j=1}^{N_{\alpha_n}} \bar{C}_{n,j}^1 e^{\alpha_{n,j} \tilde{x}_n + \beta_{n,j} t} \quad (14)$$

در رابطه فوق، \bar{C}_n^1 و N_{α_n} مانند متغیرهای مشابه رابطه (۱۳) تعریف می‌شوند. در ادامه، برای ساده‌سازی فرمول‌بندی روش، رابطه (۱۴) به صورت یک سری ترکیبی از پایه‌های متناظر با انتخاب اختیاری α_n و β_n بازنویسی می‌شود.

$$\hat{u}_n(\tilde{x}_n, t) = \sum_{j=1}^{N_{\alpha_n}} \left(C_{n,j} e^{\alpha_{n,j} \tilde{x}_n + \beta_{n,j} t} \right) \quad (15)$$

C_n و N_{α_n} در رابطه بالا به ترتیب بیانگر ضرایب و تعداد پایه‌های مورد استفاده در سری جواب تقریبی هستند ($N_{\alpha_n} = N_{\alpha_n} + 2N_{\beta_n}$). شایان ذکر است نحوه انتخاب اختیاری مناسب هر یک از ضرایب α_n و β_n در بخش ۳-۳ ارائه خواهد شد.

همان‌گونه که اشاره شد، ضرایب مجهول C_n در سری جواب تقریبی با ارضاء شرایط اولیه و شرایط مرزی برای هر لایه تعیین می‌شوند. از آن جا که شرایط مرزی هر لایه از ابتدا مشخص نیست، لازم است تا با ارضاء شرایط پیوستگی بین لایه‌ای، حل در کل دامنه مشخص شده و سپس به دنبال آن توزیع دما و

$$\frac{\partial u_n}{\partial \tilde{x}_n}(l_n, t) = k_n \sum_{j=1}^{N_p^n} C_{n,j} \alpha_{n,j} e^{\alpha_{n,j} l_n + \beta_{n,j} t} \quad (33)$$

در ادامه لازم است تا مقادیر دو طرف روابط (32) و (33) در نقطه انتخابی در راستای محور زمان باز محاسبه شود.

$$\mathbf{L}_n^N = k_n \sum_{j=1}^{N_p^n} C_{n,j} (\mathbf{e}_{n,j}^N)_{left} \quad (34)$$

$$\mathbf{R}_n^N = k_n \sum_{j=1}^{N_p^n} C_{n,j} (\mathbf{e}_{n,j}^N)_{right} \quad (35)$$

در روابط فوق $(\mathbf{e}_{n,j}^N)_{left}$ و $(\mathbf{e}_{n,j}^N)_{right}$ دو بردار شامل مقادیر مشتق مکانی تابع پایه z ، در نقاط مرزی سمت چپ و راست لایه n هستند. بردارهای \mathbf{L}_n^N و \mathbf{R}_n^N نیز مشابه روابط (24) و (25) و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\mathbf{L}_n^N = \left[k_n \frac{\partial u_n}{\partial \tilde{x}_n}(0, t_1), \dots, k_n \frac{\partial u_n}{\partial \tilde{x}_n}(0, t_{N_p^n}) \right]^T \quad (36)$$

$$\mathbf{R}_n^N = \left[k_n \frac{\partial u_n}{\partial \tilde{x}_n}(l_n, t_1), \dots, k_n \frac{\partial u_n}{\partial \tilde{x}_n}(l_n, t_{N_p^n}) \right]^T \quad (37)$$

مجموعه روابط فوق را می توان در یک چیدمان واحد به شکل رابطه (38) بازنویسی کرد.

$$\mathbf{U}_n^N = \sum_{j=1}^{N_p^n} (C_{n,j} \mathbf{V}_{n,j}^N) \quad (38)$$

دو بردار \mathbf{U}_n^N و $\mathbf{V}_{n,j}^N$ در رابطه فوق به شکل زیر تعریف می-شوند:

$$\mathbf{V}_{n,j}^N = \left[(\mathbf{e}_{n,j}^N)_{left}^T | (\mathbf{e}_{n,j}^N)_{right}^T \right]^T, \quad (39)$$

$$\mathbf{U}_n^N = \left[(\mathbf{L}_n^N)^T | (\mathbf{R}_n^N)^T \right]^T. \quad (40)$$

در ادامه لازم است برای تعیین رابطه بین مقادیر دما و شارگرمایی برای $2N_p^n \times (2N_p^n + N_p^n)$ نقطه انتخابی بر روی مرزهای چپ و راست هر لایه در راستای زمان، رابطه (16) در (38) جایگذاری شود.

$$\mathbf{U}_n^N = \sum_{j=1}^{N_p^n} \mathbf{V}_{n,j}^N (\bar{\mathbf{V}}_{n,j})^T \cdot \mathbf{H}_n \cdot \bar{\mathbf{U}}_n \quad (41)$$

با تعریف ماتریس مستطیلی \mathbf{S}_n با ابعاد $(2N_p^n) \times (2N_p^n + N_p^n)$ مطابق رابطه زیر، رابطه (41) به شکل ساده شده بیان می‌شود.

$$\mathbf{S}_n = \sum_{j=1}^{N_p^n} \mathbf{V}_{n,j}^D (\bar{\mathbf{V}}_{n,j})^T \cdot \mathbf{H}_n \quad (42)$$

$$\mathbf{U}_n^N = \mathbf{S}_n \cdot \bar{\mathbf{U}}_n \quad (43)$$

با تجزیه ماتریس \mathbf{S}_n به دو زیر ماتریس مربعی \mathbf{S}_n^1 و زیر

$$\mathbf{R}_n^D = \left[u_n(l_n, t_1), \dots, u_n(l_n, t_{N_p^n}) \right]^T \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_n = \left[u_n(\tilde{x}_{n,1}, 0), \dots, u_n(\tilde{x}_{n,N_p^n}, 0) \right]^T \quad (26)$$

شایان ذکر است در این مرحله درایه‌های دو بردار \mathbf{R}_n^D و \mathbf{L}_n^D مجهول هستند و برآورد آنها نیازمند ارضاء شرایط پیوستگی بین لایه‌ها است. در ادامه به منظور تعیین ماتریس مربعی \mathbf{H}_n در (16) لازم است تا مقادیر تقریبی دما از رابطه (15) بر روی نقاط انتخابی در لایه n به شرح زیر باز محاسبه شوند.

$$\mathbf{L}_n^D = \sum_{j=1}^{N_p^n} C_{n,j} (\mathbf{e}_{n,j}^D)_{left} \quad (27)$$

$$\mathbf{R}_n^D = \sum_{j=1}^{N_p^n} C_{n,j} (\mathbf{e}_{n,j}^D)_{right} \quad (28)$$

$$\mathbf{F}_n = \sum_{j=1}^{N_p^n} C_{n,j} \mathbf{f}_{n,j} \quad (29)$$

روابط فوق را می‌توان در یک چیدمان جدید و به صورت یک جا مطابق رابطه (30) بازنویسی نمود.

$$\bar{\mathbf{U}}_n = \sum_{j=1}^{N_p^n} C_{n,j} \bar{\mathbf{V}}_{n,j} \quad (30)$$

در نهایت با استفاده از تعریف در نظر گرفته شده برای ضریب $C_{n,j}$ در (16) و انجام عملیات جبر ماتریسی، \mathbf{H}_n به شرح زیر برآورد می‌شود:

$$\mathbf{H}_n = \left[\sum_{j=1}^{N_p^n} \bar{\mathbf{V}}_{n,j} (\bar{\mathbf{V}}_{n,j})^T \right]^+ \quad (31)$$

که در رابطه فوق نماد $[\]^+$ بیانگر عملگر شبه-معکوس آست. توضیحات بیشتر در رابطه با نحوه استفاده از شبه معکوس و ویژگی‌های آن به تفصیل در مرجع [3] ارائه شده است. در پایان این قسمت با محاسبه ماتریس مربعی \mathbf{H}_n ، در واقع ضریب $C_{n,j}$ با مقادیر دمایی لایه n در نقاط مرزی مربوط شده است. در قسمت بعدی از این تعریف برای محاسبه رابطه بین مقادیر دما و شار گرمایی در نقاط مرزی انتخابی در راستای زمان استفاده خواهد شد.

۳-۲- ارضاء شرایط پیوستگی بین لایه‌ای

هدف اصلی در این بخش تعیین رابطه مناسب بین مقادیر دما و شار گرمایی برای نقاط مرزی است. به این منظور ابتدا لازم است تا از سری جواب تقریبی در (15) برای محاسبه مقادیر شار گرمایی در $\tilde{x}_n = l_n$ و $\tilde{x}_n = 0$ استفاده شود.

$$\frac{\partial u_n}{\partial \tilde{x}_n}(0, t) = k_n \sum_{j=1}^{N_p^n} C_{n,j} \alpha_{n,j} e^{\beta_{n,j} t} \quad (32)$$

۳-۳- انتخاب ضرایب α_n و β_n

انتخاب اختیاری هر یک از ضرایب α_n و β_n نقش بسیار مهمی در تولید پایه‌های مناسب برای تشکیل سری جواب و به دنبال آن ماتریس سختی نیمه تحلیلی هر لایه دارد. در مرجع [۳] دو الگو برای انتخاب اختیاری این ضرایب، پیشنهاد شده است. انتخاب ضرایب در الگوی نخست بر مبنای میزان نوسان شرایط مرزی مسأله و در الگوی دوم با استفاده از یک رابطه تجربی انجام می‌گیرد. در این پژوهش از الگوی نخست پیشنهادی استفاده شده است. در این الگو هر یک از ضرایب اختیاری α_n یا β_n به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\alpha_{n,j} = q_{n,j}^\alpha i, \quad \beta_{n,j} = q_{n,j}^\beta i, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (48)$$

در روابط فوق مقادیر $q_{n,j}^\beta$ و $q_{n,j}^\alpha$ با توجه به میزان نوسان شرایط مرزی حاکم بر مسأله تعیین می‌شوند. به عبارت دیگر پایه‌هایی برای تشکیل سری جواب انتخاب می‌شوند که مشارکت بیشتری در ارضاء شرایط مرزی مسأله دارند. در بخش مثال‌های عددی، نحوه در نظر گرفتن $q_{n,j}^\beta$ و $q_{n,j}^\alpha$ در حل هر مثال مشخص شده است.

۴- الگوی حل گام به گام زمانی

همانگونه که در بخش‌های قبلی اشاره شد، می‌توان با استفاده از یک الگوی حل گام به گام زمانی سرعت و دقت روش در برآورد توزیع دما و شار گرمایی درون لایه‌های تشکیل‌دهنده ماده را افزایش داد. به این منظور لازم است در ابتدا دامنه زمانی مسأله به چند زیر بازه با طول \bar{T} افزایش شود. سپس جواب تقریبی معادله درون هر زیر بازه با استفاده از روش دوگانه معرفی شده و ارضاء شرایط اولیه و پیوستگی لایه‌ها بر روی نقاط انتخابی برآورد می‌شود. جواب معادله انتقال حرارت گذرا در زیر بازه t_ξ به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\hat{u}_n^\xi = \hat{u}_n^\xi(\bar{x}_n, t - t_\xi), \quad t \in [t_\xi, t_\xi + \bar{T}], \quad \xi = 0, 1, 2, \dots \quad (49)$$

شرایط مرزی لازم برای برآورد \hat{u}_n^ξ نیز با استفاده از یک انتقال مناسب در زمان از (۴) و (۵) به شرح زیر تعیین می‌شود:

$$u_1^\xi(0, t) = L_D(t - t_\xi) \quad \text{or} \quad \frac{\partial u_1^\xi}{\partial \bar{x}_1}(0, t) = L_N(t - t_\xi), \quad (50)$$

$$t \in [t_\xi, t_\xi + \bar{T}], \quad \xi = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_{N_l}^\xi(l_{N_l}, t) = R_D(t - t_\xi) \quad \text{or} \quad \frac{\partial u_{N_l}^\xi}{\partial \bar{x}_{N_l}}(l_{N_l}, t) = R_N(t - t_\xi), \quad (51)$$

$$t \in [t_\xi, t_\xi + \bar{T}], \quad \xi = 0, 1, 2, \dots$$

شرایط اولیه هر زیر بازه نیز از انتهای زیر بازه قبلی برای تمامی لایه‌ها قابل محاسبه است.

ماتریس مستطیلی S_n^2 ، رابطه (۴۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$S_n^1 U_n^D = U_n^N - S_n^2 F_n. \quad (44)$$

با دقت در رابطه فوق مشخص می‌شود که در واقع ماتریس مربعی S_n^1 با ابعاد $2N_p' \times 2N_p'$ یک ماتریس سختی نیمه تحلیلی برای لایه n است و همچنین عبارت $S_n^2 F_n$ نیز به نوعی بیانگر بردار نیمه تحلیلی مقادیر شار گرمایی انتهایی ناشی از شرایط اولیه حاکم بر مسأله است. با مشخص شدن رابطه بین مقادیر دما و شار گرمایی در نقاط انتخابی روی دو لبه هر لایه، می‌توان شرایط پیوستگی شار و دما در لبه‌های دو لایه مجاور را در روندی مشابه روش اجزاء محدود معمولی ارضاء کرد. به این منظور با استفاده از تعاریف (۲۳) و (۴۰)، رابطه (۴۴) در فرم ماتریسی به شکل زیر بیان مجدد می‌شود:

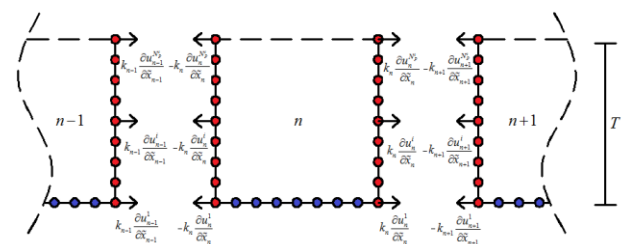
$$\begin{bmatrix} (S_n^1)_{11} & (S_n^1)_{12} \\ (S_n^1)_{21} & (S_n^1)_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_n^D \\ R_n^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_n^N \\ R_n^N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (S_n^2)_{11} & F_n \\ (S_n^2)_{21} & F_n \end{bmatrix}. \quad (45)$$

رابطه فوق می‌تواند برای تشکیل ماتریس سختی و بردار شار گرمایی انتهایی برای کل ماده متشکل از لایه‌های مختلف به کار گرفته شود. در این راستا لازم است تا با گسسته نمودن شرایط پیوستگی دما و شار گرمایی در نقاط انتخابی مرزی هر لایه و استفاده از رابطه تعادل مطابق روابط زیر، ماتریس سختی کل ماده برآورد شود. در شکل (۳) نحوه ارضاء شرایط پیوستگی دما و شار گرمایی بین لایه‌ها نمایش داده شده است.

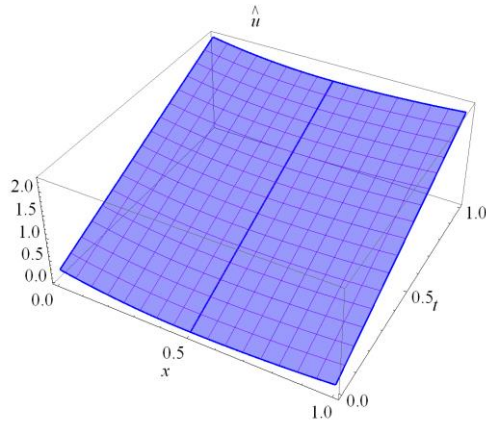
$$R_n^D - L_{n+1}^D = 0, \quad n = 1, \dots, N_l - 1 \quad (46)$$

$$R_n^N + L_{n+1}^N = 0, \quad n = 1, \dots, N_l - 1 \quad (47)$$

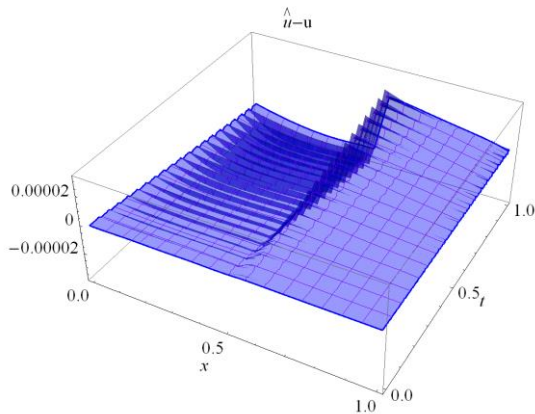
در پایان می‌توان با استفاده از فرمول‌بندی ارائه شده برای محاسبه ماتریس سختی نیمه تحلیلی کل ماده، مقادیر دما در مجموعه نقاط انتخابی بر روی مرزهای لایه‌ها در راستای زمان را تعیین نمود. بدیهی است برآورد توزیع دما درون هر لایه با مشخص شدن مقادیر دمای انتهایی به سادگی و مطابق رابطه (۱۵) امکان‌پذیر است.



شکل (۳): نحوه ارضاء شرایط پیوستگی دما و شار گرمایی بین لایه‌های مجاور در نقاط مرزی انتخابی در راستای زمان



شکل (۴): توزیع دما در روش دوگانه درون ماده دو لایه‌ای مثال ۱



شکل (۵): توزیع خطای روش دوگانه درون ماده دو لایه‌ای مثال ۱

در ادامه حل این مثال، روند تغییر نرم خطا به ازای مقادیر مختلف \bar{T} و Δt بررسی خواهد شد. به این منظور با استفاده از تعاریف زیر، مقادیر دو نرم خطا در هر حالت بر روی نقاط انتخابی درون هر لایه DP_n ، محاسبه می‌شود. در جدول (۱) مقادیر نرم خطا بر روی ۷۲۰ نقطه انتخابی درون هر لایه ارائه شده است.

$$\eta_n = \left(\frac{\sum_{k=1}^{DP_n} (\hat{u}_k - u_k)^2}{\sum_{k=1}^{DP_n} (u_k)^2} \right)^{1/2} \quad (55)$$

$$e_n^{ave} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{DP_n} (\hat{u}_k - u_k)^2}{DP_n} \right)^{1/2} \quad (56)$$

جدول (۱): مقادیر نرم خطا η و e^{ave} به ازای مقادیر مختلف \bar{T} و Δt در مثال ۱

$(\bar{T}, \Delta t)$	لایه اول		لایه دوم	
	η_1	e_1^{ave}	η_2	e_2^{ave}
(0.2, 0.05)	2.69×10^{-3}	3.34×10^{-3}	3.07×10^{-3}	3.68×10^{-3}
(0.1, 0.025)	1.81×10^{-4}	2.31×10^{-4}	3.64×10^{-4}	4.36×10^{-4}
(0.05, 0.01)	1.38×10^{-5}	1.71×10^{-5}	5.83×10^{-6}	6.94×10^{-6}

۵-۲- مثال ۲

در شکل (۶)، مدل استفاده شده در این مثال متشکل از سه

$$[\hat{u}_n^\xi]_{t=\xi} = [\hat{u}_n^\xi]_{t=\xi-1+\bar{T}}, \quad n=0, \dots, N_l \quad (52)$$

در الگوی گام به گام زمانی، محاسبات لازم برای تشکیل پایه‌ها و ماتریس‌های سختی نیمه تحلیلی فقط در زیر بازه زمانی اول انجام می‌شود. از این رو، محاسبه جواب در سایر زیر بازه‌ها با استفاده از ماتریس‌های بدست آمده در زیر بازه نخست تعیین می‌شود. به همین دلیل سرعت و دقت نتایج در حالت استفاده از روش گام به گام زمانی نسبت به حل مستقیم در زمان مناسب‌تر است.

۵- مثال های عددی

در این بخش قابلیت و کارایی روش در حل سه مثال نمونه از مسأله انتقال حرارت در مواد لایه‌ای محوری مورد بررسی قرار می‌گیرد. در تمامی مثال‌ها از روش گام به گام زمانی برای تعیین توزیع دما و شار گرمایی درون دامنه استفاده شده است.

۵-۱- مثال ۱

به عنوان اولین مثال، مسأله انتقال حرارت در یک ماده دولایه‌ای محوری با طول برابر $l_1 = l_2 = 1/2$ بررسی می‌شود. ضریب پخش گرمایی لایه اول و دوم به ترتیب برابر $\mu_1 = 1$ و $\mu_2 = 2$ در نظر گرفته شده است. ضرایب هدایت گرمایی هر دو لایه نیز یکسان و برابر یک است. شرایط اولیه و مرزی هر لایه از حل دقیق رابطه (۵۳) تعیین می‌شوند [۱۰].

$$u_n(x, t) = \frac{1}{\mu_n} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 2t, \quad n=1, 2 \quad (53)$$

برای حل این مثال به روش دوگانه معرفی شده تا زمان $T=1$ ، ۲۰ نقطه با توزیع یکنواخت درون هر لایه برای ارضاء شرایط اولیه و $\bar{T} = 0.05$ و $\Delta t = 0.01$ انتخاب شده‌اند. همچنین در مجموع ۸۴ تابع پایه نمایی با انتخاب $q_{n,j}^\alpha$ و $q_{n,j}^\beta$ در (۴۸) به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$(q_{n,j}^\alpha) q_{n,j}^\beta \in \{\pm 0.01, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 11, \pm 12\} \quad (54)$$

در شکل‌های (۴) و (۵) به ترتیب تغییرات توزیع دما و خطای حاصل از روش دوگانه در مقایسه با حل دقیق درون دامنه مکانی و زمانی نمایش داده شده است. با دقت در شکل (۵) مشخص می‌شود که خطای روش دوگانه معرفی شده در برآورد توزیع دما بسیار ناچیز است (کمتر از 2×10^{-5}). این مقدار خطا در مقایسه با خطای زیاد روش حل‌های اساسی در [۱۰] (2×10^{-2})، بیانگر دقت بالای روش دوگانه است.

۵-۳- مثال ۳

هدف از این مثال بررسی قابلیت روش در حل مسائل با انواع شرایط مرزی دریشله و نویمان است. به این منظور یک ماده پنج لایه‌ای محوری با طول‌های یکسان، $n=1, \dots, 5$ ، $l_n=1$ انتخاب شده است. ضرایب پخش حرارتی و هدایت حرارتی هر لایه به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \mu_3 = 3, \mu_4 = 2, \mu_5 = 1 \quad (59)$$

$$k_1 = 1, k_2 = 1/2, k_3 = 1/3, k_4 = 1/2, k_5 = 1 \quad (60)$$

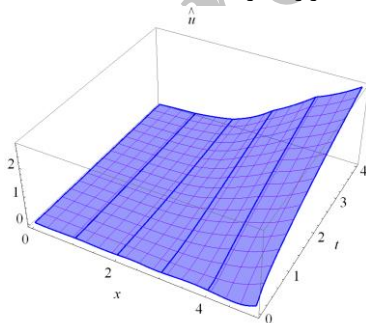
شرایط اولیه هر پنج لایه برابر صفر و شرایط مرزی در روابط (۴) و (۵) نیز به شکل زیر در نظر گرفته شده است.

$$u_1(0,t) = 0 \quad \frac{\partial u_5}{\partial x}(1,t) = 1 \quad (61)$$

برای حل این مثال تا زمان $T=4$ ، از ۲۵ نقطه اولیه برای هر لایه و $\bar{T}=0.08$ و $\Delta t=0.0$ استفاده شده است. پایه‌های سازنده سری جواب نیز با انتخاب $q_{n,j}^\alpha$ و $q_{n,j}^\beta$ به صورت زیر تولید می‌شوند.

$$(q_{n,j}^\alpha) q_{n,j}^\beta \in \{\pm 0.01, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 13, \pm 14\} \quad (62)$$

در شکل (۸) تغییرات دما درون پنج لایه ماده و نحوه ارضاء مناسب شرایط پیوستگی نمایش داده شده است. شایان ذکر است از آنجا که حل دقیقی برای این مثال وجود ندارد، میزان دقت ارضاء شرایط اولیه و شرایط مرزی در مسأله، یک شاخص مناسب برای تشخیص میزان دقت جواب درون دامنه است. مقدار نرم خطای ارضاء شرایط مرزی و اولیه در این مثال بر روی ۳۰۰ نقطه محاسبه شده برابر $\eta = 1.56 \times 10^{-3}$ است. جواب بدست آمده در این مثال می‌تواند به عنوان یک حل نمونه برای مطالعات بعدی مورد توجه قرار بگیرد.



شکل (۸): توزیع دما در ماده پنج لایه‌ای مثال ۳

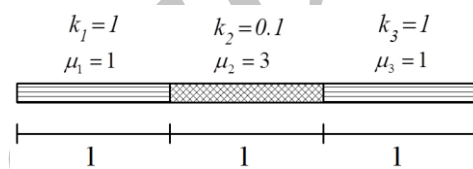
۶- پیوست

در این بخش مجموعه تعاریف متغیرها و نمادهای استفاده شده در مقاله، در جدول فهرست علائم، ارائه می‌شود.

لایه مختلف نمایش داده شده است. شرایط اولیه تمام لایه‌ها برابر صفر و شرایط مرزی دریشله در روابط (۴) و (۵) به صورت رابطه (۵۷) در نظر گرفته شده‌اند.

$$u_1(0,t) = \begin{cases} 8t & 0 \leq t \leq 0.5 \\ 4 & t > 0.5 \end{cases}, \quad u_3(3,t) = 0 \quad (57)$$

شایان ذکر است که مشابه این مثال در مراجع [۱۰] و [۱۴] نیز حل شده است، با این تفاوت که در این مراجع مرز سمت چپ به صورت ناگهانی تحت اثر حرارت قرار گرفته است. در این حالت در نقطه $x=0$ شرایط اولیه و شرایط مرزی با یکدیگر سازگار نیستند و بنابراین حل مسأله در نقاط نزدیک به این ناحیه تحت تأثیر قرار می‌گیرد. در این مقاله برای رفع این مشکل، شرط مرزی سمت چپ به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای سازگار با شرایط اولیه در نظر گرفته شده است.

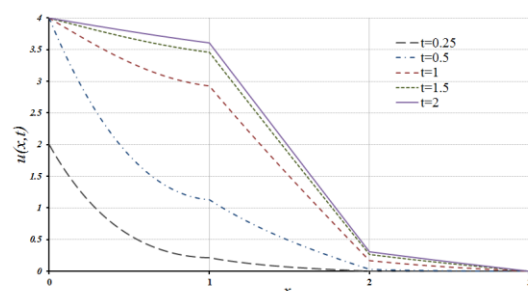


شکل (۶): ماده سه لایه‌ای استفاده شده در مثال ۲

برای حل این مثال به روش دوگانه معرفی شده، ۲۵ نقطه با توزیع یکنواخت درون هر لایه برای ارضاء شرایط اولیه و $\bar{T}=0.05$ و $\Delta t=0.0$ انتخاب شده‌اند. همچنین در مجموع ۹۰ تابع پایه‌ای با انتخاب $q_{n,j}^\alpha$ و $q_{n,j}^\beta$ در (۴۸) به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$(q_{n,j}^\alpha) q_{n,j}^\beta \in \{\pm 0.01, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 13, \pm 14\} \quad (58)$$

در این مثال تعیین توزیع دما با استفاده از الگوی گام به گام زمانی معرفی شده تا زمان $T=2$ ادامه یافته است. در شکل (۷) توزیع دما درون سه لایه ماده به ازای زمان‌های مختلف ارائه شده است.



شکل (۷): توزیع دما در ماده سه لایه‌ای استفاده شده در مثال ۲

همانگونه که دیده می‌شود، توزیع دما با گذشت زمان در سه لایه به یک حالت پایدار نزدیک می‌شود. همچنین بیشینه دما در لایه سوم به علت ضریب هدایت حرارتی پایین لایه دوم بسیار کمتر از بیشینه دما در لایه اول است.

۷- فهرست علائم

A_n	فرم کلی ضرایب ثابت در جواب تقریبی لایه n ام در رابطه (۸)	R_n^D	بردار تعریف شده در رابطه (۲۵)
c_p	ظرفیت گرمایی ماده	R_n^N	بردار تعریف شده در رابطه (۳۷)
C_n	ضرایب ثابت سری جواب در لایه n ام	S_n	ماتریس مستطیلی تعریف شده در رابطه (۴۱)
e_n^{ave}	نرم خطای میانگین لایه n ام تعریف شده در رابطه (۵۶)	S_n^1	ماتریس سختی نیمه تحلیلی لایه n ام تعریف شده در رابطه (۴۲)
$(e_{n,j}^D)_{left}$	بردار شامل مقادیر تابع پایه j ام در نقاط مرزی سمت چپ لایه n ام	S_n^2	زیر ماتریس مستطیلی S_n تعریف شده در رابطه (۴۲)
$(e_{n,j}^D)_{right}$	بردار شامل مقادیر تابع پایه j ام در نقاط مرزی سمت راست لایه n ام	t	متغیر زمانی
$(e_{n,j}^N)_{left}$	بردار شامل مقادیر مشتق مکانی تابع پایه j ام در نقاط مرزی سمت چپ لایه n ام	t_ξ	زمان ابتدایی زیر بازه زمانی ξ ام
$(e_{n,j}^N)_{right}$	بردار شامل مقادیر مشتق مکانی تابع پایه j ام در نقاط مرزی سمت راست لایه n ام	T	زمان پایانی حل مسأله
$f_n(\tilde{x}_n)$	تابع شرط اولیه در لایه n ام	\bar{T}	طول هر زیر بازه زمانی
$f_{n,j}$	بردار شامل مقادیر تابع پایه j ام در نقاط مربوط به شرایط اولیه لایه n ام	u_n	تابع توزیع دما در لایه n ام
F_n	بردار شامل مقادیر شرط اولیه بر روی مجموعه نقاط انتخابی در لایه n ام	\hat{u}_n^ξ	تابع توزیع دما لایه n ام و در زیر بازه زمانی ξ ام
H_n	ماتریس مربعی تعریف شده در رابطه (۳۱)	\bar{U}_n	بردار شامل مقادیر شرایط اولیه و شرایط مرزی دمایی بر روی مجموعه نقاط انتخابی لایه n ام
k_n	ضریب هدایت گرمایی لایه n ام	U_n^D	بردار شامل مقادیر شرایط مرزی درپشته مرز چپ و راست لایه n ام تعریف شده در رابطه (۲۳)
l_n	طول لایه n ام	U_n^N	بردار شامل مقادیر شرایط مرزی نویمان مرز چپ و راست لایه n ام تعریف شده در رابطه (۴۰)
$L_D(t)$	تابع شرط مرزی درپشته بر روی مرز سمت چپ	$\bar{V}_{n,j}^D$	بردار شامل مقادیر تابع پایه j ام بر روی مجموعه نقاط انتخابی در لایه n ام
$L_N(t)$	تابع شرط مرزی نویمان بر روی مرز سمت چپ	$V_{n,j}^D$	بردار شامل مقادیر تابع پایه j ام بر روی مجموعه نقاط مرزی چپ و راست در لایه n ام
L_n^D	بردار تعریف شده در رابطه (۲۴)	$V_{n,j}^N$	بردار شامل مقادیر مشتق مکانی تابع پایه j ام بر روی مجموعه نقاط مرزی چپ و راست در لایه n ام
L_n^N	بردار تعریف شده در رابطه (۳۶)	x_n	متغیر مکانی لایه n ام در دستگاه مختصات کلی
N^{e_n}	تعداد پایه های تشکیل دهنده سری جواب در لایه n ام	\tilde{x}_n	متغیر مکانی لایه n ام در دستگاه مختصات محلی
N_i	تعداد لایه های تشکیل دهنده ماده	Greek symbols	
N_p^l	تعداد نقاط انتخابی برای ارضاء شرط مرزی	$\alpha_{n,j}$	ضریب \tilde{x}_n در توان پایه نمایی j ام و لایه n ام
N_p^x	تعداد نقاط انتخابی برای ارضاء شرط اولیه	$\beta_{n,j}$	ضریب t در توان پایه نمایی j ام و لایه n ام
N^{α_n}	تعداد پایه متناظر با انتخاب اختیاری ضریب α_n در سری جواب لایه n ام	Δt	گام زمانی
N^{β_n}	تعداد پایه متناظر با انتخاب اختیاری ضریب β_n در سری جواب لایه n ام	η_n	نرم خطا در لایه n ام تعریف شده در رابطه (۵۵)
$q_{n,j}^\alpha$	مقدار بخش موهومی در انتخاب اختیاری ضریب α در پایه j ام و لایه n ام	μ_n	ضریب پخش حرارتی لایه n ام
$q_{n,j}^\beta$	مقدار بخش موهومی در انتخاب اختیاری ضریب β در پایه j ام و لایه n ام	Subscripts	
$R_D(t)$	تابع شرط مرزی درپشته بر روی مرز سمت راست	j	شمارنده توابع پایه در سری جواب
$R_N(t)$	تابع شرط مرزی درپشته بر روی مرز سمت راست	n	شمارنده لایه ها
		ξ	شمارنده بازه زمانی در الگوی حل گام به گام

- Huang, SC., Chang YP., "Heat conduction in unsteady, periodic and steady states in laminated composites", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 102, pp. 742- 748, 1980. [۹]
- Johansson, BT., Lesnic, D., "A method of fundamental solutions for transient heat conduction in layered materials", *Engineering Analysis with Boundary Element method*, Vol. 33, pp. 1362- 1367, 2009. [۱۰]
- Johansson, BT., Lesnic, D., "A method of fundamental solutions for transient heat conduction", *Engineering Analysis with Boundary Element method*, Vol. 18, pp. 1463- 1473, 2004. [۱۱]
- Mikhailov, M.D., Ozisik, M.N., Vulchanov, N.L., "Diffusion in composite layers with automatic solution of the eigenvalue problem", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 26, pp. 1131- 1141, 1983. [۱۲]
- Shamsaei, B., Boroomand, B., "Exponential Basis Functions in Solution of Laminated Structures", *Journal of Composite Structures*. Vol. 93, pp. 2010-2019, 2011. [۱۳]
- Sun Y, Wichman IS, "On transient heat conduction in a one-dimensional composite slab", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 47, pp. 1555- 1559, 2004. [۱۴]
- Zandi, SM., Boroomand, B., Soghrati, S., "Exponential basis functions in solution of incompressible fluid problems with moving free surfaces", *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, pp. 505- 527, 2012. [۱۵]
- Barbaro, S., Giaconia, C., Orioli, A., "A computer oriented method for the analysis of non steady-state behavior of buildings", *Building and Environment* , Vol. 23(1), pp. 19- 24, 1988. [۱]
- Boroomand, B., Mossaiby, F., "Dynamic solution of unbounded domains using finite element method: discrete Green's functions in frequency domain", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, pp. 1491- 1530, 2006. [۲]
- Boroomand, B., Soghrati, S., Movahedian, B., "Exponential basis functions in solution of static and time harmonic elastic problems in a meshless style", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 81, pp. 971- 1018, 2010. [۳]
- Chantasiriwan, S., "Methods of fundamental solutions for time-dependent heat conduction problems", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, pp. 147- 165, 2006. [۴]
- de Monte, F., "An analytical approach to the unsteady heat conduction processes in one-dimensional composite media", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 1333- 1343, 2002. [۵]
- de Monte, F., "Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A natural approach", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 3607-3619, 2000. [۶]
- Dong, CF., "An extended method of time-dependent fundamental solutions for inhomogeneous heat conduction", *Engineering Analysis with Boundary Element method*, Vol. 33, pp. 717- 725, 2009. [۷]
- Friedman, A., "Partial differential equations of parabolic type", Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc., 1964. [۸]

۸- مراجع

۹- زیرنویس ها

- \ Method of Fundamental Solution
 \ Point Collocation
 \ Pseudo Inverse