



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

دوره ۴۷، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۴، صفحه ۷۱ تا ۸۲  
Vol. 47, No. 2, Winter 2015, pp. 71-82



نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر (مهندسی مکانیک)

AmirKabir Journal of Science & Research  
(Mechanical Engineering)  
(ASJR-ME)

## تحلیل عددی و تجربی ارتعاشات آزاد تیر کمانه شده

پیمان جمشیدی مقدم<sup>۱</sup>، شاپور مرادی<sup>۲\*</sup>

۱- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، شرکت آب جنوب شرق خوزستان

۲- دانشیار، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

(دریافت: ۱۳۹۲/۱/۲۲ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۲/۱۰)

### چکیده

در این پژوهش ارتعاشات آزاد تیر کمانه شده به کمک روش کوادراتور دیفرانسیلی و تحلیل مودال تجربی بررسی شده است. ابتدا معادلات حاکم بر مسئله ارتعاشات تیر کمانه شده در مختصات مماسی بدست آمده اند. این معادلات یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی غیرخطی را تشکیل داده که پاسخ آن، مجموع پاسخ های استاتیکی و دینامیکی است. به منظور حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی استاتیکی ابتدا معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده، سپس دستگاه معادلات جبری غیرخطی با استفاده از روش طول قوس حل می شوند. همچنین با توجه به کوچکتر بودن دامنه حرکت ارتعاشات آزاد تیر نسبت به دامنه حرکت استاتیکی، معادلات ارتعاشی خطی شده اند. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ارتعاشی خطی شده، معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده و مقادیر بدست آمده از حل معادلات استاتیکی در دستگاه معادلات گسسته شده دینامیکی جایگذاری شده است. در پایان با حل مسئله مقدار ویژه استاندارد، فرکانس های طبیعی و شکل مودهای تیر کمانه شده بدست آمده، برای بررسی درستی روش ارائه شده، نتایج حاصل با نتایج بدست آمده از روش اجزاء محدود (به کمک نرم افزار ANSYS) و داده های تجربی حاصل از انجام تعدادی آزمایش بر روی تیر کمانه شده ساخته شده از پی وی سی مقایسه شدند. نتایج بدست آمده نشان دهنده دقت قابل قبول و کارایی روش پیشنهادی است.

### کلمات کلیدی:

ارتعاشات تیر، پس کمانش، روش کوادراتور دیفرانسیلی، تحلیل مودال تجربی

۱- مقدمه

بررسی ارتعاشات تیر کمانه شده با توجه به هندسه غیرخطی مسئله‌ای دشوار است. از این رو محققین، از روش‌های متفاوت بسیاری استفاده نموده‌اند. نایفه و همکاران [۱] مودهای ارتعاشی تیر کمانه شده را به صورت تحلیلی و آزمایشگاهی بررسی کردند. آنها با در نظر گرفتن شکل استاتیکی تیر کمانه شده متناظر با  $n$  امین مود کمانشی، حل دقیقی برای مودها و فرکانس‌های تیر کمانه شده بدست آوردند ولی با توجه به استفاده از شکل مود کمانشی، روش ارائه شده توسط آنها قادر به بررسی ارتعاشات تیر تحت بارهای خیلی بزرگتر از بار بحرانی نیست. پاتل و همکاران [۲] ارتعاشات خمشی آزاد غیرخطی و پس کمانش تیر ارتوتروپیک چند لایه را بر روی فونداسیون الاستیک بررسی نمودند. آنها برای استخراج روابط حاکم اثر تغییر شکل برشی عرضی، اینرسی درون صفحه‌ای و دورانی را در نظر گرفتند. سپس، برای معین کردن مقدار همه جملات انرژی کرنشی، انتگرال عددی دقیق را بکار بردند. در ادامه روابط حاکم غیرخطی را با استفاده از ترکیب روش مقدار ویژه و روش تکرار مستقیم حل کردند. لستاری و هانگود [۳] حل دقیقی برای تحلیل دینامیکی تیر کمانه شده با شرایط مرزی متفاوت ارائه دادند. آنها با استفاده از مودهای متناظر مسئله خطی ارضا کننده شرایط مرزی و همچنین با استفاده از توابع بیضوی ژاکوبی، فرکانس‌های طبیعی را برای مسئله غیرخطی بدست آوردند. سانتیلان و همکاران [۴] مسئله پس کمانش و ارتعاشات تیر سنگین<sup>۲</sup> با دامنه نوسان کم حول وضعیت تعادل پس کمانش را به صورت تئوری و آزمایشگاهی بررسی نمودند. آنها تیر را به صورت الاستیک غیر قابل کشش و به صورت دو سر گیردار بر روی فونداسیون صلب افقی و یا شیبدار در نظر گرفته و روش شو تینگ را برای حل روابط خود بکار بردند. نوکریچ و همکاران [۵] ارتعاشات با دامنه کوچک حول وضعیت پس کمانش میله دو سر گیردار را بررسی نمودند. آنها مدل قابل کشش و غیر قابل کشش را به دو صورت تحلیلی و عددی حل نمودند.

هدف از این پژوهش بررسی رفتار ارتعاشی تیر کمانه شده است. برای این منظور روابط حاکم بر مسئله ارتعاشات تیر کمانه شده در مختصات مماسی بدست آمده که یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی غیرخطی را تشکیل می‌دهند. با توجه به اینکه دامنه حرکت ارتعاشات آزاد تیر بسیار کوچکتر از دامنه حرکت استاتیکی (حالت تعادل) است، پاسخ کلی سیستم به صورت مجموع پاسخ‌های حرکت استاتیکی و ارتعاشی در نظر گرفته شده و معادلات دیفرانسیل ارتعاشی خطی می‌گردند. پاسخ حرکت تعادلی و ارتعاشی به ترتیب با حل روابط استاتیکی و دینامیکی بدست می‌آیند. به منظور حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی استاتیکی ابتدا روابط با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده و سپس دستگاه معادلات جبری غیرخطی منتهی به استفاده از روش طول قوس حل می‌شوند. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ارتعاشی خطی شده همانند حالت

استاتیکی ابتدا روابط با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده، سپس مقادیر بدست آمده از حل روابط استاتیکی در دستگاه معادلات گسسته شده جایگذاری می‌گردند. دستگاه معادلات بدست آمده یک مسئله مقدار ویژه غیر استاندارد می‌باشد که پس از تبدیل آن به مسئله مقدار ویژه استاندارد و حل آن، فرکانس‌های تیر کمانه شده و شکل مودهای متناظر با آن بدست می‌آیند. در ادامه برای صحت سنجی روش ارائه شده، نتایج بدست آمده با نتایج تجربی و مدل اجزا محدود مقایسه می‌گردند.

۲- تئوری

برای بررسی ارتعاشات آزاد تیر کمانه شده و بدست آوردن معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر آن، تیری به طول  $l$  و ضخامت  $h$  که تحت نیروی محوری فشاری  $p$  است در نظر گرفته می‌شود.

۲-۱- روابط حاکم

روابط (۱) معادلات حاکم بر مسئله پس کمانش تیر را نشان می‌دهد [۶ و ۷].

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \left(1 + \frac{n}{EA}\right) \sin \theta - \sin \theta_0$$

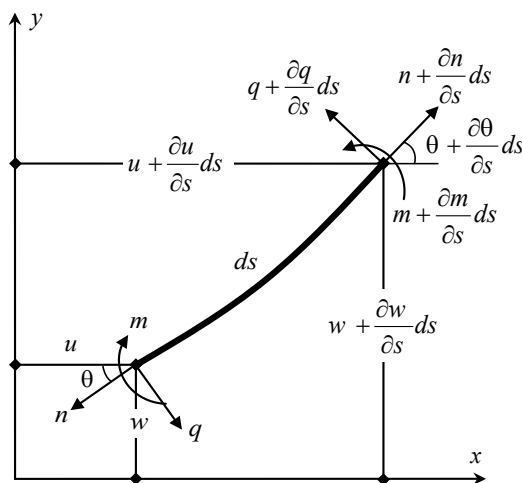
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(1 + \frac{n}{EA}\right) \cos \theta - \cos \theta_0$$

$$EI \left[ \frac{\partial \theta}{\partial s} - \frac{\partial \theta_0}{\partial s} \right] - m = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial m}{\partial s} + q = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (n \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial s} (q \cos \theta) = \rho \dot{w}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (n \cos \theta) - \frac{\partial}{\partial s} (q \sin \theta) = \rho \ddot{u}$$



شکل ۱: دیاگرام آزاد نیرویی یک المان جزئی از تیر

در رابطه فوق  $s$  متغیری در امتداد محور تیر،  $u$  و  $w$  به ترتیب جابجایی‌های تیر در راستاهای  $x$  و  $y$  هستند (شکل ۱).  $\theta$  زاویه بین خط مماس بر

<sup>1</sup> Mode

<sup>2</sup> Heavy beam

غیرخطی، روابط حاکم بر مسئله ارتعاشات آزاد تیر کمانه شده بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_e}{\partial S} &= \left(1 + \frac{N_e}{K}\right) \sin \theta_e - \sin \theta_0 \\ \frac{\partial U_e}{\partial S} &= \left(1 + \frac{N_e}{K}\right) \cos \theta_e - \cos \theta_0 \\ \frac{\partial \theta_e}{\partial S} + \frac{\partial \theta_0}{\partial S} - M_e &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_e}{\partial S} + Q_e &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial S} (N_e \sin \theta_e) + \frac{\partial}{\partial S} (Q_e \cos \theta_e) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial S} (N_e \cos \theta_e) - \frac{\partial}{\partial S} (Q_e \sin \theta_e) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W_d}{\partial S} = \left(1 + \frac{N_d}{K}\right) \theta_d \cos \theta_e + \frac{N_d}{K} \sin \theta_e$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial S} = -\left(1 + \frac{N_d}{K}\right) \theta_d \sin \theta_e + \frac{N_d}{K} \cos \theta_e$$

$$\frac{\partial \theta_d}{\partial S} - M_d = 0$$

$$\frac{\partial M_d}{\partial S} + Q_d = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} [N_d \sin \theta_e + N_e \theta_d \cos \theta_e] \\ + \frac{\partial}{\partial S} [Q_d \cos \theta_e - Q_e \theta_d \sin \theta_e] &= -\Omega^2 W_d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} [N_d \cos \theta_e - N_e \theta_d \sin \theta_e] \\ - \frac{\partial}{\partial S} [Q_d \sin \theta_e + Q_e \theta_d \cos \theta_e] &= -\Omega^2 U_d \end{aligned}$$

### ۲-۲- شرایط مرزی

در پژوهش حاضر ارتعاشات آزاد تیرهای دوسرگیردار و دو سر مفصل بررسی می‌گردد. شرایط مرزی حاکم بر این تیرها عبارتند از:

### تیر دو سر گیردار

شرایط مرزی استاتیکی تیر دو سرگیردار تحت نیروی محوری  $P$  به صورت روابط (۷) است.

$$\begin{aligned} W_e|_{S=0} = 0, \quad U_e|_{S=0} = 0, \quad \theta_e|_{S=0} = 0, \\ W_e|_{S=1} = 0, \quad \theta_e|_{S=1} = 0, \quad N_e|_{S=1} = P. \end{aligned} \quad (7)$$

روابط (۷) بیان کننده آن است که ابتدا و انتهای تیر اجازه حرکت در راستای محور  $y$  را نداشته و شیب آنها نیز برابر با صفر است. همچنین ابتدای تیر ( $S=0$ ) اجازه حرکت در راستای محور  $x$  را ندارد. انتهای تیر

منحنی تغییر شکل تیر و محور  $x$  و  $\theta_0$  چرخش اولیه تیر است.  $n$  و  $q$  به ترتیب نیروهای محوری و برشی و  $m$  ممان خمشی است.  $A$  سطح مقطع تیر،  $I$  ممان اینرسی سطح و  $\rho$  جرم بر واحد طول است. دو رابطه اول بیان کننده تغییرات جابجایی المانی از تیر به طول  $ds$  و روابط چهارم، پنجم و ششم معادلات دیفرانسیل حرکت می‌باشند. رابطه سوم با فرض الاستیک بودن تیر بدست آمده است. در این روابط از اثر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی صرف نظر شده است، در صورتی که متغیرها با روابط (۲) بی‌بعد شوند روابط (۱) به روابط (۳) تبدیل می‌شوند.

$$\begin{aligned} S = \frac{s}{l}, \quad L = \frac{l}{l} = 1, \quad U = \frac{u}{l}, \quad W = \frac{w}{l}, \\ k = \frac{Al^2}{I}, \quad N = \frac{nl^2}{EI}, \quad Q = \frac{ql^2}{EI}, \quad M = \frac{ml}{EI}, \\ P = \frac{pl^2}{EI}, \quad T = \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad \Omega = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho}{EI}}. \end{aligned} \quad (2)$$

که  $\omega$  فرکانس طبیعی سیستم و  $t$  زمان است.

$$\frac{\partial W}{\partial S} = \left(1 + \frac{N}{K}\right) \sin \theta - \sin \theta_0$$

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \left(1 + \frac{N}{K}\right) \cos \theta - \cos \theta_0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial S} + \frac{\partial \theta_0}{\partial S} - M = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial S} + Q = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial S} (N \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial S} (Q \cos \theta) = \ddot{W}$$

$$\frac{\partial}{\partial S} (N \cos \theta) - \frac{\partial}{\partial S} (Q \sin \theta) = \ddot{U}$$

با توجه به آنکه دامنه حرکت ارتعاشی تیر کمانه شده بسیار کوچکتر از دامنه حرکت استاتیکی است، بنابراین می‌توان متغیرها را به صورت روابط (۴) تعریف نمود [۳]:

$$\begin{aligned} U(S, T) &= U_e(S) + U_d(S) \sin \Omega T \\ W(S, T) &= W_e(S) + W_d(S) \sin \Omega T \\ \theta(S, T) &= \theta_e(S) + \theta_d(S) \sin \Omega T \\ N(S, T) &= N_e(S) + N_d(S) \sin \Omega T \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} Q(S, T) &= Q_e(S) + Q_d(S) \sin \Omega T \\ M(S, T) &= M_e(S) + M_d(S) \sin \Omega T \end{aligned}$$

که اندیس  $e$  نشان دهنده حالت تعادل و اندیس  $d$  نشان دهنده حالت دینامیکی می‌باشد. با توجه به روابط (۴) برای حل مسئله ارتعاشی تیر کمانه شده نیاز است که یک بار روابط (۳) به صورت استاتیکی حل شده تا مقادیر مربوط به حالت تعادل بدست آیند. با حذف جمله‌های زمانی از روابط (۳) روابط تعادل به صورت رابطه (۵) به دست می‌آیند.

با بدست آمدن معادلات حالت استاتیکی، جایگذاری روابط (۴) در (۳)، بسط روابط بدست آمده، استفاده از فرضیات ساده کننده و با حذف جملات

$$C_{ij} = \frac{1}{(x_i - x_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^{n_p} (x_j - x_k)} \quad (12)$$

$$C_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} C_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n_p$$

$$x_i = 1 - \cos\left(\frac{i-1}{n_p-1}\pi\right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_p \quad (13)$$

با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی می توان روابط (۵) را به صورت روابط (۱۴) بیان نمود:

$$\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} W_{ej} = \left(1 + \frac{N_{ei}}{K}\right) \sin \theta_{ei} - \sin \theta_{0i}$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} U_{ej} = \left(1 + \frac{N_{ei}}{K}\right) \cos \theta_{ei} - \cos \theta_{0i}$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} \theta_{ej} + \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial S}\right)_i - M_{ei} = 0 \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} M_{ej} + Q_{ei} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_p - 1$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} N_{ej} \sin \theta_{ej} + \sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} Q_{ej} \cos \theta_{ej} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} N_{ej} \cos \theta_{ej} - \sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} Q_{ej} \sin \theta_{ej} = 0$$

با فرض آن که تیر با  $n_p$  نقطه دقت گسسته گردد، تعداد تمامی مجهولات برابر با  $6n_p$  می باشد. با توجه به ۶ شرط مرزی، تعداد روابط حاکمی که باید نوشته شوند تا تناقض ریاضی بوجود نیامده و تعداد مجهولات مسئله با تعداد روابط برابر شوند  $6n_p - 6$  می باشد. بنابراین، باید برای یکی از نقاط مرزی تیر نیز رابطه حاکم نوشته شود. پس از گسسته سازی روابط با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی، این روابط با استفاده از روش طول قوس حل می گردند.

### ۳-۱- روش طول قوس

به منظور حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی بدست آمده از روش کوادراتور دیفرانسیلی از روش طول قوس استفاده می شود. در روش طول قوس به منظور کنترل بار و محاسبه مقادیر افزایشی آن ضریبی برای بار در نظر گرفته شده و با اضافه کردن این ضریب به مجهولات مسئله، مقادیر افزایش بار بصورت یکی از مجهولات در حین حل محاسبه می گردد. می توان دستگاه معادلات غیرخطی را با رابطه (۱۵) بیان کرد [۱۰].

$$F(x) = \lambda P \quad (15)$$

که  $F(x)$  بردار معادلات غیرخطی بر حسب بردار جابجایی  $x$  و  $P$  بردار بار ثابت است.  $\lambda$  ضریب بار است که بار اعمال شده توسط آن کنترل

( $S=I$ ) اجازه حرکت در راستای محور  $x$  را دارا بوده و نیروی محوری وارد بر آن برابر با  $P$  می باشد. شرایط مرزی دینامیکی نیز عبارتند از:

$$W_d|_{S=0} = 0, \quad U_d|_{S=0} = 0, \quad \theta_d|_{S=0} = 0, \quad (8)$$

$$W_d|_{S=1} = 0, \quad U_d|_{S=1} = 0, \quad \theta_d|_{S=1} = 0.$$

رابطه (۸) مشابه رابطه (۷) می باشد، با این تفاوت که در این رابطه انتهای تیر نیز اجازه حرکت در راستای محور  $x$  را ندارد.

### تیر دو سر مفصل

شرایط مرزی استاتیکی تیر دو سر مفصل تحت نیروی محوری  $P$  به صورت روابط (۹) می باشد. این روابط بیان کننده آن است که تیر در دو انتها اجازه حرکت در راستای محور  $y$  را نداشته و قادر به تحمل گشتاور نیست. همچنین ابتدای تیر ( $S=0$ ) اجازه حرکت در راستای محور  $x$  را ندارد. انتهای تیر ( $S=I$ ) اجازه حرکت در راستای محور  $x$  را داراست و نیروی محوری وارد بر آن برابر با  $P$  است:

$$U_e|_{S=0} = 0, \quad W_e|_{S=0} = 0, \quad M_e|_{S=0} = 0, \quad (9)$$

$$W_e|_{S=1} = 0, \quad M_e|_{S=1} = 0,$$

$$N_e|_{S=1} \cos(\theta_e|_{S=1}) - Q_e|_{S=1} \sin(\theta_e|_{S=1}) = P.$$

شرایط مرزی دینامیکی به صورت روابط (۱۰) بدست می آید:

$$U_d|_{S=0} = 0, \quad W_d|_{S=0} = 0, \quad M_d|_{S=0} = 0, \quad (10)$$

$$U_d|_{S=1} = 0, \quad W_d|_{S=1} = 0, \quad M_d|_{S=1} = 0.$$

که این روابط بیان کننده عدم حرکت ابتدا و انتهای تیر در راستاهای  $x$  و  $y$  می باشد. همچنین ابتدا و انتهای تیر نیز قادر به تحمل گشتاور خمشی نیستند.

### ۳-۲ حل روابط استاتیکی

برای گسسته سازی معادلات دیفرانسیل از روش کوادراتور دیفرانسیلی استفاده می گردد. در روش کوادراتور دیفرانسیلی مشتق مرتبه اول تابع  $\psi(x)$  در یک نقطه درون دامنه آن به صورت ترکیبی خطی از مجموع مقادیر وزنی تابع در تمام دامنه نوشته می شود [۸].

$$\frac{d\psi}{dx}\bigg|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} \psi(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, n_p \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)  $n_p$  تعداد نقاط دقت،  $x_i$  نقطه دقت نام از دامنه تابع و  $C_{ij}$  ضرایب وزنی برای بدست آوردن مشتق مرتبه اول تابع در نقطه دقت نام هستند. برای محاسبه ضرایب وزنی روش کوادراتور دیفرانسیلی از رابطه جبری (۱۲) استفاده شده که مستقل از مختصات نقاط دقت است [۹]. همچنین از ریشه های چندجمله ای گوس-لوباتو-چیشیف برای نقاط دقت استفاده شده است (رابطه ۱۳):

در این روابط  $\Delta l$  طول قوس در مرحله بار مربوطه می‌باشد. در هر مرحله بار، بردار  $\Delta u$  و  $\Delta \lambda$  طی یک فرآیند تکراری و بر اساس روابط ارائه شده تا رسیدن به همگرایی مطلوب محاسبه می‌شوند. از حل مسئله طی مرحله بارهای متوالی می‌توان به پاسخ سیستم دست یافت.

#### ۴- حل روابط دینامیکی

برای بدست آوردن پاسخ ارتعاشی تیر نیز همانند حل استاتیکی مسئله، از روش کوادراتور دیفرانسیلی استفاده می‌گردد. با استفاده از روش کوادراتور دیفرانسیلی روابط (۶) گسسته شده و به روابط (۲۴) تبدیل خواهند شد.

$$\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} W_{dj} = \left(1 + \frac{N_{ei}}{K}\right) \theta_{di} \cos \theta_{ei} + \frac{N_{di}}{K} \sin \theta_{ei}$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} U_{dj} = -\left(1 + \frac{N_{ei}}{K}\right) \theta_{di} \sin \theta_{ei} + \frac{N_{di}}{K} \cos \theta_{ei}$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} \theta_{dj} - M_{di} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} M_{dj} + Q_{di} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} (N_{dj} \sin \theta_{ej} + N_{ej} \theta_{dj} \cos \theta_{ej})$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} (Q_{dj} \cos \theta_{ej} - Q_{ej} \theta_{dj} \sin \theta_{ej}) = -\Omega^2 W_{di}$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} (N_{dj} \cos \theta_{ej} - N_{ej} \theta_{dj} \sin \theta_{ej})$$

$$- \sum_{j=1}^{n_p} C_{ij} (Q_{dj} \sin \theta_{ej} + Q_{ej} \theta_{dj} \cos \theta_{ej}) = -\Omega^2 U_{di}$$

(۲۴)

مشابه حل استاتیکی برای آنکه در حل روابط دینامیکی تناقض ریاضی بوجود نیامده و تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر باشد، برای روابط اول، پنجم و ششم روابط (۲۴)  $2 \leq i \leq np-1$  و برای باقی روابط  $I \leq i \leq np$  می‌باشد. پس از گسسته‌سازی روابط دینامیکی حاکم، مقادیر بدست آمده از حالت تعادل در معادلات گسسته شده دینامیکی جایگذاری و به همراه شرایط مرزی یک دستگاه معادلات با مقادیر ویژه به صورت رابطه (۲۵) را تشکیل می‌دهند که یک مسئله مقدار ویژه غیراستاندارد می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = -\Omega^2 \begin{bmatrix} O & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

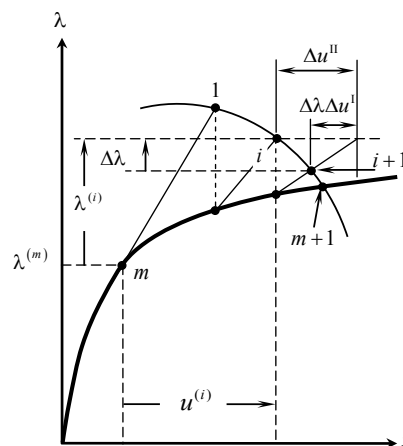
در این رابطه  $O$  ماتریس صفر و  $I$  ماتریس واحد می‌باشند. بردار  $X_1$  شامل مقادیر جابجایی‌های نقاط دقت مرزی هر تیر در راستاهای  $x$  و  $y$  و همچنین مقادیر زوایای چرخش، نیروهای محوری و برشی و ممان خمشی نقاط دقت می‌باشد. بردار جابجایی  $X_2$  شامل مقادیر جابجایی‌های

می‌گردد. اعمال حل تکراری روش نیوتن به رابطه (۱۵) روابط زیر را بدست می‌دهد.

$$K^{(i)} \Delta u = \lambda P - F(x^{(i)}) \quad (16)$$

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + \Delta u \quad (17)$$

$K$  در رابطه فوق ماتریسی است که از مشتق اول بردار  $F$  نسبت به  $x$  حاصل شده و اندیس  $i$  در رابطه (۱۷) نشانگر تکرار  $i$ ام در طول یک مرحله بار می‌باشد. فرم افزایشی بردارهای  $x$  و ضرایب  $\lambda$  در این تکرار، مطابق با شکل ۲ و روابط (۱۸) خواهند بود.



شکل ۲: تغییرات بردار جابجایی و ضریب بار در طول یک مرحله بار

$$x^{(i)} = x^m + u^{(i)} \quad (18)$$

$$x^{(i+1)} = x^m + u^{(i)} + \Delta u \quad (18)$$

$$\lambda^{(i+1)} = \lambda^m + \lambda^{(i)} + \Delta \lambda$$

اندیس  $m$  بیانگر نقطه‌ای روی منحنی بار - جابجایی می‌باشد که از حل مرحله بار قبلی بدست آمده و به عبارت دیگر، مرحله بار قبلی به این نقطه همگرا شده است. بر اساس روش نیوتن با در نظر گرفتن رابطه افزایشی (۱۸)، رابطه (۱۶) به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$K^{(i)} \Delta u = \Delta \lambda P + ((\lambda^{(m)} + \lambda^{(i)})P - F(x^{(i)})) \quad (19)$$

در این صورت جابجایی  $\Delta u$  را می‌توان متشکل از دو جزء زیر دانست:

$$\Delta u = \Delta \lambda \Delta u^I + \Delta u^{II} \quad (20)$$

که در آن  $\Delta u^I$  و  $\Delta u^{II}$  از رابطه‌های زیر بدست می‌آیند.

$$K^{(i)} \Delta u^I = P \quad (21)$$

$$K^{(i)} \Delta u^{II} = ((\lambda^{(m)} + \lambda^{(i)})P - F(x^{(i)})) \quad (22)$$

برای آن که بتوان با استفاده از رابطه (۲۰)، جابجایی  $\Delta u$  را حساب کرد به رابطه دیگری برای تعیین مجهول  $\Delta \lambda$  نیاز می‌باشد. در این پژوهش مقدار افزایشی  $\Delta \lambda$  از روش پیشنهادی ال‌رابزی [۱۱] محاسبه می‌شود.

$$\Delta \lambda = \frac{-(a^i/2) - (u^{(i)})^T \cdot \Delta u^{II}}{\lambda^{(i)} P^T \cdot P + (u^{(i)})^T \cdot \Delta u^I} \quad (23)$$

$$a^i = (u^{(i)})^T \cdot (u^{(i)}) + (\lambda^{(i)})^2 P^T \cdot P - \Delta l$$

## ۶- نتایج

در این پژوهش فرض شده است که تیر دارای مقداری نقص هندسی می باشد. مقدار نقص هندسی بصورت ضریبی از شکل مود کمانشی تیر در نظر گرفته شده است. برای اعمال نقص هندسی در مسئله تیر دو سر گیردار و دو سر مفصل به ترتیب از روابط (۲۷) و (۲۸) استفاده شده است [۱۲].

که  $W_0$  دامنه نقص هندسی می باشد. دامنه نقص هندسی برای تمامی تیرها  $0/001$  در نظر گرفته شده است.

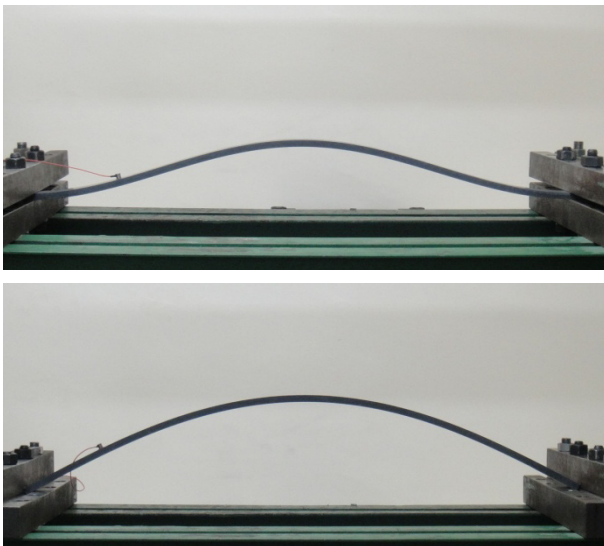
$$\bar{W} = \frac{1}{2} W_0 (1 - \cos(2\pi s/l)) \quad (27)$$

$$\bar{W} = W_0 \sin(\pi s/l) \quad (28)$$

## ۶-۱- تاثیر تعداد نقاط دقت بر همگرایی فرکانس های طبیعی

تعداد نقاط دقت بکار برده شده برای گسسته سازی معادلات، بر همگرایی فرکانس های طبیعی تیر کمانه شده تاثیر می گذارد. شکل ۴ تاثیر تعداد نقاط دقت را بر همگرایی چهار فرکانس طبیعی اول تیر کمانه شده دو سر گیردار نشان می دهد. تیر تحت بار  $1/2$  برابر بار بحرانی می باشد. همانطور که در این شکل مشاهده می شود فرکانس های طبیعی با ۱۷ نقطه دقت همگرا می شوند.

این اثر برای تیر دو سر مفصل نیز بررسی شده و با توجه به مشابه بودن نتایج، در این پژوهش از ۱۷ نقطه دقت استفاده می گردد. در بررسی این اثر از مشخصات تیر شماره ۳ استفاده شده است.



شکل ۳: تیر کمانه شده در آزمایشگاه.  
بالا) تیر دو سر گیردار، پایین) تیر دو سر مفصل

## ۶-۲- صحت سنجی عددی

جدول های ۲ و ۳ مقایسه فرکانس های طبیعی عددی پژوهش حاضر با نتایج روش اجزاء محدود را بترتیب برای تیر دو سر گیردار و دو سر مفصل نشان می دهند. این مقایسه برای مقادیر متفاوت ضریب بار بحرانی انجام شده است. برای بررسی عددی از مشخصات مکانیکی تیر شماره ۳ استفاده شده است.

نقاط دقت داخلی هر تیر در راستاهای  $x$  و  $y$  می باشد. ماتریس های  $A_{11}$  و  $A_{12}$  شامل ضرایب معادلات اول تا چهارم روابط (۲۴) و معادلات شرایط مرزی و ماتریس های  $A_{21}$  و  $A_{22}$  شامل ضرایب معادلات پنجم و ششم روابط (۲۴) می شوند. در ادامه مسئله مقدار ویژه استاندارد را می توان به صورت رابطه (۲۶) آورد.

$$[A_{22} - A_{21} \times A_{11}^{-1} \times A_{12}] X_2 = -\Omega^2 X_2 \quad (26)$$

که از حل آن فرکانس های بی بعد تیر کمانه شده و شکل مودهای متناظر آنها بدست خواهند آمد.

## ۵- مدل سازی تجربی

در این بخش برای بررسی درستی روش ارائه شده به مدل سازی تجربی پرداخته می شود. برای اندازه گیری فرکانس های طبیعی تیر کمانه شده از آزمون مودال تجربی استفاده می شود. برای انجام آزمایش از تیرهایی با جنس پلی وینیل کلراید استفاده گردید. ابعاد و مشخصات مکانیکی تیرها در جدول ۱ آورده شده اند.

جدول ۱: ابعاد و مشخصات مکانیکی تیرها

| شماره تیر | طول (mm) | عرض (mm) | ضخامت (mm) | چگالی (Kg/m <sup>3</sup> ) | مدول یانگ (GPa) |
|-----------|----------|----------|------------|----------------------------|-----------------|
| ۱         | ۷۷۵      | ۲۰       | ۱۰         | ۱۴۰۰                       | ۳/۷             |
| ۲         | ۸۹۵      | ۲۵       | ۱۰         | ۱۴۰۰                       | ۳/۷             |
| ۳         | ۱۰۰۰     | ۲۵       | ۱۰         | ۱۴۰۰                       | ۳/۷             |

برای محاسبه چگالی از نسبت جرم به حجم تکه های از تیر استفاده شده و مدول یانگ به کمک فرکانس های طبیعی تجربی تیر دو سر آزاد بدست آمده است. برای اندازه گیری فرکانس های طبیعی تجربی تیر کمانه شده از تکیه گاه دو سر گیردار و دو سر مفصل استفاده شده است. برای این منظور همانطور که در شکل ۳ مشاهده می شود تیر مورد نظر بین دو گیره قرار داده شد.

برای اندازه گیری فرکانس های طبیعی سازه (تیر کمانه شده) از تحلیل مودال تجربی بهره گرفته می شود. دستگاه مورد استفاده در آزمایشگاه شامل چکش، شتاب سنج و تحلیل گر سیگنال است. از چکش به منظور تحریک سازه استفاده می گردد. چکش مورد استفاده گلوبال تست<sup>۳</sup> نوع AU02 می باشد. سیگنال های بوجود آمده از تحریک توسط حسگر شتاب سنج اندازه گیری می شوند. در این آزمایش از شتاب سنج B&K4516 استفاده شده است. برای اتصال مناسب شتاب سنج به تیر از واکس استفاده شد. سیگنال های اندازه گیری شده برای تبدیل از حوزه زمان به حوزه فرکانس وارد تحلیل گر سیگنال می شوند. با اعمال تبدیل فوریه سریع بر این سیگنال ها فرکانس های سیستم به کمک نرم افزار پالس اندازه گیری می گردند. نرم افزار پالس وظیفه کنترل انجام آزمایش و نمایش سیگنال ها را به عهده دارد. فرکانس های طبیعی سیستم در جایی مشخص می شوند که دامنه نوسان بیشینه باشد.

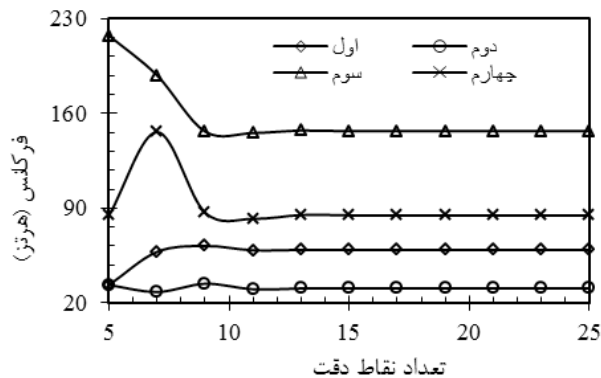
<sup>3</sup> Global Test

۶-۳- مقایسه فرکانس‌های طبیعی عددی و تجربی

جدول‌های ۴ و ۵ مقایسه فرکانس‌های طبیعی عددی پژوهش حاضر با داده‌های تجربی را بترتیب برای تیر دو سر گیردار و دو سر مفصل نشان می‌دهد. این مقایسه برای مقادیر متفاوت کوتاه‌شدگی انتهایی انجام شده است. با توجه به تغییرات فرکانس‌های طبیعی تیر با افزایش بار (شکل‌های ۵ و ۹) مشاهده می‌گردد که مقدار فرکانس اصلی از فرکانس برخی موده‌های بالاتر بیشتر می‌گردد. از این رو با توجه به اندازه‌گیری سه فرکانس کوچکتر در آزمایشگاه، جدول ۴ فرکانس‌های اول، دوم و چهارم و جدول ۵ فرکانس‌های دوم، سوم و چهارم را نشان می‌دهند. همانطور که دیده می‌شود حداکثر خطای محاسبه شده توسط روش کوادراتور دیفرانسیلی نسبت به مقادیر تجربی برای تیرهای دو سر گیردار و دو سر مفصل به ترتیب کمتر از ۲/۴ و ۱/۴ درصد می‌باشد که نشان از دقت بالای روش ارائه شده دارد.

۶-۴- تیر دو سر گیردار

شکل ۵ تغییرات چهار فرکانس طبیعی اول تیر دو سر گیردار را با افزایش بار نشان می‌دهد. حالت‌های تعادل و ارتعاش آزاد مربوط به چهار شکل مود اول قبل از کمانش و پس کمانش تیر به ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده‌اند.



شکل ۴: اثر نقاط دقت در همگرایی چهار فرکانس طبیعی اول

برای مدل سازی به روش اجزاء محدود، تیر در نرم‌افزار ANSYS و با ۵۰۰ المان از نوع BEAM189 مدل شده است. همانگونه که از این جدول دیده می‌شود نتایج بدست آمده توسط روش کوادراتور دیفرانسیلی به نتایج بدست آمده توسط نرم افزار ANSYS بسیار نزدیک بوده، بگونه‌ای که حداکثر خطای بین این دو روش ۰/۴ درصد است. این در حالی است که نتایج بدست آمده از روش کوادراتور دیفرانسیلی تنها با ۱۷ نقطه دقت بدست آمده است.

جدول ۲: مقایسه فرکانس‌های طبیعی عددی روش ارائه شده با نتایج نرم افزار ANSYS برای تیر دو سر گیردار

| ضریب بار بحرانی | فرکانس اول (هرتز) |            | فرکانس دوم (هرتز) |            | فرکانس سوم (هرتز) |            | فرکانس چهارم (هرتز) |            |
|-----------------|-------------------|------------|-------------------|------------|-------------------|------------|---------------------|------------|
|                 | ANSYS             | پژوهش حاضر | ANSYS             | پژوهش حاضر | ANSYS             | پژوهش حاضر | ANSYS               | پژوهش حاضر |
| ۱/۲             | ۵۹/۲۳۰            | ۵۹/۲۹۷     | ۳۰/۹۰۵            | ۳۰/۸۹۸     | ۱۴۶/۹۹۸           | ۱۴۶/۸۳۷    | ۸۴/۸۵۴              | ۸۴/۶۷۳     |
| ۱/۴             | ۶۲/۶۳۷            | ۶۲/۶۹۱     | ۲۶/۵۵۰            | ۲۶/۵۱۹     | ۱۲۶/۰۶۲           | ۱۲۶/۰۰۲    | ۷۰/۴۳۳              | ۷۰/۴۰۶     |
| ۱/۶             | ۶۵/۴۲۹            | ۶۵/۴۲۹     | ۲۱/۱۷۱            | ۲۱/۰۸۶     | ۱۱۳/۳۷۹           | ۱۱۳/۲۶۱    | ۶۵/۷۴۰              | ۶۵/۸۱۷     |

جدول ۳: مقایسه فرکانس‌های طبیعی عددی روش ارائه شده با نتایج نرم افزار ANSYS برای تیر دو سر مفصل

| ضریب بار بحرانی | فرکانس اول (هرتز) |            | فرکانس دوم (هرتز) |            | فرکانس سوم (هرتز) |            | فرکانس چهارم (هرتز) |            |
|-----------------|-------------------|------------|-------------------|------------|-------------------|------------|---------------------|------------|
|                 | ANSYS             | پژوهش حاضر | ANSYS             | پژوهش حاضر | ANSYS             | پژوهش حاضر | ANSYS               | پژوهش حاضر |
| ۱/۲             | ۶۵۴/۱۹۵           | ۶۵۶/۷۵۰    | ۱۷/۱۶۹            | ۱۷/۱۱۴     | ۵۴/۷۸۷            | ۵۴/۷۴۶     | ۱۰۶/۷۷۹             | ۱۰۶/۷۸۸    |
| ۱/۴             | ۸۳۷/۸۰۷           | ۸۳۸/۹۳۰    | ۱۲/۲۹۱            | ۱۲/۲۶۰     | ۴۹/۴۰۹            | ۴۹/۳۸۵     | ۱۰۱/۵۱۴             | ۱۰۱/۵۳۳    |
| ۱/۶             | ۹۳۹/۶۹۱           | ۹۴۰/۳۸۲    | ۸/۸۷۴             | ۸/۸۵۱      | ۴۵/۴۲۲            | ۴۵/۴۰۴     | ۹۷/۵۲۳              | ۹۷/۵۴۴     |

جدول ۴: مقایسه فرکانس‌های طبیعی عددی با داده‌های تجربی تیر دو سر گیردار

| شماره تیر | کوتاه‌شدگی انتهای (mm) | ضریب بار بحرانی | فرکانس اول (هرتز) |        |           | فرکانس دوم (هرتز) |        |           | فرکانس چهارم (هرتز) |         |           |
|-----------|------------------------|-----------------|-------------------|--------|-----------|-------------------|--------|-----------|---------------------|---------|-----------|
|           |                        |                 | پژوهش حاضر        | تجربی  | خطای نسبی | پژوهش حاضر        | تجربی  | خطای نسبی | پژوهش حاضر          | تجربی   | خطای نسبی |
| ۱         | ۱۳۰                    | ۱/۰۸۸           | ۹۵/۱۳۱            | ۹۷/۵۰۰ | ۲/۴۲۹     | ۵۴/۰۴۸            | ۵۵/۰۶۲ | ۱/۸۴۳     | ۱۷۱/۴۲۷             | ۱۷۵/۴۳۸ | ۲/۲۸۶     |

جدول ۵: مقایسه فرکانس‌های طبیعی عددی با داده‌های تجربی تیر دو سر مفصل

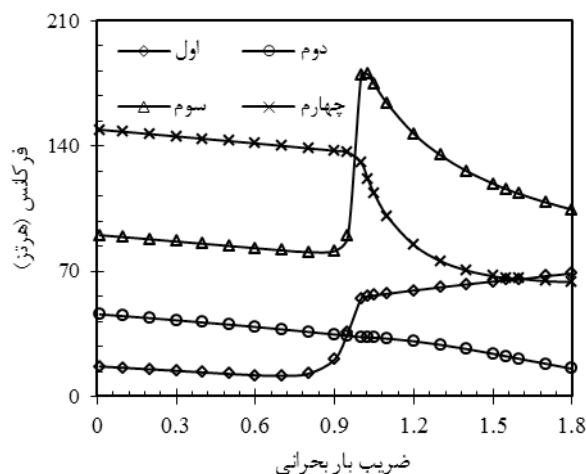
| شماره تیر | کوتاه‌شدگی انتهای (mm) | ضریب بار بحرانی | فرکانس دوم (هرتز) |        |           | فرکانس سوم (هرتز) |        |           | فرکانس چهارم (هرتز) |         |           |
|-----------|------------------------|-----------------|-------------------|--------|-----------|-------------------|--------|-----------|---------------------|---------|-----------|
|           |                        |                 | پژوهش حاضر        | تجربی  | خطای نسبی | پژوهش حاضر        | تجربی  | خطای نسبی | پژوهش حاضر          | تجربی   | خطای نسبی |
| ۲         | ۱۵۰                    | ۱/۰۸۸           | ۲۶/۲۳۹            | ۲۶/۳۸۰ | ۰/۵۳۳     | ۷۳/۱۷۷            | ۷۳/۱۳۰ | ۰/۰۶۴     | ۱۳۷/۹۴۵             | ۱۳۶/۹۰۰ | ۰/۷۶۳     |
| ۳         | ۲۰۰                    | ۱/۱۰۹           | ۲۰/۲۰۸            | ۲۰/۳۵۰ | ۰/۶۹۹     | ۵۷/۸۴۹            | ۵۸/۴۹۰ | ۱/۰۹۶     | ۱۰۹/۷۶۷             | ۱۱۰/۸۴۰ | ۰/۹۶۸     |
|           | ۳۰۰                    | ۱/۱۷۷           | ۱۷/۸۱۳            | ۱۸/۰۴۲ | ۱/۲۷۱     | ۵۵/۴۷۰            | ۵۵/۸۱۱ | ۰/۶۱۲     | ۱۰۷/۴۸۷             | ۱۰۷/۷۲۰ | ۰/۲۱۷     |
|           | ۴۰۰                    | ۱/۲۵۶           | ۱۵/۵۴۶            | ۱۵/۶۶۲ | ۰/۷۴۳     | ۵۳/۰۷۳            | ۵۲/۶۲۵ | ۱/۰۲۹     | ۱۰۵/۱۶۳             | ۱۰۶/۶۴۰ | ۱/۳۸۵     |

پس از کمانش، تیر تحت جابجاییهای بزرگ قرار گرفته و به علت کاهش سختی خمشی، فرکانسهای طبیعی دوم تا چهارم با افزایش بار کاهش می‌یابند. همچنین، فرکانس طبیعی اصلی بلافاصله پس از کمانش افزایش یافته و مقدار آن با افزایش بار به صورت آرام زیاد می‌شود. این بدان دلیل است که سختی کششی دینامیکی بر سختی خمشی فائق آمده است، در حالیکه در سایر شکل موده‌ها، سختی خمشی غالب است.

با توجه به شکل‌های ۶ و ۷ مشاهده می‌گردد که قبل و پس از کمانش، شکل موده‌های متناظر با فرکانس‌های اول، دوم و چهارم به ترتیب بدون گره، دارای یک و سه گره می‌باشند و همچنین شکل مود متناظر با فرکانس سوم قبل از کمانش دو گره داشته ولی پس از کمانش این شکل مود دارای چهار گره می‌گردد.

شکل ۸ تغییرات فرکانس‌های طبیعی تیر دو سر گیردار را با افزایش بار برای دامنه‌های متفاوت نقص هندسی نشان می‌دهد. با توجه به این شکل ملاحظه می‌گردد که فرکانس‌های متناظر با شکل موده‌های فرد نسبت به تغییر دامنه نقص هندسی حساس بوده در حالیکه فرکانس‌های متناظر با شکل موده‌های زوج برای دامنه‌های متفاوت نقص هندسی تغییر چندانی نمی‌کنند. همچنین بعد از وقوع تغییر شکل بزرگ (پس کمانش) و با بیشتر شدن نیروی محوری وارد بر تیر این اثر از بین می‌رود. این بدان دلیل است که پس از کمانش انحنا تیر افزوده شده و در عمل نقص هندسی در مقابل آن ناچیز می‌باشد. علاوه بر این با توجه به شکل‌های ۸-الف و ۸-ج (فرکانس‌های طبیعی اول و سوم) مشاهده می‌گردد که برای  $W_0 = 0.1$  قبل از وقوع تغییر شکل بزرگ به دلیل زیاد بودن مقدار دامنه نقص هندسی، با افزایش بار فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد.

در این شکل‌ها، مقدار بار قبل از کمانش و پس کمانش به ترتیب ۵/۰ و ۱/۵ برابر بار بحرانی تیر می‌باشد. همانگونه که از شکل‌ها دیده می‌شود شکل مود اول، اولین مود متقارن کششی-خمشی است. این در حالی است که مود دوم، اولین مود ضد متقارن خمشی و شکل موده‌های سوم و چهارم به ترتیب دومین مود متقارن و سومین مود ضد متقارن خمشی هستند. در شکل ۵ هنگامیکه بار فشاری از صفر تا بار کمانش افزایش می‌یابد، به علت کاهش سختی تیر همه فرکانس‌های طبیعی به آرامی کاهش می‌یابند. منحنی‌های مربوط به فرکانس‌های فرد بلافاصله بعد از کمانش افزایش زیادی یافته، در حالیکه موده‌های زوج مقداری کاهش می‌یابند.

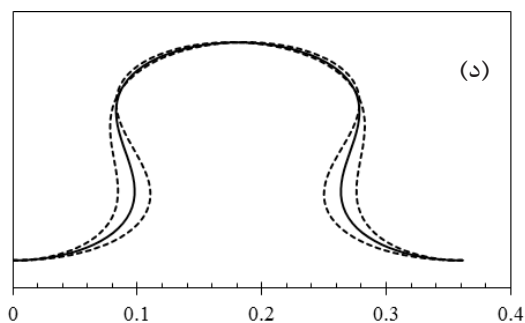
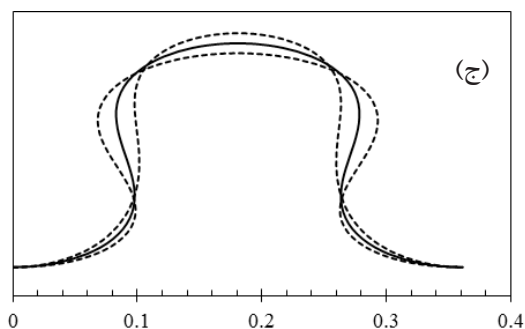
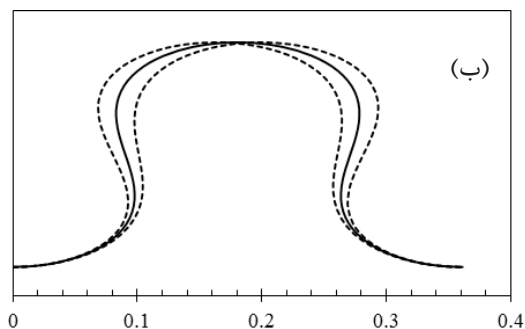
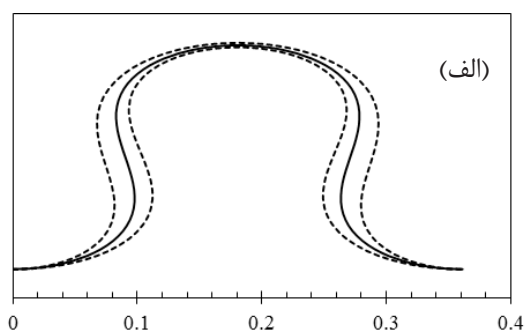


شکل ۵: تغییرات چهار فرکانس طبیعی اول با افزایش بار



## ۶-۵- تیر دو سر مفصل

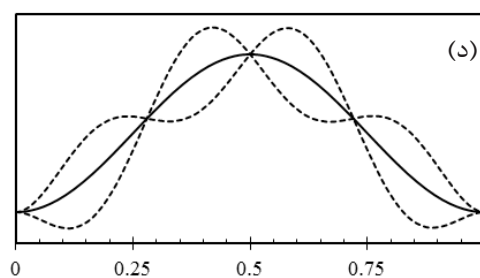
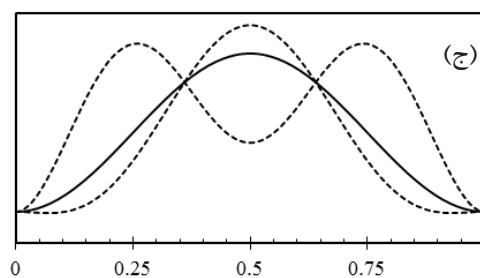
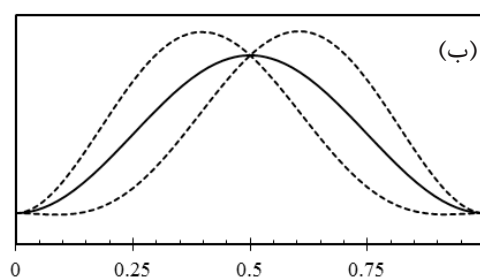
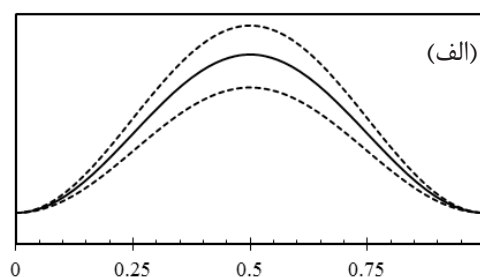
شکل ۹ تغییرات سیزده فرکانس طبیعی اول تیر دو سر مفصل را با افزایش بار نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشخص است که قبل از وقوع تغییر شکل بزرگ تمامی فرکانس‌ها با افزایش بار کاهش می‌یابند. پس از وقوع تغییر شکل بزرگ (پس کمانش) با افزایش بار تمامی فرکانس‌های طبیعی به غیر از فرکانس طبیعی اول و یازدهم کاهش یافته و این دو فرکانس افزایش می‌یابند. همانطور که در این شکل مشاهده می‌گردد فرکانس طبیعی اول به شدت به افزایش بار و میزان خمیدگی تیر حساس بوده و برای بار محوری دو برابر بار بحرانی تیر، مقدار فرکانس طبیعی اول از مقدار فرکانس طبیعی سیزدهم نیز بیشتر می‌گردد.



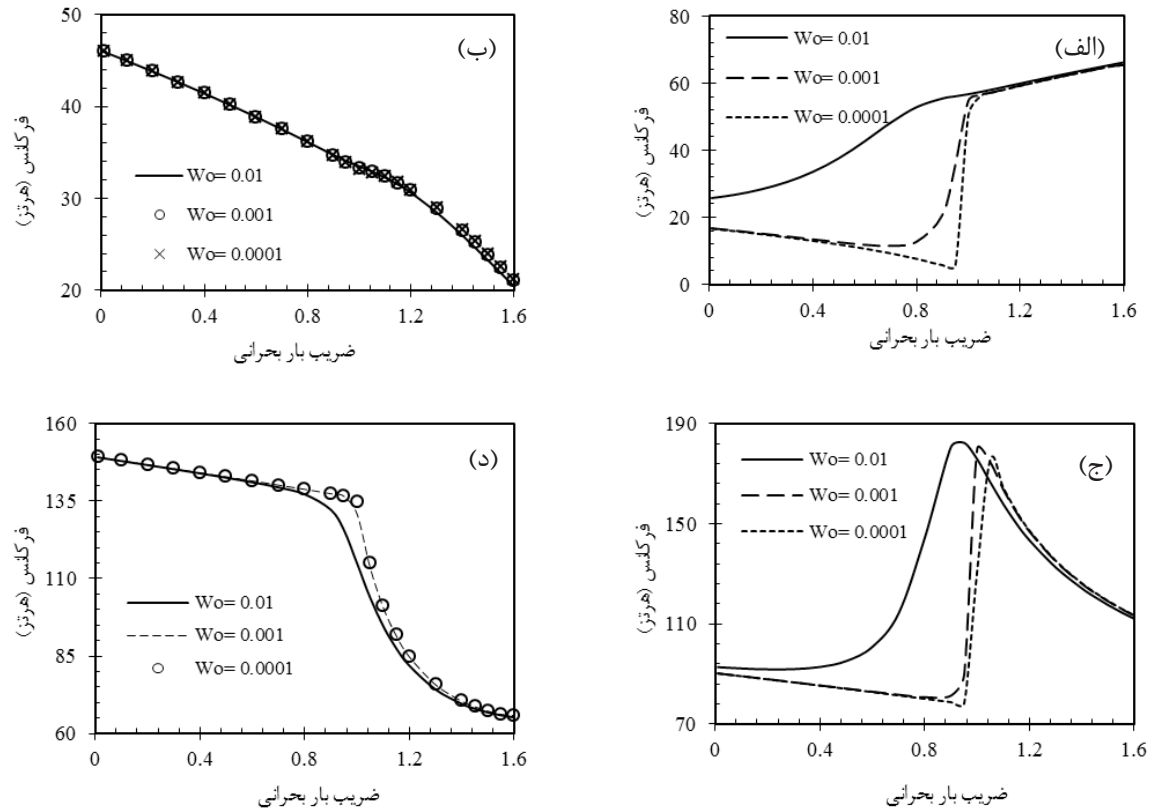
شکل ۷: شکل مودهای ارتعاشی پس از کمانش  
(الف) فرکانس اول، (ب) فرکانس دوم، (ج) فرکانس سوم، (د) فرکانس چهارم

شکل مود اول تیر، اولین مود متقارن کششی-خمشی است، در حالیکه مود بعدی مودهای خمشی هستند. مود یازدهم نیز دومین شکل مود ضدمتقارن کششی-خمشی است. از آنجا که بعد از کمانش سختی کششی در مودهای اول و یازدهم بر سختی خمشی غلبه می‌کند، فرکانس‌های مربوط به این شکل مودها با ازدیاد بار افزایش می‌یابند.

حالت تعادل و ارتعاش آزاد مربوط به چهار شکل مود اول پس کمانش تیر در شکل ۱۰ نشان داده شده است. مقدار بار وارده بر تیر  $1/5$  برابر بار بحرانی می‌باشد. با توجه به شکل‌ها مشخص می‌گردد بر خلاف تیر دو



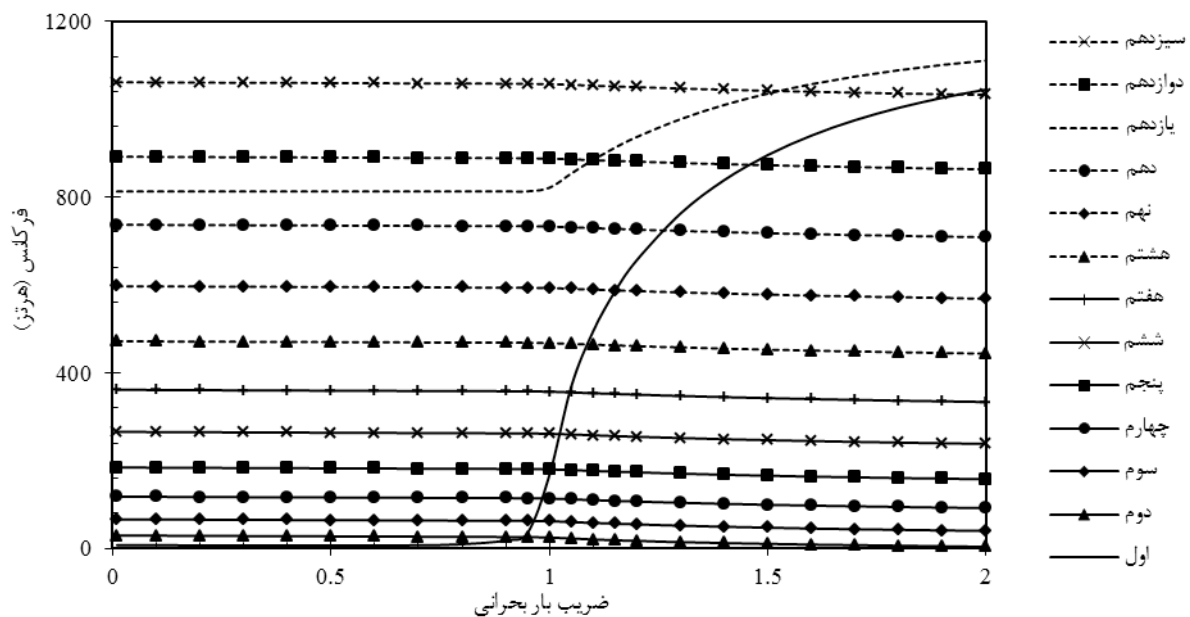
شکل ۶: شکل مودهای ارتعاشی قبل از کمانش  
(الف) فرکانس اول، (ب) فرکانس دوم، (ج) فرکانس سوم، (د) فرکانس چهارم



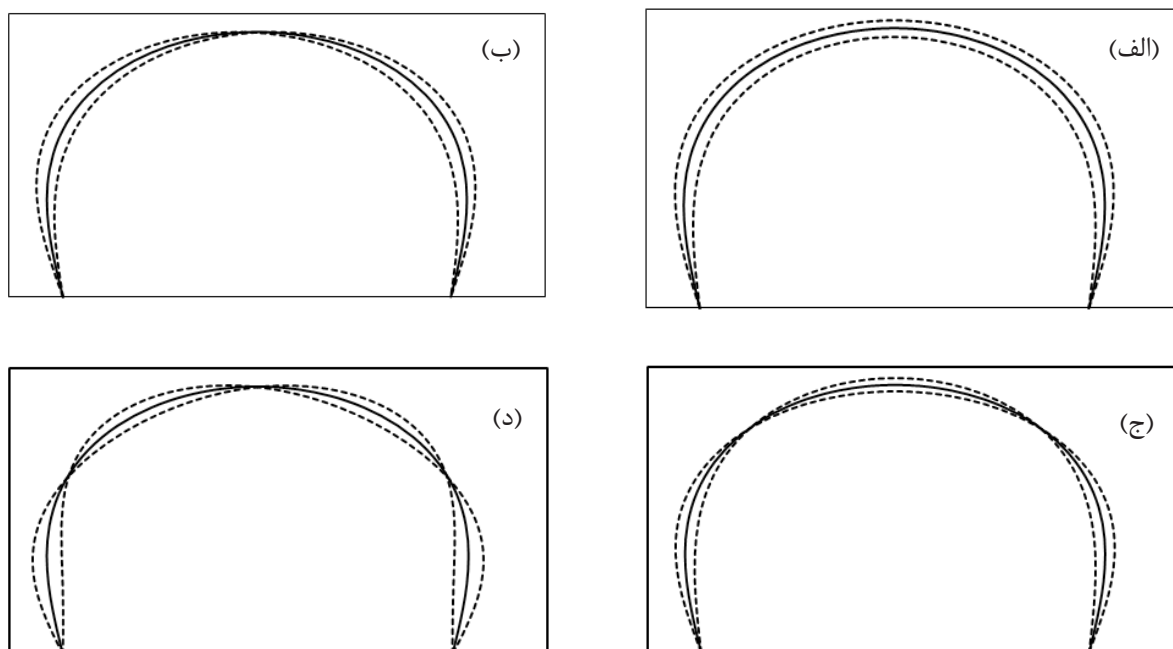
شکل ۸: تغییرات فرکانس‌های طبیعی تیر دو سر گیردار با افزایش بار برای دامنه‌های متفاوت نقص هندسی. (الف) فرکانس اول، (ب) فرکانس دوم، (ج) فرکانس سوم، (د) فرکانس چهارم

که فرکانس اول نسبت به تغییر دامنه نقص هندسی حساس است و فرکانس‌های دوم تا چهارم برای دامنه‌های متفاوت نقص هندسی تغییر چندانی نمی‌کنند. بعد از وقوع تغییر شکل بزرگ (پس‌کمانش) و با بیشتر شدن نیروی محوری وارد بر تیر این اثر از بین می‌رود.

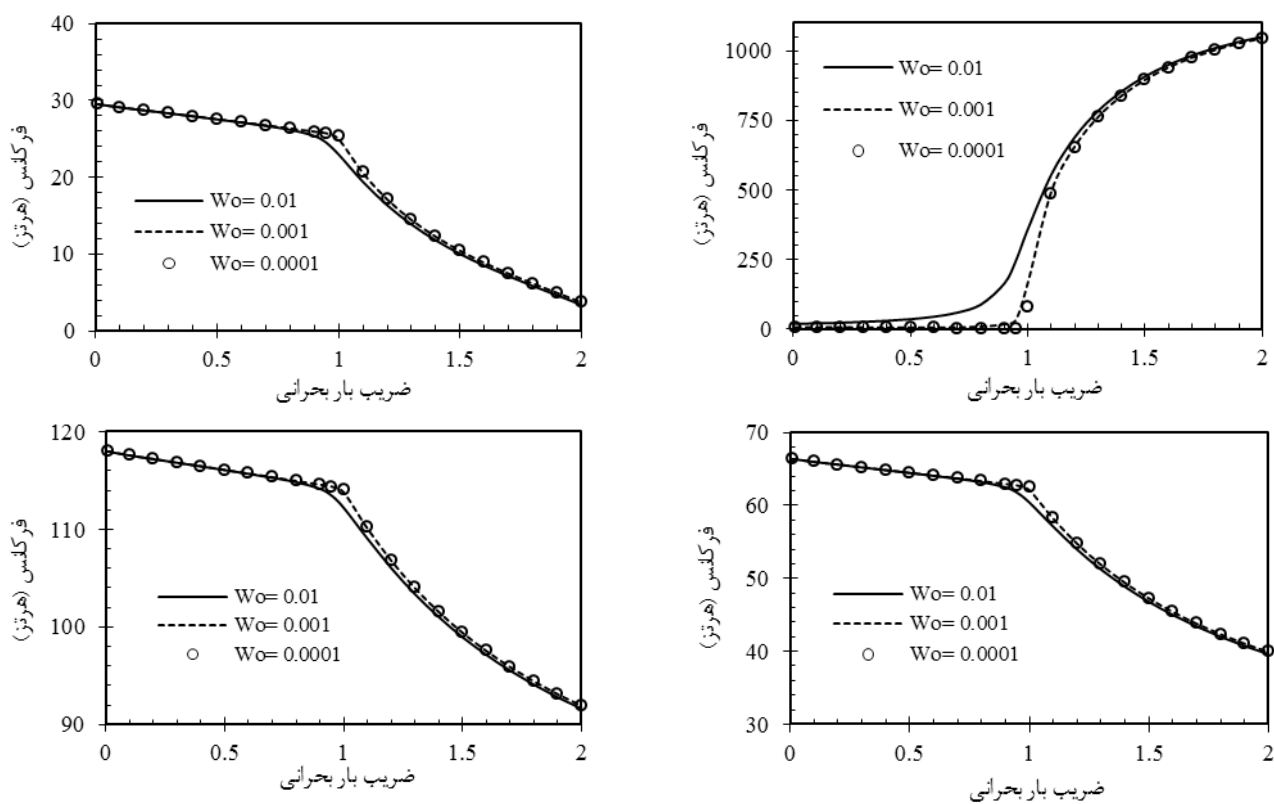
سر گیردار، پس از کمانش شکل مود متناظر با فرکانس‌های اول تا چهارم به ترتیب بدون گره، دارای یک، دو و سه گره می‌باشند. شکل ۱۱ تغییرات فرکانس‌های طبیعی تیر را با افزایش بار برای دامنه‌های متفاوت نقص هندسی نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مشخص است



شکل ۹: تغییرات فرکانس‌های طبیعی تیر دو سر مفصل با افزایش بار



شکل ۱۰: شکل مودهای ارتعاشی پس از کمانش ( $P/P_{cr} = 1/5$ )  
 (الف) فرکانس اول، (ب) فرکانس دوم، (ج) فرکانس سوم، (د) فرکانس چهارم



شکل ۱۱: تغییرات فرکانس‌های طبیعی تیر دو سر مفصل با افزایش بار برای دامنه‌های متفاوت نقص هندسی.  
 (الف) فرکانس اول، (ب) فرکانس دوم، (ج) فرکانس سوم، (د) فرکانس چهارم

## ۸- مراجع

- [1] A. H. Nayfeh; W. Kreider; T.J. Anderson, "Investigation of natural frequencies and mode shapes of buckled beams", AIAA J., 33, Vol. 6, pp.1121-1126, 1995.
- [2] B. P. Patel; M. Ganapathi; M. Touratier, "Nonlinear free flexural vibrations/post-buckling analysis of laminated orthotropic beams/columns on a two parameter elastic foundation", Composite structures, Vol 46, pp. 189-196, 1999.
- [3] W. Lestari; S. Hanagud, "Nonlinear vibration of buckled beams: some exact solutions", J. of solids and structures, Vol 38, pp. 4741-4757, 2001.
- [4] S. T. Santillan; L. N. Virgin; R. H. Plaut, "Post-buckling and vibration of heavy Beam on horizontal or inclined rigid foundation", J. of applied mechanics, Vol 73, pp. 664-671, 2006.
- [5] S. Neukirch; J. Frelat; A. Goriely; C. Maurini, "Vibrations of post-buckled rods: The singular inextensible limit", J. of Sound and Vibrations, Vol 331, pp. 704-720, 2012.
- [6] E. Reissner, "On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem", J. of Applied Mathematics and Physics, Vol 23, pp. 795-804, 1972.
- [7] Y. J. Hua; Y. Y. Zhu; C. J. Cheng, "DQEM for large deformation analysis of structures with discontinuity conditions and initial displacements", J. of Engineering Structures, Vol 30, pp. 1473-1487, 2008.
- [8] C. Shu, Application of differential quadrature and its application in engineering, 1st edition, Verlage London, Springer, 2000.
- [9] J. R. Quan; C. T. Chang, "New insights in solving distributed system of equations by quadrature-method", J. of Compute Chem. Engng., Vol 13, pp. 1017-1024, 1989.
- [10] B.W.R. Forde; S.F. Stierner, "Improved Arc Length Orthogonality Methods For Nonlinear Finite Element Analysis", J. Of Computers & Structures, Vol 27, No. 5, pp. 625-630, 1987.
- [11] S.N. Al-rasby, "Solution techniques in nonlinear structural analysis", J. of Computers & Structures, Vol 40, No. 4, 985-993, 1991.
- [12] S. Moradi; F. Taheri, "Postbuckling analysis of delaminated composite beams by differential quadrature method", J. of Composite Structures, Vol 46, pp. 33-39, 1999.

علت این امر نیز زیاد بودن انحنای تیر پس کمانه شده در مقابل نقص هندسی است. با توجه به شکل ۱۱-الف مشاهده می گردد که برای  $W_0=0/01$  قبل از وقوع تغییر شکل بزرگ به دلیل زیاد بودن مقدار دامنه نقص هندسی، با افزایش بار فرکانس طبیعی نیز افزایش می یابد.

## ۷- نتیجه گیری

در این پژوهش ارتعاشات آزاد تیر کمانه شده بررسی گردید. بدین منظور، از معادلات دیفرانسیل حرکت در مختصات مماسی، که یک دستگاه دیفرانسیل غیرخطی را تشکیل می دهند، استفاده شد. پاسخ تیر بصورت مجموع پاسخ های استاتیکی و دینامیکی در نظر گرفته شد. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی استاتیکی، روابط با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده، سپس دستگاه معادلات جبری غیرخطی با روش طول قوس حل شد. با توجه به کوچک بودن دامنه حرکت ارتعاشات آزاد تیر نسبت به دامنه حرکت استاتیکی، دستگاه معادلات دیفرانسیل حرکت ارتعاشی، خطی شد. برای حل این دستگاه، معادلات با روش کوادراتور دیفرانسیلی گسسته شده، سپس مقادیر بدست آمده از حل روابط استاتیکی در دستگاه معادلات گسسته شده دینامیکی جایگذاری و با حل مسئله مقدار ویژه بدست آمده فرکانس های تیر کمانه شده و شکل مودهای متناظر با آن بدست آمدند. برای بررسی درستی روش ارائه شده، نتایج حاصل با نتایج بدست آمده از روش اجزاء محدود (به کمک نرم افزار ANSYS) مقایسه شد. علاوه بر این، آزمایش تجربی بر روی تیرهایی از جنس پی وی سی انجام گرفت و فرکانسهای طبیعی آنها در حالت کمانه شده و تحت شرایط مرزی مختلف بدست آمد. مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج روش اجزا محدود و داده های تجربی نشان دهنده دقت بسیار خوب روش ارائه شده می باشد. از دیگر مزایای روش ارائه شده همگرایی با تعداد نقاط دقت کم و زمان محاسباتی پایین می باشد. همچنین، اثر افزایش بار و اثر دامنه نقص هندسی بر فرکانس های طبیعی بررسی شده و مشاهده گردید که پس از کمانش بین فرکانس های طبیعی تیر پدیده تشدید اتفاق می افتد. علاوه بر این شکل مودهای ارتعاشی قبل و بعد از کمانش با یکدیگر مقایسه شده و مشخص گردید که برای تیر کمانه شده دو سر گیردار شکل مود متناظر با فرکانس دوم دارای چهار گره می باشد.