



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دوره ۴۷، شماره ۲، زمستان ۱۳۹۴، صفحه ۵۱ تا ۶۰
Vol. 47, No. 2, Winter 2015, pp. 51-60



نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر (مهندسی مکانیک)

AmirKabir Journal of Science & Research
(Mechanical Engineering)
(ASJR-ME)

بکارگیری تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی در بررسی اثر اندازه بر خواص الاستیک نانولوله تک جداره کربنی

محمود مهرداد شکریه^{۱*}، ایمان زیبائی^۲

۱- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

۲- کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

(دریافت: ۱۳۹۱/۹/۲۲، پذیرش: ۱۳۹۴/۴/۲۹)

چکیده

در این مقاله تأثیر اثر اندازه روی خواص الاستیک نانولوله‌های تک‌جداره کربنی با استفاده از تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور از مدل‌های مکانیکی مانند میله تحت کشش، تیر اویلر-برنولی و میله تحت پیچش استفاده گردید. مدل میله تحت کشش در تحقیق حاضر پایه‌گذاری گردید. مدل تیر اویلر-برنولی از منابع موجود استخراج و شرایط مرزی حاکم بر تیر فوق در تحقیق حاضر اصلاح گردید. درضمن مدل میله تحت پیچش در تحقیق حاضر پایه‌گذاری گردید. در تحقیق حاضر معادله ساختاری برای حالت یک‌بعدی کاهش یافته و استخراج گردید. معادلات حاکم و شرایط مرزی با استفاده از روش انرژی و حساب تغییرات استخراج شد. سپس از معادلات ساختاری تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی استفاده شد تا خواص الاستیک وابسته به اندازه، بر اساس تنش مؤثر محاسبه گردند. نتایج حکایت از آن دارد که طول نانولوله کربن روی میزان مدول یانگ در مقایسه با مدول برشی تأثیر بیشتری دارد و با کاهش طول نانولوله مدول یانگ نیز کاهش می‌یابد.

کلمات کلیدی:

تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی، نانولوله تک‌جداره کربن، اثرات اندازه، خواص الاستیک

۱- مقدمه

در طی دو دهه گذشته، به دلیل رشد علوم و فنون نانو، حوزه‌های جدیدی در شاخه‌های مهندسی، پزشکی و علوم پایه گسترش یافته‌اند. نانولوله‌های کربنی با خواص منحصر به فرد الکتریکی و مکانیکی که توسط ایجیما^۱ (۱۹۹۱) کشف شده‌اند [۱] به عنوان یکی از بهترین مواد نوین در حوزه نانوفناوری مورد توجه قرار گرفته‌اند [۲]. کامپوزیت‌های پلیمری تقویت‌شده با نانولوله‌ها در قیاس با کامپوزیت‌های پلیمری معمولی میزان قابل توجهی از افزایش استحکام و سفتی را نشان می‌دهند [۳]. با توجه به قابلیت‌های خیره‌کننده نانولوله‌های کربنی در بسیاری از حوزه‌های علوم به ویژه مهندسی مکانیک، ضرورت فهم دقیق از رفتار مکانیکی این ساختارها برای طراحی دقیق‌تر و بهینه‌سازی مواد تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی امری مهم جلوه می‌کند.

بطور کلی به منظور تعیین رفتار مکانیکی نانو ساختارها دو راهکار کلی وجود دارد: (۱) روش‌های آزمایشگاهی و (۲) مدل‌سازی ریاضی. از آنجایی که روش‌های آزمایشگاهی در ابعاد نانو پرهزینه است و با دشواری‌های خاص خود همراه است؛ بنابراین سه روش عمده مدل‌سازی ریاضی مورد توجه قرار می‌گیرد که به ترتیب عبارتند از: الف) مدل‌سازی اتمی، ب) مدل‌سازی ترکیبی مولکولی و مکانیکی و ج) مدل‌سازی بر مبنای مکانیک محیط پیوسته. به لحاظ محدودیت‌های زمان و بیشینه تعداد اتم‌ها در شبیه‌سازی، دو روش اول در قیاس با مدل‌سازی بر مبنای مکانیک محیط پیوسته پرهزینه‌تر بوده و در ضمن روابط و فرمول‌بندی‌های منحصر به دو روش مذکور نیز از پیچیدگی‌های بیشتری برخوردار هستند. بنابراین این موضوع بیانگر آن است که می‌توان از مکانیک محیط پیوسته به عنوان راهکاری مناسب جهت بررسی پدیده‌هایی فیزیکی در حوزه نانو بهره جست.

اما ناتوانی مکانیک محیط پیوسته کلاسیک در مواجهه با دسته‌ای از مسائل از قبیل: تکنیکی‌های کرنش و تنش در خطوط نابجایی‌ها و نوک ترک، تفسیر رفتار وابسته به اندازه مواد مختلف و همچنین توصیف الگوی نابجایی‌ها بروز پیدا می‌کند. یکی از مهمترین مسائل در حوزه مکانیک محیط پیوسته، بحث اثرات اندازه و تأثیر آن روی رفتار مکانیکی مواد مختلف است. این اثرات در زمانی که اندازه ذرات بسیار کوچک می‌گردند، تأثیر غالبی را بر رفتار مکانیکی ماده خواهند داشت و تئوری‌های مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته کلاسیک توانایی در نظر گرفتن چنین اثراتی را ندارد. این امر مخصوصاً در فضای اتمی که اندازه ساختارها در قیاس با مشخصات درون‌اتمی مواد خیلی بزرگ نیست به وضوح مشاهده می‌گردد. در واقع اثرات اندازه در اثر تداخل دو مقیاس طول مشخصه داخلی نظیر فاصله میان ذرات و طول مشخصه خارجی نظیر طول ترک بروز پیدا می‌کند. یکی از تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته تعمیم‌یافته که به بررسی چنین پدیده‌ای می‌پردازد، تئوری گرادبان کرنش است.

سرآغاز تحقیقات مربوط به تئوری گرادبان کرنشی را می‌توان در مطالعات

میندلین^۲ (۱۹۶۴) و کرونر^۳ (۱۹۶۳) جستجو نمود [۴] و [۵]. در واقع اساس تئوری گرادبان کرنشی بر این امر استوار است که در چگالی انرژی کرنشی جسم علاوه بر کرنش، گرادبان‌های کرنش نیز به میان آورده شوند. البته این نتیجه براساس یک سری مطالعات سینماتیکی روی المان متناظر به یک نقطه مادی از جسم حاصل گردید. به عبارتی میندلین (۱۹۶۸) فرض نمود که درون هر نقطه مادی می‌توان میکروساختاری را در نظر گرفت که کمیت‌های سینماتیکی متناظر با آن و مقیاس ماکرو متمایز از یکدیگر هستند و انرژی جنبشی و چگالی انرژی کرنشی را بر حسب متغیرهای هر دو مقیاس ارائه داد [۶]. اما در نهایت برای ساده‌تر نمودن تئوری خود، کمیت‌های سینماتیکی مقیاس میکرو را بر حسب مشتقات میدان جابجایی مقیاس ماکرو بیان نمود و از این طریق گرادبان‌های کرنش در چگالی انرژی کرنشی به میان آورده شدند.

در زمینه استفاده از تئوری گرادبان کرنشی به منظور بررسی پدیده‌های فیزیکی در ابعاد نانو مطالعات مختلفی وجود دارد. آسکس^۴ و ایفانتیس^۵ (۲۰۰۹) با استفاده از تئوری گرادبان کرنشی به بررسی پدیده پاشش موج ناشی از خمش در نانولوله‌ها پرداخته‌اند [۷]. بدین منظور آنها از مدل‌های تیر اویلر-برنولی و تیر تیموشنکو استفاده نموده‌اند و نتایج خود را با شبیه‌سازی دینامیک مولکولی مقایسه نموده‌اند و به این نتیجه رسیده‌اند که با به میان آوردن گرادبان اینرسی در معادلات حاکم بر تئوری گرادبان کرنشی می‌توان بر پدیده ناپایداری فرکانس‌های موج مذکور غلبه نمود. ونگ^۶ (۲۰۱۰) با استفاده از تئوری گرادبان کرنشی و به میان آوردن اثرات گرادبان اینرسی به بررسی پدیده انتشار امواج در نانولوله‌هایی پرداخته است که حامل سیال هستند [۸]. بدین منظور از تئوری‌های تیر اویلر-برنولی و تیر تیموشنکو استفاده نموده است و مشاهده شده است که اثرات گرادبان کرنش و گرادبان اینرسی بر سرعت فاز در اعداد موج بالاتر بسیار چشم‌گیر است. ونگ و همکارانش (۲۰۱۲) به بررسی پدیده کماتش مکانیکی و نیز حرارتی در نانولوله‌هایی که در بستر الاستیک قرار داده می‌شوند پرداخته‌اند [۹]. تئوری تیر تیموشنکو و تیر اویلر-برنولی بدین منظور مورد استفاده قرار گرفته است و نشان داده شده است که بار بحرانی کماتش به اثرات اندازه و سفتی بستر الاستیک وابستگی بیشتری دارد. انصاری و همکارانش (۲۰۱۲) برای بررسی رفتار ارتعاشی نانولوله‌های تک‌جداره، تئوری‌های گرادبانی مختلف از جمله تئوری گرادبان کرنشی را روی مدل‌های تیر اویلر-برنولی و تیر تیموشنکو مورد مطالعه قرار داده‌اند [۱۰]. نتایج آنها نشان می‌دهد که وقتی نسبت منظری نانولوله تا حدود ۶ کاهش می‌یابد؛ تفاوت میان تئوری‌های مختلف گرادبانی بیشتر خواهد شد و تئوری گرادبان کرنشی به همراه اثرات گرادبان اینرسی نتایج بهتری را مطابق با نتایج شبیه‌سازی دینامیک مولکولی ارائه می‌دهد.

براساس بهترین اطلاعات نویسندگان مقاله حاضر، تاکنون مطالعات

² Mindlin

³ Kröner

⁴ Askes

⁵ Aifantis

⁶ Wang

¹ Ijima

نمود. متأسفانه در تئوری گرادیان کرنشی بطور شفاف اثری از روابط ساختاری که رفتار ماده بصورت مؤثر در ابعاد بسیار ریز را به درستی تبیین نماید، دیده نمی‌شود. اما محققین دیگری شکل روابط ساختاری زیر را برای تئوری مذکور معرفی نموده‌اند که با میکروساختار جسم تطابق مناسبی دارد [۱۲]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^c + g^2 \sigma_{ij,mm}^c \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}^c = \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

که در اولین رابطه تنش موثر و σ_{ij}^c تنش کلاسیک است. در ادامه شکل یک بعدی رابطه ساختاری فوق مورد توجه قرار خواهد گرفت و تطابق آن با چگالی انرژی کرنشی و روابط حاکم تئوری گرادیان کرنشی نشان داده می‌شود.

۲-۲- رابطه ساختاری یک بعدی بر مبنای تئوری گرادیان کرنشی
 در این بخش، تحقیق حاضر بر آنست که رابطه ساختاری (۴) را برای حالت یک بعدی استخراج نماید. هدف آن است که از روی این رابطه ساختاری، به چگالی انرژی کرنشی در رابطه (۱) و نیز روابط حاکم در حالت یک بعدی دست یافته شود. رابطه ساختاری (۴) در حالت یک بعدی بصورت زیر خواهد بود:

$$\sigma = E \left(\varepsilon + g^2 \frac{d^2 \varepsilon}{dx^2} \right) \quad (5)$$

که E همان مدول یانگ می‌باشد. حال چگالی انرژی کرنشی برای این رابطه ساختاری ارائه می‌گردد:

$$w = \int_0^{\varepsilon(x)} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon(x)} E \left[\varepsilon + g^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{d\varepsilon}{dx} \right) \right] d\varepsilon \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} E \varepsilon^2 + \frac{1}{2} E g^2 \left(\frac{d\varepsilon}{dx} \right)^2$$

این چگالی انرژی کرنشی، مانند حالت یک بعدی رابطه (۱) خواهد بود. حال باید بررسی نمود که آیا با این چگالی انرژی کرنشی می‌توان به روابط حاکم (۳) در حالت یک بعدی رسید یا خیر. چون مسئله یک بعدی است، بنابراین میدان جابجایی بصورت فرض می‌گردد. با این حساب مؤلفه‌های کرنش و گرادیان کرنش بصورت زیر خواهد بود:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad \frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{d^2 u}{dx^2} \quad (7)$$

انرژی کرنشی برای چنین مسئله‌ای بصورت زیر در خواهد آمد:

$$W = \int_0^L \frac{1}{2} EA \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + g^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 \right] dx \quad (8)$$

در رابطه فوق A سطح مقطع جسم می‌باشد و ثابت فرض می‌گردد. با اعمال عملگر تغییرات بر تابع انرژی کرنشی، رابطه به شکل زیر خواهد بود:

محدودی [۱۳] در خصوص بررسی اثرات اندازه روی خواص الاستیک نانولوله‌های کربنی از طریق تئوری گرادیان کرنشی صورت گرفته است. در این پژوهش قصد بر آن است که تأثیر مشخصات هندسی به خصوص طول نانولوله روی خواص الاستیک آن مورد بررسی قرار گیرد و همچنین پارامتر طول مشخصه بر اساس انطباق با نتایج شبیه‌سازی‌های اتمی تخمین زده شود. بدین منظور ابتدا روابط حاکم و روابط ساختاری مربوط به تئوری گرادیان کرنشی به خصوص در حالت یک بعدی ذکر گردیده و درستی آن نیز اثبات می‌شود. سپس با استفاده از مدل‌های مکانیکی نظیر میله تحت کشش، میله تحت پیچش و نیز تیر تحت خمش رفتار مکانیکی نانولوله مورد مطالعه قرار می‌گیرد و روابط حاکم و نیز شرایط مرزی مدل‌های مذکور با استفاده از روش انرژی استخراج خواهد می‌شود. در انتها با استفاده از روابط ساختاری تئوری گرادیان کرنشی در حالت مؤثر خواص الاستیک وابسته به اندازه محاسبه شده و تأثیر مشخصات هندسی مختلف نانولوله به ویژه طول نانولوله روی خواص الاستیک مورد بررسی قرار گرفته و با نتایج شبیه‌سازی اتمی مقایسه می‌گردد.

۲- تئوری

۲-۱- روابط حاکم و روابط ساختاری در الاستیسیته گرادیان کرنشی

یکی از تئوری‌های گرادیانی در زمینه الاستیسیته بر اساس مطالعات ایفنتیس و همکارانش (۱۹۹۲) بوده است که بصورت حالت خاصی از تئوری گرادیان کرنشی میندین می‌باشد [۱۱]. در این تئوری چگالی انرژی کرنشی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

$$+ g^2 \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii,k} \varepsilon_{jj,k} + \mu \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{ij,k} \right)$$

در رابطه (۱) λ و μ همان ثوابت لامه و g طول مشخصه میکروساختار خواهد بود. ε_{ij} کرنش و $\varepsilon_{ij,k}$ گرادیان کرنش است و k به معنی مشتق جزئی نسبت به مؤلفه k ام دستگاه مختصات است. از سوی دیگر بنا به تعریف میندین روابط ساختاری در این تئوری بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \tau_{ijk} = \frac{\partial U}{\partial \kappa_{ijk}}, \quad \kappa_{ijk} = \varepsilon_{jk,i} \quad (2)$$

در رابطه فوق σ_{ij} تنش کوشی یا تنش کلاسیک و τ_{ijk} تنش مرتبه بالا یا تنش غیر کلاسیک می‌باشد. با محاسبه کار نیروهای خارجی و اعمال اصل حداقل انرژی پتانسیل کل، روابط حاکم در تئوری گرادیان کرنشی فوق بصورت زیر در خواهد آمد:

$$C_{ijkl} (u_{k,jl} - g^2 u_{k,jlmm}) + b_i = 0 \quad (3)$$

در رابطه فوق تانسور سفتی الاستیسیته، مؤلفه میدان جابجایی و معرف نیروهای حجمی می‌باشند. البته را می‌توان بر حسب ثوابت لامه نیز بیان

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} - EA g^2 \frac{d^4 u}{dx^4} = 0 \quad (12)$$

$$@x = 0 \begin{cases} u = 0 \\ \frac{du}{dx} = 0 \end{cases}$$

$$@x = L \begin{cases} EA \frac{du}{dx} - EA g^2 \frac{d^3 u}{dx^3} = P \\ EA g^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

با حل معادله حاکم و اعمال شرایط مرزی میدان جابجایی جسم بدست خواهد آمد. این امر با استفاده از نرم افزار میپل ۱۴ صورت گرفته است و از آنجایی که پاسخ های آن طولانی می باشد از ارائه آن بصورت صریح خودداری شده است. حال باید از روی این میدان جابجایی، میدان کرنش تعیین گردد. طبق رابطه کلاسیک میان کرنش و میدان جابجایی، برای میله تحت کشش، کرنش از رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{xx} = \frac{du(x)}{dx} \quad (13)$$

با محاسبه میدان کرنش می توان از روی معادله ساختاری پیشنهادی به میدان تنش نیز در این مسئله رسید.

$$\sigma_{xx} = E (\epsilon_{xx} + g^2 \frac{d^2 \epsilon_{xx}}{dx^2}) \quad (14)$$

حال باید از میدان تنش و میدان کرنش روی کل ناحیه میله متوسط گیری حجمی را انجام داد. در حالت کلی متوسط های حجمی بصورت زیر تعریف می گردند:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad , \quad \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV \quad (15)$$

با توجه به اینکه در این مسئله تابع مجهول در معادلات حاکم تنها تابعیت از x دارد و متعاقباً کرنش و تنش نیز تنها تابعیت نسبت به x خواهند داشت، بنابراین از کرنش و تنش نسبت به این راستا متوسط گیری صورت می گیرد:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{1}{L} \int_0^L \sigma_{xx} dx \quad , \quad \bar{\epsilon}_{xx} = \frac{1}{L} \int_0^L \epsilon_{xx} dx \quad (16)$$

که در رابطه فوق L طول میله خواهد بود. با توجه به رابطه کلاسیک تنش - کرنش می توان مدول یانگ وابسته به اندازه را ارائه نمود:

$$E^{nc} = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{\bar{\epsilon}_{xx}} \quad (17)$$

بر اساس این رابطه مدول یانگ نانولوله کربن بر اساس مدول یانگ تئوری کلاسیک و مشخصات هندسی نانولوله کربن بدست خواهد آمد. البته

$$\delta W = EA \left\{ - \int_0^L \frac{d^2 u}{dx^2} \delta u dx + \int_0^L g^2 \frac{d^4 u}{dx^4} \delta u dx \right\} + EA \frac{du}{dx} \delta u \Big|_0^L + EA g^2 \frac{d^2 u}{dx^2} \delta \left(\frac{du}{dx} \right) \Big|_0^L - EA g^2 \frac{d^3 u}{dx^3} \delta u \Big|_0^L \quad (9)$$

همچنین تغییرات کار نیروهای خارجی بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$\delta W^{ext} = \int_0^L f(x) \delta u dx + \bar{P} \delta u \Big|_0^L + \bar{R} \delta \left(\frac{du}{dx} \right) \Big|_0^L \quad (10)$$

با استفاده از اصل انرژی پتانسیل کل، معادلات حاکم و شرایط مرزی در انتهای $x=0, L$ نیز به راحتی به دست خواهند آمد مطابق آنچه که در ذیل آورده شده است:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} - EA g^2 \frac{d^4 u}{dx^4} + f(x) = 0 \quad (11)$$

$$EA \frac{du}{dx} - EA g^2 \frac{d^3 u}{dx^3} - \bar{P} = 0 \quad or \quad \delta u = 0$$

$$EA g^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - \bar{R} = 0 \quad or \quad \delta \left(\frac{du}{dx} \right) = 0$$

در روابط فوق $f(x)$ ، \bar{P} و \bar{R} به ترتیب بار محوری گسترده، نیروی اعمالی روی مرز و نیروی مرتبه بالای اعمالی روی مرز هستند. همانگونه که مشاهده می گردد معادلات حاکم در اولین بخش رابطه (۱۱) مانند حالت یک بعدی رابطه (۳) می باشد. بنابراین معادله ساختاری ارائه شده بر حسب کرنش و لاپلاسیان کرنش منجر به آن می گردد که چگالی انرژی کرنشی و همچنین معادلات حاکم در حالت یک بعدی استخراج گردند.

۲-۳- مدل میله تحت کشش

اولین مدل مورد استفاده برای بررسی رفتار وابسته به اندازه نانولوله کربنی، مدل میله تحت کشش می باشد که در شکل ۱ نشان داده شده است. مدل میله تحت کشش در تحقیق حاضر پایه گذاری گردیده است.



شکل ۱: شماتیکی از مدل میله تحت کشش

با توجه به اینکه در این مسئله تنها کشش وجود دارد بنابراین با استفاده از این مسئله تنها می توان مدول یانگ وابسته به اندازه را مورد بررسی قرار داد. معادلات مربوط به این بخش قبلاً در اثبات معادله ساختاری پیشنهادی یک بعدی ارائه گردید و برای جلوگیری از تکرار تنها به ذکر معادلات و شرایط مرزی پرداخته خواهد شد. بر این اساس معادلات حاکم و شرایط مرزی برای مسئله میله تحت کشش بصورت زیر خواهد بود:

و برآیند تنش مرتبه بالا می‌باشند. البته برای تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده ثابت روابط حاکم و شرایط مرزی این مسئله بصورت زیر است:

$$E(I + g^2 A) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - g^2 EI \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + q = 0 \quad (20)$$

$$w(0) = w(L) = 0$$

$$M(0) = M(L) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L) = 0$$

با حل این روابط و اعمال شرایط مرزی مربوطه (که در این تحقیق اصلاح گردید)، میدان جابجایی بدست می‌آید که به دلیل طولانی بودن پاسخ از ارائه صریح آن در این بخش خودداری می‌گردد. پس از آن باید کرنش‌ها را تعیین نمود. مؤلفه‌های کرنش در این تئوری بصورت زیر خواهند بود:

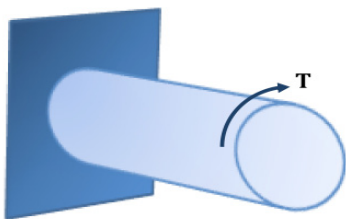
$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = -z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (21)$$

$$\text{other } \varepsilon_{ij} = 0$$

مشابه مدل میله تحت کشش، رابطه ساختاری برای این رابطه بصورت رابطه (۱۴) خواهد بود. مجدداً با توجه به اینکه در روابط حاکم میدان جابجایی تنها تابعیت از x دارد و تابعیت نسبت به z تنها در تعریف تئوری اوپلر-برنولی بروز می‌یابد و در روابط حاکم اثری از آن نیست بنابراین از کرنش و تنش در راستای x متوسط‌گیری شده و همان روابط قبلی درباره تنش و کرنش متوسط و متعاقباً مدول یانگ مؤثر مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۲-۵- مدل میله تحت پیچش

در بخش قبل همانگونه که مشاهده شد مدل تیر تحت خمش از انطباق خوبی با نتایج اتمی برخوردار است و تقریباً تمامی پارامترهای هندسی مؤثر بر مدول یانگ را دربرمی‌گیرد. مدل مورد بررسی مدل میله تحت پیچش است که با استفاده از آن وابستگی به اندازه مدول برشی نانولوله کربنی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. مدل میله تحت پیچش در تحقیق حاضر پایه‌گذاری گردید. شماتیکی از مدل میله تحت پیچش در شکل ۳ نمایش داده شده است.

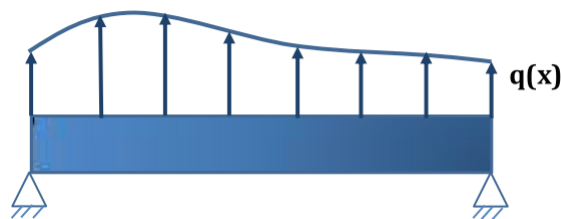


شکل ۳: شماتیکی از مدل میله تحت پیچش

برای نانولوله کربنی باید پارامتر مقیاس طولی را بر مبنای مقایسه با نتایج شبیه‌سازی‌های اتمی و آزمایشگاهی تخمین زد تا از این طریق بتوان رفتار وابسته به اندازه مدول یانگ را مورد بررسی قرار داد.

۲-۴- مدل تیر اوپلر-برنولی

مدل تیر اوپلر-برنولی، مدل دیگری است که برای بررسی اثرات اندازه بکار گرفته می‌شود. در این مدل نیز از آنجایی که این تئوری در اصل اثرات برش را لحاظ نمی‌کند، بنابراین باید انتظار داشت که تنها مدول یانگ از این طریق مورد مطالعه قرار گیرد. شکل ۲ شماتیکی از تیر و بارگذاری آن را نشان می‌دهد. مدل تیر اوپلر-برنولی از منابع موجود [۱۵] استخراج و شرایط مرزی حاکم بر تیر فوق در تحقیق حاضر اصلاح گردید.



شکل ۲: تیر تحت بارگذاری خمشی

روابط حاکم و شرایط مرزی تیر اوپلر-برنولی بر مبنای تئوری گردادیان کرنشی با توجه به چگالی انرژی کرنشی اشاره شده در رابطه (۱) ارائه خواهد شد. در تئوری تیر اوپلر-برنولی میدان جابجایی بصورت زیر خواهد بود:

$$u(x, y, z) = -z \frac{dw(x)}{dx} \quad (18)$$

$$v(x, y, z) = 0$$

$$w(x, y, z) = w(x)$$

با بکارگیری میدان جابجایی فوق‌الذکر در رابطه چگالی انرژی کرنشی و همچنین محاسبه کار نیروهای خارجی و در نهایت اعمال اصل حداقل انرژی پتانسیل کل، روابط حاکم و شرایط مرزی در دو انتهای $x = 0, L$ بصورت زیر خواهند بود:

$$E(I + g^2 A) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - g^2 EI \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + q(x) = 0 \quad (19)$$

$$\bar{V} = E(I + g^2 A) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - g^2 EI \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} \quad \text{or} \quad \delta w = 0$$

$$\bar{M} = E(I + g^2 A) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - g^2 EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad \text{or} \quad \delta \left(\frac{dw}{dx} \right) = 0$$

$$\bar{m} = g^2 EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad \text{or} \quad \delta \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) = 0$$

در این روابط، $w(x, t)$ ، g ، I ، E ، $q(x)$ و \bar{m} به ترتیب مدول یانگ، ممان اینرسی، پارامتر طول مشخصه، جابجایی عرضی، بار گسترده

حال تغییرات انرژی کرنشی باید محاسبه گردد و بدین منظور عملگر تغییرات بر رابطه (۲۶) اعمال می‌گردد:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \mu \theta^2 [(J_2 + g^2 J_1) \psi' \delta \psi' + g^2 J_2 \psi'' \delta \psi''] dz \quad (28) \\ &= \mu \theta^2 (J_2 + g^2 J_1) \psi' \delta \psi' \Big|_0^L \\ &\quad - \int_0^L \mu \theta^2 (J_2 + g^2 J_1) \psi'' \delta \psi'' dz \\ &\quad + \mu \theta^2 g^2 J_2 \psi''' \delta \psi''' \Big|_0^L \\ &\quad - \mu \theta^2 g^2 J_2 \psi'''' \delta \psi'''' \Big|_0^L \\ &\quad + \int_0^L \mu \theta^2 g^2 J_2 \psi^{(4)} \delta \psi dz \end{aligned}$$

برای بارهای خارجی تنها فرض می‌گردد که گشتاور پیچشی در یک انتها وارد شده است. بدین ترتیب کار نیروهای خارجی و تغییرات آنها بصورت زیر خواهد بود:

$$W^{ext} = T \theta \psi(L) \quad (29)$$

$$\delta W^{ext} = T \theta \delta \psi(L)$$

که در رابطه فوق T گشتاور پیچشی وارده بر انتها می‌باشد. با استفاده از حداقل اصل انرژی پتانسیل کل می‌توان به معادلات حاکم و شرایط مرزی دست یافت:

$$\mu \theta^2 (J_2 + g^2 J_1) \psi'' - \mu \theta^2 g^2 J_2 \psi^{(4)} = 0$$

$$@x = 0 \begin{cases} \psi = 0 \\ \psi' = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$@x = L \begin{cases} \mu \theta^2 (J_2 + g^2 J_1) \psi' - \mu \theta^2 g^2 J_2 \psi''' = T \theta \\ \mu \theta^2 g^2 J_2 \psi'' = 0 \end{cases}$$

با حل معادلات حاکم و اعمال شرایط مرزی تابع مجهول $\psi(z)$ تعیین خواهد شد. بنابراین میدان جابجایی معین می‌گردد و از روی آن می‌توان مؤلفه‌های کرنش را محاسبه نمود که در رابطه (۲۳) بدان اشاره شده است. معادله ساختاری برای مسئله مذکور طبق رابطه ساختاری کلی پیشنهادی بصورت زیر در خواهد آمد:

$$\tau_{13} = \tau_{xz} = G(\gamma_{xz} + g^2 \frac{d^2 \gamma_{xz}}{dz^2}) \quad (31)$$

$$\tau_{23} = \tau_{yz} = G(\gamma_{yz} + g^2 \frac{d^2 \gamma_{yz}}{dz^2})$$

که در رابطه فوق G مدول برشی کلاسیک می‌باشد. مجدداً ذکر می‌گردد که از آنجایی که مؤلفه میدان جابجایی در معادلات حاکم تنها تابعیت از

در این بخش قصد بر آن است که معادلات حاکم و شرایط مرزی میله تحت پیچش با استفاده از تئوری گرادبان کرنش به دست آید. مدل پیچش میله براساس مدل سنت-ونانت در نظر گرفته می‌شود. براساس این مدل، میدان جابجایی بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -y \theta \psi(z) \quad (22) \\ v(x, y, z) &= x \theta \psi(z) \\ w &= 0 \end{aligned}$$

که در آن زاویه پیچش بر واحد طول میله و $\psi(z)$ تابع مجهولی است که با تعیین آن از معادلات حاکم، میدان جابجایی قابل تعیین خواهد بود. رابطه میان کرنش و میدان جابجایی همان رابطه کلاسیک خواهد بود و گرادبان کرنش نیز از روی کرنش کلاسیک قابل محاسبه خواهد بود مطابق آنچه که در ذیل آمده است:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = -\frac{1}{2}y \theta \psi'(z) \quad (23)$$

$$\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \frac{1}{2}x \theta \psi'(z)$$

$$\kappa_{ijk} = \epsilon_{jk,i} \quad \epsilon_{13,2} = \epsilon_{31,2} = -\frac{1}{2}\theta \psi''(z)$$

$$\epsilon_{13,3} = \epsilon_{31,3} = -\frac{1}{2}y \theta \psi''(z)$$

$$\epsilon_{23,1} = \epsilon_{32,1} = \frac{1}{2}\theta \psi''(z)$$

$$\epsilon_{23,3} = \epsilon_{32,3} = \frac{1}{2}x \theta \psi''(z)$$

بدیهی است که سایر مؤلفه‌های کرنش و گرادبان کرنش برابر با صفر خواهند بود. چگالی انرژی کرنشی برای این مسئله براساس رابطه ۱ ارائه می‌گردد:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \mu (-y \theta \psi'(z))^2 + \frac{1}{2} \mu (x \theta \psi'(z))^2 \quad (24)$$

$$\frac{1}{2} \mu g^2 (-\theta \psi''(z))^2 + \frac{1}{2} \mu g^2 (\theta \psi''(z))^2$$

$$\frac{1}{2} \mu g^2 (-y \theta \psi''(z))^2 + \frac{1}{2} \mu g^2 (x \theta \psi''(z))^2$$

که همان مدول برشی می‌باشد. المان حجمی برای مسئله پیچش در مختصات قطبی بصورت زیر می‌باشد:

$$dV = r dr d\theta dz \quad (25)$$

حال باید انرژی کرنشی با توجه به المان حجمی و نیز چگالی انرژی کرنشی محاسبه گردد:

$$U = \int_V \bar{u} dV = \int_0^L \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \mu \theta^2 [\psi'^2 (r^2 + 2g^2)] r dr d\theta dz \quad (26)$$

$$+ \int_0^L \int_0^a \frac{1}{2} \mu \theta^2 [g^2 \psi''^2 r^2] r dr d\theta dz$$

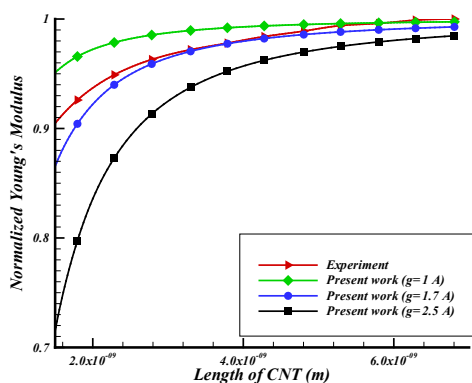
انتگرال‌های زیر معادل با عبارات زیر قرار داده می‌شوند:

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^a 2r dr d\theta, \quad J_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr d\theta \quad (27)$$

لازم به ذکر است که نتایج آزمایشگاهی روی نانولوله کربن (۱۰،۱۰) و با ضخامت ۰/۳۴ نانومتر صورت گرفته است [۱۳].

همانگونه که مشاهده می‌شود در حالت کلی با افزایش طول نانولوله کربن مقدار مدول یانگ افزایش می‌یابد و در طول‌های کوتاه‌تر مقدار مدول یانگ نانولوله کمتر خواهد بود و این نشان دهنده آن است که تئوری حاضر در این پژوهش نسبت به تئوری کلاسیک این قابلیت را دارد که وابستگی به طول را پیش‌بینی نماید. اما نکته منفی درباره مدل یک‌بعدی میله آن است که با نتایج آزمایشگاهی انطباق مناسبی ندارد چرا که به عنوان نمونه وقتی پارامتر طول مشخصه در حدود ۱ آنگستروم در نظر گرفته می‌شود در بخشی از نمودار پیش‌بینی تئوری حاضر بیش از نتایج آزمایشگاهی می‌باشد و در بخشی دیگر کمتر از نتایج آزمایشگاهی پیش‌بینی را انجام می‌دهد. این امر نشان می‌دهد که این مدل در پیش‌بینی مدول یانگ از انطباق مناسبی با نتایج آزمایشگاهی برخوردار نیست. در ضمن این مدل توانایی بررسی تأثیرات قطر نانولوله بر روی مدول یانگ آن را ندارد و به عبارتی تمامی قطر‌ها از مدول یانگ یکسان برخوردار خواهند بود. با توجه به نقایصی که در مورد مدول میله مورد اشاره بیان شد، مدل دیگری برای بررسی رفتار وابسته به اندازه نانولوله مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. مدل تیر اویلر-برنولی، مدلی است که برای این منظور موردنظر است و در این مدل نیز از آنجایی که این تئوری ذاتاً اثرات برش را لحاظ نمی‌کند بنابراین بایستی انتظار داشت که تنها مدول یانگ از این طریق مورد مطالعه قرار گیرد.

در شکل ۵ مدول یانگ وابسته به طول برای نانولوله (۱۰،۱۰) و به ضخامت ۰/۳۴ نانومتر براساس نتایج آزمایشگاهی [۱۳] و براساس مدل پیشنهادی در این پژوهش بر حسب مقادیر مختلف پارامتر طول مشخصه رسم شده است.



شکل ۵: مدول یانگ نانولوله کربن وابسته به طول بر اساس نتایج مدل تیر اویلر - برنولی (با اصلاح شرایط مرزی در تحقیق حاضر) در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی

همانگونه که در شکل ۵ دیده می‌شود دوباره با افزایش طول نانولوله کربن، مدول یانگ افزایش خواهد یافت. حدود وابستگی به اندازه را می‌توان تا حدود ۷ نانومتر ارزیابی نمود و بعد از آن هیچ‌گونه وابستگی

دارد و تابعیت نسبت به x و y تنها در تعریف میدان بروز می‌کند و در معادلات حاکم اثری از آنها نیست، بنابراین تنها در راستای z متوسط‌گیری صورت خواهد گرفت. بدین ترتیب کرنش و تنش متوسط برای این مسئله بصورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\bar{\gamma}_{xz} = \frac{1}{L} \int_0^L \gamma_{xz} dz \quad (32)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{1}{L} \int_0^L \tau_{xz} dz$$

با الهام گرفتن از رابطه کلاسیک تنش-کرنش، ارتباط میان تنش متوسط و کرنش متوسط بصورت زیر بیان می‌شود:

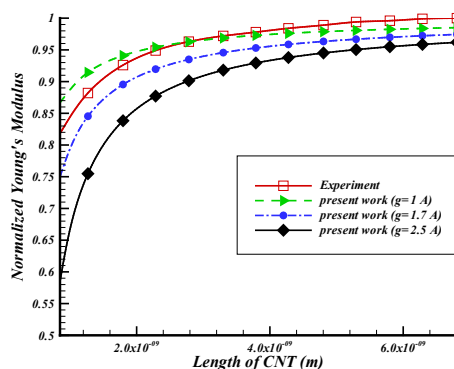
$$G^{nc} = \frac{\bar{\tau}_{xz}}{\bar{\gamma}_{xz}} \quad (33)$$

همانگونه که در رابطه (۳۳) مشخص است، همانند مدول یانگ، مدول برشی وابسته به اندازه نیز بدست آمده است و این مدول نیز به پارامترهای هندسی وابسته است.

۳- نتایج

۳-۱- مدول یانگ وابسته به اندازه نانولوله

در این بخش ابتدا از نتایج مربوط به مدول میله تحت کشش استفاده شده که براساس آن می‌توان مدول یانگ نانولوله کربن را از لحاظ اثرات اندازه مورد بررسی قرار داد. بدین منظور رابطه ارائه شده در معادله (۱۷) برای مدول یانگ برحسب طول نانولوله کربن و به ازای مقادیر مختلف پارامتر طول مشخصه رسم می‌گردد. بدینوسیله اولاً میزان وابستگی به طول معین می‌شود و ثانیاً پارامتر طول مشخصه براساس انطباق با نتایج آزمایشگاهی به دست می‌آید. مدول یانگ نانولوله کربن بر حسب طول به ازای مقادیر مختلف پارامتر طول مشخصه و همچنین براساس نتایج آزمایشگاهی در شکل ۴ رسم شده است.



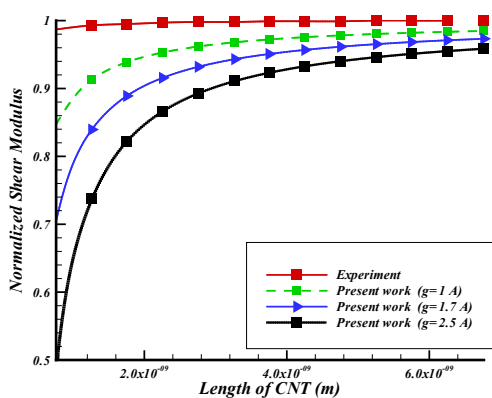
شکل ۴: مدول یانگ نانولوله کربن وابسته به طول بر اساس مدل میله تحت کشش (توسعه یافته در تحقیق حاضر) در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی

نتایج حکایت از آن دارد که قطر نانولوله کربن تأثیر کمی روی مدول یانگ آن خواهد داشت. این نتیجه با نتایج مرجع [۱۴] همخوانی خوبی دارد چرا که طبق مطالعات این محققین نیز تأثیر قطر نانولوله روی مدول یانگ بسیار کم است.

۳-۲- مدول برشی وابسته به اندازه نانولوله

در بخش قبل همانگونه که مشاهده شد مدل تیر تحت خمش از انطباق خوبی با نتایج اتمی برخوردار است و تقریباً تمامی پارامترهای هندسی مؤثر بر مدول یانگ را دربرمی گیرد. در این بخش، مدل میله تحت پیچش مورد استفاده قرار می گیرد و با استفاده از آن وابستگی به اندازه مدول برشی نانولوله کربنی مورد ارزیابی قرار می گیرد.

از آنجایی که رفتار نانولوله بصورت ایزوتروپیک فرض می گردد بنابراین باید دو خاصیت مادی مستقل را برای آن تعیین نمود. در قسمت های قبل، روی مدول یانگ بررسی صورت گرفت و مشاهده شد که مدل تیر تحت خمش از انطباق خوبی با نتایج آزمایشگاهی برخوردار است. در این بخش برای بررسی وابستگی به اندازه مدول برشی، باید مدول برشی را بر حسب طول و براساس رابطه (۳۳) رسم نمود. ابتدا تأثیر پارامتر طول مشخصه بر رفتار پیچشی نانولوله مورد بررسی قرار می گیرد. در شکل ۸ مدول برشی بر حسب طول و به ازای مقادیر مختلف از پارامتر طول مشخصه رسم شده است.

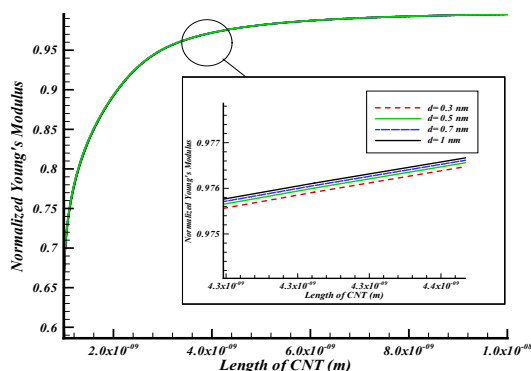


شکل ۸: مدول برشی نانولوله کربن بر حسب طول و به ازای مقادیر مختلف پارامتر طول مشخصه، بر اساس مدل میله تحت پیچش (توسعه یافته در تحقیق حاضر)

همانگونه که ملاحظه می گردد، انطباق مناسبی میان نتایج آزمایشگاهی و نتایج تئوری حاضر دیده نمی شود. براساس نتایج آزمایشگاهی تغییرات طول اثر چشمگیری روی مدول برشی ندارد در حالی که نتایج تئوری حاضر حکایت از وابستگی به طول در مورد مدول برشی دارد. همچنین بررسی تأثیرات طول به ازای قطرهای مختلف در شکل ۹ نشان داده شده است.

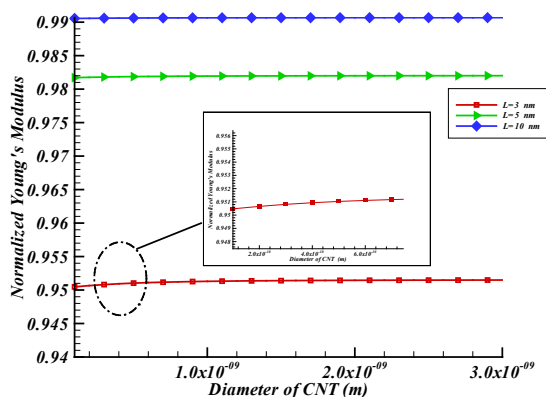
این نتایج مجدداً حکایت از آن دارد که تأثیر قطر به ازای تغییرات طول روی مدول برشی چندان چشمگیر نیست. تأثیر تغییرات قطر روی مدول برشی نانولوله کربن به ازای مقادیر ثابتی از طول نیز در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

به اندازه به طرز چشمگیر دیده نمی شود. از سوی دیگر در تخمین پارامتر طول مشخصه دیده می شود که وقتی این پارامتر در حدود ۱/۷ آنگستروم تخمین زده می شود از انطباق مناسبی با نتایج آزمایشگاهی برخوردار خواهد بود. بنابراین مقدار این پارامتر از این پس در تمامی مطالعات آینده برابر با ۱/۷ آنگستروم در نظر گرفته می شود. این مقدار از پارامتر طول مشخصه انطباق مناسبی با پیش بینی سایر محققین [۱۳] (حدود ۲ آنگستروم) را نیز دارد. از سوی دیگر وابستگی به طول مدول یانگ در قطرهای مختلف نیز در شکل ۶ نشان داده شده است. مقدار پارامتر طول مشخصه نیز برابر با ۱/۷ آنگستروم در نظر گرفته می شود.



شکل ۶: مدول یانگ نانولوله کربن وابسته به طول در قطرهای مختلف از نانولوله بر اساس مدل تیر اوپلر- برنولی (با اصلاح شرایط مرزی در تحقیق حاضر)

همانگونه که مشاهده می شود میزان وابستگی به طول به صورت جزئی از قطر نانولوله متأثر است و تقریباً نتایج یکسانی به ازای قطرهای مختلف مشاهده می شود که این نتیجه با نتایج هوو^۷ و همکارانش (۲۰۰۵) همخوانی دارد [۱۴]. البته برای واضح تر شدن نقش قطر نانولوله روی مدول یانگ، به ازای یک طول ثابت و ضخامت ثابت در قطرهای مختلف، نمودار مدول یانگ در شکل ۷ رسم شده است.



شکل ۷: بررسی وابستگی مدول یانگ نانولوله کربن به قطر در طول و ضخامت ثابت بر اساس مدل تیر اوپلر- برنولی (با اصلاح شرایط مرزی در تحقیق حاضر)

⁷Hu

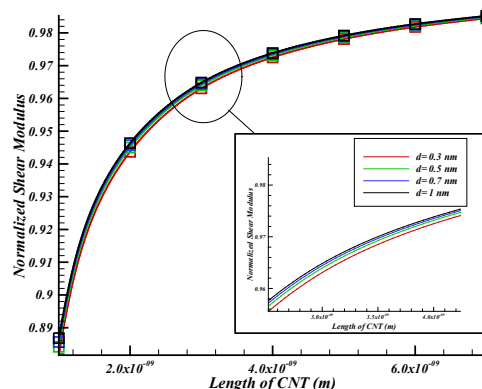
گردید. در تحقیق حاضر رابطه ساختاری برای حالت یک‌بعدی کاهش یافته و استخراج گردید.

سپس با استفاده از مدل‌های مذکور مدول یانگ و مدول برشی وابسته به اندازه نانولوله کربن به دست آمد. مقدار پارامتر طول مشخصه بر اساس انطباق با نتایج آزمایشگاهی تعیین گردید. مدل تیر از قابلیت مناسب‌تری در قیاس با مدل میله در بررسی مدول یانگ وابسته به اندازه برخوردار بود. از سوی دیگر مشاهده شد که تأثیر طول نانولوله کربن به مراتب از تأثیر قطر آن بیشتر است. همچنین در بررسی مدول برشی نانولوله کربن مشاهده گردید که بر خلاف نتایج آزمایشگاهی میزان وابستگی به اندازه شدیدتر است و انطباق مناسبی با نتایج آزمایشگاهی مشاهده نمی‌شود. منتهی اثرات طول و قطر روی مدول برشی مشابه اثرات آنها روی مدول یانگ خواهد بود.

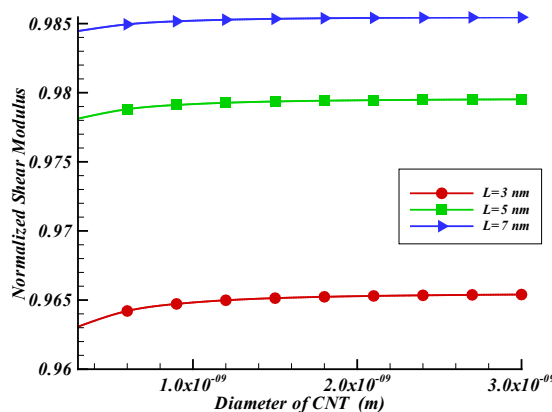
از آنجایی که تئوری گرادیان کرنشی مذکور در این پژوهش تنها دارای یک پارامتر جدید میکروساختاری است، بنابراین تخمین تنها مدول یانگ به خوبی صورت پذیرفت ولی مدول برشی از انطباق مناسبی با نتایج آزمایشگاهی برخوردار نبود. بنابراین انتظار آن می‌رود که بتوان با استفاده از تئوری گرادیان کرنشی چندپارامتری این نقیصه را برطرف نمود. برای رفع این نقیصه به تحقیقات بیشتر نیازمند است.

۵- مراجع

- [1] Iijima S., "Helical microtubules of graphitic carbon", Nature, Vol 354, pp. 56- 58, 1991.
- [2] Lau K. T., "Interfacial bonding characteristics of nanotube/polymer composites", Chem. Phys. Lett., Vol 370, pp. 399- 405, 2003.
- [3] Morales R. L. F., Toxvaerd, S., "Computer Simulation of a Phase Transition at Constant Temperature and Pressure", Physical Review A, Vol 34, pp. 1495- 1498, 1986.
- [4] Mindlin R. D., "Micro-structure in linear elasticity", Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol 16, pp. 51- 78, 1964.
- [5] Kröner E., "On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics", International Journal of Engineering Science, Vol 1, pp. 261- 278, 1963.
- [6] Mindlin, R. D., Eshel, N. N., "On First Strain-Gradient theories in Linear Elasticity", International Journal of Solids and Structures, Vol 4, pp. 109- 124, 1968.
- [7] Askes, H., Aifantis E. C., "Gradient elasticity and flexural wave dispersion in carbon nanotubes", Physical Review B, Vol 80, pp. 195412- 195418, 2009.
- [8] Wang L., "Wave propagation of fluid-conveying single-walled carbon nanotubes", Computational Materials Science, Vol 49, pp. 761- 766, 2010.



شکل ۹: بررسی تغییرات طول روی مدول برشی نانولوله کربن به ازای مقادیر مختلفی از قطر، بر اساس مدل میله تحت پیچش (توسعه یافته در تحقیق حاضر)



شکل ۱۰: بررسی تغییرات قطر روی مدول برشی به ازای مقادیر ثابت طول، بر اساس مدل میله تحت پیچش (توسعه یافته در تحقیق حاضر)

مقایسه این نتایج با نتایج محققین دیگر بر این امر دلالت دارد که تغییرات قطر تا اندازه کمی بر روی مدول برشی اثر می‌گذارد. البته میزان تأثیرات آن به مراتب نسبت به مدول یانگ بیشتر است.

۴- نتیجه‌گیری

وجود اثرات اندازه در ابعاد نانو و تأثیر آن بر رفتار و خواص مکانیکی نانوساختارها بیانگر اهمیت بررسی پدیده مذکور در تبیین رفتار مکانیکی این دسته از مواد است. به ویژه تأثیر این پدیده بر خواص موادی نظیر نانوکامپوزیت‌ها می‌تواند قابل توجه باشد و سهمی از اختلاف نتایج آزمایشگاهی و تئوری را به خود اختصاص دهد. در این تحقیق تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی، به عنوان تئوری که قابلیت بررسی چنین پدیده‌ای را دارد، مورد مطالعه قرار گرفته است. روابط حاکم و شرایط مرزی در این تئوری برای مدل‌های میله تحت کشش، تیر اویلر- برنولی و میله تحت پیچش با استفاده از روش انرژی و حساب تغییرات استخراج

- [13] Sundararaghavan V., and Waas A., "Non-local continuum modeling of carbon nanotubes: Physical interpretation of non-local kernels using atomistic simulations", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol 59, No. 6, pp. 1191- 1203, 2011.
- [14] Hu N., Fukunaga H., Lu C., Kameyama M., Yan B., and A P. R. S., "Prediction of elastic properties of carbon nanotube reinforced composites Prediction of elastic properties of carbon nanotube reinforced composites", *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, pp. 1685- 1710, 2005.
- [15] K.A. Lazopoulos, A.K. Lazopoulos, "Bending and buckling of thin strain gradient elastic beams", *European Journal of Mechanics - A/Solids* Vol 29, No. 5, pp. 837- 843, 2010.
- [9] Wang B. L., Hoffman M.; Yu A. B., "Mechanics of Materials Buckling analysis of embedded nanotubes using gradient continuum theory", *Mechanics of Materials*, Vol 45, pp. 52- 60, 2012.
- [10] Ansari R., Gholami R., Rouhi H., "Various gradient elasticity theories in predicting vibrational response of single-walled carbon nanotubes with arbitrary boundary conditions", *Journal of Vibration and Control* Vol 19, No.5, pp. 708- 719, 2012.
- [11] Aifantis E. C., "On the role of gradients in the localization of deformation and fracture" *International Journal of Engineering Science*, Vol 30, pp. 1279- 1299, 1992.
- [12] Muhlhaus H. B., Oka F., "Dispersion and wave propagation in discrete and continuous models for granular materials", *International Journal of Solids and Structures*, Vol 33, No. 19, pp. 2841- 2858, 1996.