



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دوره ۴۸، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۵، صفحه ۱۲۵ تا ۱۳۶

Vol. 48, No. 2, Summer 2016, pp. 125-136



نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر - مهندسی مکانیک

AmirKabir Journal of Science & Research
Mechanical Engineering
ASJR-ME

تحلیل اثر میرایی ترموالاستیک بر ارتعاشات خمشی میکرو - نانو تشدیدگرها

مینا موسی پور^۱، محمدعلی حاج عباسی^{۲*}

۱- دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه گیلان
۲- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

(دریافت: ۱۳۹۱/۷/۷ پذیرش: ۱۳۹۵/۳/۱۵)

چکیده

به منظور طراحی سیستم‌های میکرو-نانوالکترومکانیکی، آگاهی از اثرات میرایی ترموالاستیک بر روی ویژگی‌های ارتعاشی مثل فرکانس تشدید و حساسیت فرکانسی امری ضروری است. در این مقاله اثر میرایی ترموالاستیک بر ارتعاشات میکرو - نانو تشدیدگرهای با سطح مقطع مستطیلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادلات حاکم بر رفتار سیستم شامل معادله انتقال حرارت هدایتی و معادلات حرکت ارتعاشی که به یکدیگر کوپل هستند، برای حالت سه‌بعدی استنتاج شده‌اند. در حل معادلات حاکم، با اتکا به روش‌های تحلیلی و در نظر گرفتن فرضیات مناسب ابتدا معادله انتقال حرارت برای توزیع دمای سه‌بعدی در راستای ضخامت، عرض و طول میکروتیر حل می‌شود، سپس معادله حرکت ارتعاشی با لحاظ کردن کوپلینگ ترموالاستیک از طریق یک گشتاور وابسته به توزیع دما برای مطالعه مود خمشی حل می‌شود. انتقال فرکانس و فاکتور کیفیت تحت اثرات میرایی ترموالاستیک مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند. انتقال فرکانس به دست‌آمده در حالت‌های خاص با انتقال فرکانس حاصل از توزیع دمای دوبعدی مقایسه شده است، همچنین فاکتور کیفیت به دست آمده نیز با مدل‌های تحلیلی توزیع دمای یک‌بعدی مقایسه شده است. نتایج به دست‌آمده، نشان می‌دهد که مدل مطرح شده در این مقاله انطباق خوبی با سایر مدل‌ها دارد و اثر میرایی ترموالاستیک را بر رفتار میکرو - نانو تشدیدگرها به صورت دقیق‌تری پیش‌بینی می‌کند.

کلمات کلیدی:

میرایی ترموالاستیک، میکرو - نانو تشدیدگر، فاکتور کیفیت، انتقال فرکانس.

۱- مقدمه

تشدیدگرهای مکانیکی در ابعاد میکرو و نانو به این دلیل که حساسیت خیلی بالایی دارند، بسیار سریع پاسخ می‌دهند، بنابراین به صورت گسترده‌ای به عنوان حسگرها و مدولاتورها مورد استفاده قرار می‌گیرند. تخمین مشخصه‌های میرایی در بهبود سیستم‌های مکانیکی، یکی از ضروری‌ترین و مهم‌ترین گام‌ها در فرآیند طراحی است. زیرا این مشخصه‌ها، به‌ویژه در مورد میکرو-نانوسیستم‌ها، عملکرد دینامیکی سیستم را تعیین می‌کنند. باور بر این است که میرایی ترموالاستیک مهم‌ترین مکانیزم اتلافی ذاتی در میکرو - نانوتشدیدگرهای مکانیکی است.

هنگامی که یک جامد الاستیک شروع به حرکت می‌کند و از حالت تعادل خارج می‌شود، در انرژی جنبشی و پتانسیل تغییراتی به وجود می‌آید. چنانچه جامد الاستیک خطی، کامل و ایزوترمال باشد، تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل و تبدیل آنها به یکدیگر اجتناب‌ناپذیر است و همین امر اسباب اتلاف انرژی مکانیکی را به وجود می‌آورد. به عبارتی در مواد جامد ترموالاستیک، کوپل شدن میدان کرنش با میدان دما به یک مکانیزم اتلاف انرژی منتهی می‌شود که نتیجه برگشت به حالت تعادل و آسایش سیستم است. آسایش جامد ترموالاستیک از طریق کوپلینگ جریان گرمای برگشت‌ناپذیر (که به وسیله گردایان دمای موضعی به وجود آمده است) با میدان کرنش انجام می‌شود. این فرآیند اتلاف انرژی که اساساً منحصربفرد است میرایی ترموالاستیک نامیده می‌شود.

وجود میرایی ترموالاستیک برای اولین بار در سال ۱۹۳۷ توسط زرن پیش‌بینی شد [۱ و ۲]. سپس خود او مفاهیم اساسی این تئوری را به صورت آزمایشگاهی نشان داد [۳]. مجدداً آزمایش‌های شامل تئوری زرن در سال ۱۹۵۵ به وسیله بری برای فاز آلفای فلز برنج^۱ انجام شدند. بری میرایی را به عنوان تابعی از فرکانس در دمای معمولی مورد بررسی قرار داد [۴]. رزهارت در سال ۱۹۹۰ پدیده میرایی ترموالاستیک را در میکرو - تشدیدگرهای سیلیکونی تک کریستالی در دمای معمولی مشاهده کرد [۵]. همچنین یاسومورا و همکاران، در سال ۲۰۰۰ گزارش‌هایی راجع به این پدیده برای میکرو - تشدیدگرهای با جنس نیتريد سیلیکون در دمای معمولی ارائه دادند، اما نتایج اندازه‌گیری شده آنها کمتر از مقداری بود که رزهارت گزارش کرده بود [۶]. لیفشیتز و راکس در سال ۲۰۰۰ رابطه‌ای تحلیلی برای فاکتور میرایی ترموالاستیک تیر با سطح مقطع مستطیلی به دست آوردند. آنها دریافتند که بعد از پیک دمای^۲، میرایی ترموالاستیک با افزایش اندازه، ضعیف می‌شود [۷]. زرن با توجه به این فرض که سرعت انتقال حرارت در تیر بی‌نهایت است، از تئوری کلاسیک ترموالاستیک استفاده کرد. در حالی که سان و همکاران، در سال ۲۰۰۶ برای به دست آوردن حل دقیق معادلات کوپلینگ ترموالاستیک و برای اصلاح تئوری زرن، از تئوری ترموالاستیک عمومی با یک زمان آسایش^۳ استفاده کردند.

آنها اثر اندازه تیر و شرایط مرزی مکانیکی و حرارتی مختلفی را در دو انتهای تیر در نظر گرفتند. همچنین آنها با مقایسه اثر میرایی ناشی از هوا و اثر میرایی ترموالاستیک، برای تشدیدگر از نوع میکروتیر^۴ دریافتند که در دمای معمولی، اثر میرایی ترموالاستیک برای این تشدیدگرها بزرگتر از اثر میرایی ناشی از هوا است [۸]. وانگ و همکاران، در سال ۲۰۰۶، میرایی ترموالاستیک را در ارتعاشات درون‌صفحه‌ای^۵ رینگ‌های سیلیکونی با سطح مقطع مستطیلی، مورد بررسی قرار دادند. آنها فاکتور میرایی ترموالاستیک به دست‌آمده به وسیله زرن و لیفشیتز و راکس را تعمیم دادند تا ارتعاشات خمشی درون-صفحه‌ای رینگ‌های نازک را نیز در بر بگیرد. رابطه تحلیلی که به وسیله وانگ و همکاران برای فاکتور میرایی ترموالاستیک به دست آمد، به‌جز در مقدار طول مشخصه، که بر طبق شکل تشدیدگرها تغییر می‌کند، همان رابطه تحلیلی‌ای بود که به وسیله لیفشیتز و راکس، برای تیرها بدست آمده بود [۹]. اخیراً اثر میرایی ترموالاستیک با قیدهای کمتری بررسی شده است. مثلاً علاوه بر ارتعاشات خمشی تیر، اثر کشش نیز بر میرایی ترموالاستیک در نظر گرفته شده است [۱۰]. همچنین اثر میرایی ترموالاستیک در هندسه‌های پیچیده‌تری که به عنوان تشدیدگر در سیستم‌های میکرو - نانو الکترومکانیکی^۶، کارایی زیادی دارند نیز مورد بررسی قرار گرفته است [۱۱ و ۱۲]. از آن جمله می‌توان به ورق‌های مستطیلی و دایروی، پوسته‌های سیلندری و رینگ‌ها اشاره کرد. همچنین اثر میرایی ترموالاستیک بر انتقال فرکانس در ارتعاشات خمشی یک تیر، با در نظر گرفتن توزیع دمای دوبعدی در شرایط مرزی مختلف نیز در سال ۲۰۰۹ بوسیله پرابه‌کار و همکاران بررسی شده است [۱۳].

اگرچه بیشتر مطالعات در مورد میرایی ترموالاستیک به صورت تحلیلی انجام شده است اما این تحلیل‌ها بر مبنای فرض‌های بسیار محدودکننده‌ای استوار است و به اندازه کافی رفتار یک مدل سه‌بعدی را به صورت دقیقی پیش‌بینی نمی‌کند. بنابراین در این مقاله سعی بر این است که با مدل‌سازی دقیق‌تر این مکانیزم اتلافی، تأثیر پارامترهای مختلف بر فاکتور کیفیت و همچنین اثرات کوپلینگ ترموالاستیک بر روی فرکانس طبیعی تشدیدگرهای مکانیکی در ابعاد میکرو و نانو مورد بررسی قرار بگیرد. برای مدل‌سازی دقیق‌تر، در ابتدا معادله کوپلینگ انتقال حرارت برای توزیع دمای سه‌بعدی در راستای ضخامت، عرض و طول میکروتیر حل می‌شود. سپس معادله حرکت ارتعاشی با لحاظ کردن کوپلینگ ترموالاستیک از طریق یک گشتاور وابسته به توزیع دما برای مطالعه مود خمشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت انتقال فرکانس تحت اثرات میرایی ترموالاستیک و اثر پارامترهای مختلف بر فاکتور کیفیت مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند.

4 Micro-beam resonators

5 In-plane

6 MEMS and NEMS

1 α -Brass

2 Debye peak

3 Relaxation time

۲- معادلات حاکم

۱ ۲ ارتعاشات کوپلینگ ترموالاستیک تیر نازک

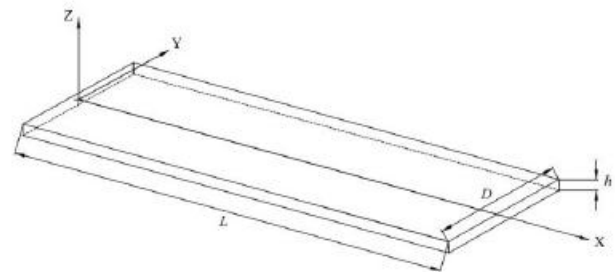
میکروتیری که در میکروسکوپ نیروی اتمی (AFM) مورد استفاده قرار می‌گیرد، مثالی از یک میکرو-تشدیدگری است که فاکتور کیفیت و مشخصه‌های ارتعاشی آن تحت تأثیر میرایی ترموالاستیک است. شکل ۱ دیاگرام این میکروتیر نازک با سطح مقطع مستطیلی به عرض D ضخامت h و طول L را نشان می‌دهد. برای به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت ارتعاشی این میکروتیر در حالت کوپلینگ ترموالاستیک، در ابتدا میدان جابجایی در این تیر به صورت کلی $u(x,y,z,t)$ در جابجایی در راستای محور X ، $v(x,y,z,t)$ جابجایی در راستای محور Y ، $w(x,y,z,t)$ جابجایی در راستای محور Z و زاویه پیچش حول محور X تعریف می‌شود. در حالی که $T(x,y,z,t)$ میدان توزیع دما در این تیر است.

رابطه بین مؤلفه‌های جابجایی به صورت رابطه (۱) خواهد بود.

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,t) - y \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (الف-۱)$$

$$v(x,y,z,t) = v_0(x,t) - z\varphi(x,t) \quad (ب-۱)$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,t) + y\varphi(x,t) \quad (پ-۱)$$



شکل ۱: دیاگرام یک میکروتیر نازک

در صورتی که u_0 ، v_0 و w_0 مؤلفه‌های جابجایی محور مرکزی تیر هستند. میدان کرنش که علاوه بر کرنش‌های مکانیکی، شامل کرنش‌های حرارتی نیز می‌باشد، به صورت رابطه (۲) قابل بیان خواهد بود.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \alpha(T - T_0) \quad (الف-۲)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha(T - T_0) \quad (ب-۲)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \alpha(T - T_0) \quad (پ-۲)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (ت-۲)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (ث-۲)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (ج-۲)$$

به طوری که $T(x,y,z,t)$ توزیع دمای تیر، T_0 دمای ثابت اولیه تیر در حالت بدون تنش و α فاکتور انبساط حرارتی ماده است. بنابراین مجموع کرنش‌های نرمال به صورت رابطه (۳) بیان می‌شود.

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 3\alpha(T - T_0) \quad (۳)$$

معادلات ساختاری مشخص‌کننده رابطه بین مؤلفه‌های تنش و کرنش است. با توجه به شکل میکروتیر مورد استفاده در این تحلیل (نسبت پهنای تیر به ضخامت تیر نسبتاً بزرگ است)، رابطه بین تنش و کرنش به صورت تنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. بنابراین

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_x + \nu\epsilon_y - (1+\nu)\alpha(T - T_0)] \quad (الف-۴)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - (1+\nu)\alpha(T - T_0) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_y + \nu\epsilon_x - (1+\nu)\alpha(T - T_0)] \quad (ب-۴)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\nu \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - (1+\nu)\alpha(T - T_0) \right]$$

$$\sigma_z \approx 0 \quad (پ-۴)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -Gz \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (ت-۴)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = Gy \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (ث-۴)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0 \quad (ج-۴)$$

در روابط بالا E مدول یانگ، ν نسبت پواسون و G مدول الاستیسیته برشی است. بعد از محاسبه مؤلفه‌های تنش، برای به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت تیر، با استفاده از قانون دوم نیوتن، معادلات دیفرانسیلی حرکت برای ارتعاشات خمشی حول محورها Y و Z و پیچش حول محور X و ارتعاشات طولی در راستای محور X به صورت رابطه (۵) به دست می‌آیند.

$$\rho I_y \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (الف-۵)$$

$$\rho I_z \frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 M_z}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} = 0 \quad (ب-۵)$$

$$M_{Tz} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-D/2}^{D/2} y \alpha (T - T_0) dy dz \quad (\text{پ-۸})$$

با مشتق‌گیری از روابط (الف) و (ت) نسبت به x و دوبار مشتق‌گیری از روابط (ب) و (پ) نسبت به x و جایگذاری در معادلات (۵)، معادلات دیفرانسیلی حرکت با در نظر گرفتن ترم‌های کوپلینگ ترموالاستیک به‌آسانی به دست خواهند آمد.

$$\rho I_y \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{EI_y}{1-\nu^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2 M_{Ty}}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{الف-۹})$$

$$\rho I_z \frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{EI_z}{1-\nu^2} \frac{\partial^4 v_0}{\partial x^4} - \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial^2 M_{Tz}}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{ب-۹})$$

$$\frac{EA}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{E}{1-\nu} \frac{\partial N_T}{\partial x} - \rho A \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{پ-۹})$$

$$qG(I_y + I_z) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho I_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{ت-۹})$$

فاکتور تصحیح تنش برشی q برای سطح مقطع مستطیلی، به‌صورت رابطه (۱۰) قابل تعریف خواهد بود.

$$q = \frac{J}{I_x} \quad (10)$$

بنابراین معادله (۹-ت)، با جایگذاری $I_x = I_y + I_z$ به‌فرم رابطه (۱۱) ساده می‌شود.

$$GJ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho I_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

پارامترهایی که در معادلات (۹)، (۱۰) و (۱۱) آمده‌اند به‌صورت مقابل می‌باشند. ρ چگالی جرمی، A سطح مقطع، J فاکتور پیچش، I_y گشتاور اینرسی سطح مقطع حول محور Y ، I_z گشتاور اینرسی سطح مقطع حول محور Z و I_x گشتاور اینرسی قطبی سطح مقطع است. برای این میکروتیر با سطح مقطع مستطیلی و $A = Dh$ ، $I_z = hD^3/12$ ، $I_y = Dh^3/12$ ، $I_x = (1/12)(Dh^3 + hD^3)$ و $J \approx (1/3)Dh^3(1 - 0.63(h/D) + 0.052(h/D)^2)$ است.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho A \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{پ-۵})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \rho I_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{ت-۵})$$

به طوری که N_x برآیند نیروی ناشی از تنش نرمال و M_x ، M_y و M_z برآیند گشتاورهای ناشی از تنش نرمال و نیروهای برشی هستند که به‌صورت رابطه (۶) تعریف می‌شوند.

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-D/2}^{D/2} \sigma_x dy dz \quad (\text{الف-۶})$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-D/2}^{D/2} q(-z\tau_{xy} + y\tau_{xz}) dy dz \quad (\text{ب-۶})$$

$$M_y = -\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-D/2}^{D/2} z\sigma_x dy dz \quad (\text{پ-۶})$$

$$M_z = -\int_{-h/2}^{h/2} \int_{-D/2}^{D/2} y\sigma_x dy dz \quad (\text{ت-۶})$$

با جایگذاری معادلات (۴) در روابط (۶) برآیند نیروی ناشی از تنش نرمال و برآیند گشتاورهای ناشی از تنش نرمال و نیروهای برشی به‌صورت رابطه (۷) بدست می‌آیند.

$$N_x = \frac{E}{1-\nu^2} h D u_{0,x} - \frac{E}{1-\nu} N_T \quad (\text{الف-۷})$$

$$M_y = \frac{E}{1-\nu^2} I_y w_{0,xx} + \frac{E}{1-\nu} M_{Ty} \quad (\text{ب-۷})$$

$$M_z = \frac{E}{1-\nu^2} I_z v_{0,xx} + \frac{E}{1-\nu} M_{Tz} \quad (\text{پ-۷})$$

$$M_x = Gq(I_y + I_z)\phi_{,x} \quad (\text{ت-۷})$$

به طوری که q مربوط به فاکتور تصحیح تنش برشی برای سطح مقطع مستطیلی است که در ادامه تعریف خواهد شد. نیروها و گشتاورهای حرارتی N_T ، M_{Ty} و M_{Tz} در معادلات (۷) به صورت معادلات (۸) بیان می‌شوند.

$$N_T = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-D/2}^{D/2} \alpha (T - T_0) dy dz \quad (\text{الف-۸})$$

$$M_{Ty} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-D/2}^{D/2} z \alpha (T - T_0) dy dz \quad (\text{ب-۸})$$

۲۲ تحلیل کوپلینگ ترموالاستیک

۱۲۲ معادله توزیع دمای سه بعدی

معادله دیفرانسیلی انتقال حرارت سه بعدی که شامل ترم‌های کوپلینگ ترموالاستیک است، به صورت رابطه (۱۲) خواهد بود [۱۴].

$$k\nabla^2 T = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (12)$$

در معادله (۱۲) c_p گرمای ویژه در حجم ثابت و e همان مجموع کرنش‌های نرمال است که در معادله (۳) آمده است. از طرفی با استفاده از قانون عمومی هوک رابطه بین تنش‌ها و کرنش‌ها به صورت رابطه (۱۳) است [۱۵].

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha(T - T_0) \quad (13-f)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha(T - T_0) \quad (13-b)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \alpha(T - T_0) \quad (13-p)$$

با حل معادلات (۱۳-الف) و (۱۳-ب)، ε_z بر حسب ε_x و ε_y به صورت بیان شده در رابطه (۱۴) به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{1-\nu}[-\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + (1+\nu)\alpha(T - T_0)] \quad (14)$$

با جایگذاری معادلات (۲-الف)، (۲-ب) و (۱۴) در معادله (۳) و سرانجام جایگذاری آن در معادله (۱۲) روابطی به فرم (۱۵) و (۱۶) به دست خواهد آمد.

$$e = \frac{1}{1-\nu} \left[(1-2\nu) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \alpha(1+\nu)(T - T_0) \right] \quad (15)$$

$$k\nabla^2 T = \left(\rho c_p + \frac{E\alpha^2 T_0(1+\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (16)$$

با توجه به اینکه در اکثر مواد $\rho\alpha \gg \frac{E\alpha^2 T_0(1+\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)}$ (مثلاً در مورد

یک میکروصفحه سیلیکونی با دمای $T_0 = 300 K$ ، $\frac{E\alpha^2 T_0(1+\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)} = 1443.7$

و $\rho c_p = 1.6 \times 10^6$ [۱۶]) است، پس می‌توان معادله (۱۶) را به فرم رابطه (۱۷) ساده کرد.

$$k\nabla^2 T = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (17)$$

به طوری که k فاکتور رسانش گرمایی است. با جایگذاری

$\theta(x,y,z,t) = T(x,y,z,t) - T_0$ در معادله (۱۷)، معادله (۱۸) به دست خواهد آمد.

$$k\nabla^2 \theta = \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left(-y \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (18)$$

با توجه به این واقعیت که در تیر یکسرگردار سفتی خمشی حول محور Z و پیچش حول محور X دو برابر سفتی خمشی حول محور Y و سفتی کششی چهار تا پنج برابر بزرگتر از سفتی خمشی حول محور Y است، در این تحلیل از جابجایی در راستای محور X صرف‌نظر شده است [۱۷]. بنابراین معادله دیفرانسیلی انتقال حرارت سه بعدی که دربرگیرنده ترم‌های کوپلینگ ترموالاستیک است به فرم رابطه (۱۹) ساده می‌شود.

$$k\nabla^2 \theta = \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial t} \left(-y \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (19)$$

۲۲۲ حل معادله توزیع دمای سه بعدی

در ارتعاشات هارمونیک، توزیع دما و جابجایی‌ها را می‌توان به صورت معادلات (۲۰) در حالت هارمونیک در نظر گرفت.

$$\theta(x, y, z, t) = \Theta(x, y, z) e^{i\omega_n t} \quad (20-f)$$

$$v_0(x, t) = V_0(x) e^{i\omega_n t} \quad (20-b)$$

$$w_0(x, t) = W_0(x) e^{i\omega_n t} \quad (20-p)$$

با جایگذاری معادلات (۲۰) در معادله (۱۹)

$$k\nabla^2 \Theta e^{i\omega_n t} = \rho c_p i\omega_n e^{i\omega_n t} + \frac{E\alpha T_0}{1-\nu} i\omega_n \left(-y \frac{d^2 V_0}{dx^2} - z \frac{d^2 W_0}{dx^2} \right) e^{i\omega_n t} \quad (21)$$

دامنه میدان توزیع دما Θ در حالت کلی به صورت مختلط خواهد بود و نشان‌دهنده این واقعیت است که توزیع دما با تنش‌های اعمالی بر جسم هم‌فاز نیستند. بنابراین

$$\Theta(x, y, z) = \Theta^R(x, y, z) + i\Theta^I(x, y, z) \quad (22)$$

به طوری که Θ^R و Θ^I به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی میدان توزیع دمای درون تیر هستند. با توجه به اینکه در یک تشدیدگر که در فرکانس‌های بالا در حال ارتعاش است، زمان کافی برای انتقال حرارت بین سطوح تشدیدگر با هوا وجود ندارد. بنابراین شرایط مرزی حرارتی در آن به فرم زیر خواهند بود:

$$-\text{هیچ انتقال حرارتی از سطوح بالا و پایین وجود ندارد یعنی} \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=\pm(l/2)} = 0$$

در صورتی که α_m ، β_p و γ_q در شرایط مرزی مختلف به صورت رابطه (۲۵) بیان می‌شوند.

$$\alpha_m = \begin{cases} \frac{2m-1}{2} \frac{\pi}{L}, & m=1,2,\dots \text{ تیر یک سرگیردار - یک سر تکیه‌گاه ساده} \\ \frac{m\pi}{L}, & m=1,2,\dots \text{ تیر دوسرگیردار} \end{cases}$$

$$\beta_p = \frac{p\pi}{D}, \quad p=0,1,2,\dots$$

$$\gamma_q = \frac{q\pi}{h}, \quad q=0,1,2,\dots \quad (۲۵)$$

بنابراین با تعریف پارامترهای بیان شده در روابط (۲۴) و (۲۵) معادله توزیع دمای سه‌بعدی در این میکروتیر به صورت کامل در معادله (۲۳) آمده است. گشتاورهای حرارتی ناشی از گرادیان دما M_{Tz} و M_{Ty} را می‌توان با جایگزینی برای مقدار θ از رابطه (۲۳) در معادلات (۸) به دست آورد. سرانجام با جایگزین کردن M_{Tz} و M_{Ty} در رابطه (۹) می‌توان معادلات حرکت این تیر را با در نظر گرفتن توزیع دمای سه‌بعدی به دست آورد. در این تحلیل برای ساده‌سازی معادلات حرکت (با توجه به آنچه که در بخش قبل گفته شد) از جابجایی در راستای محور X صرف‌نظر می‌کنیم بنابراین

$$\rho I_y \frac{\partial^4 w_0}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{EI_y}{1-\nu^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{8E^2 \alpha^2 T_0}{(1-\nu)^2 \rho c_p} \frac{1}{DLh} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (R_{mpq} + iI_{mpq}) e^{i\omega t} - \rho A \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (۲۶)$$

$$\rho I_z \frac{\partial^4 v_0}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{EI_z}{1-\nu^2} \frac{\partial^4 v_0}{\partial x^4} + \frac{8E^2 \alpha^2 T_0}{(1-\nu)^2 \rho c_p} \frac{1}{DLh} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (P_{mpq} + iQ_{mpq}) e^{i\omega t} - \rho A \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} = 0 \quad (۲۷)$$

$$GJ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho I_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (۲۸)$$

در صورتی که Q_{mpq} و P_{mpq} ، I_{mpq} ، R_{mpq} به صورت روابط (۲۹) خواهند بود.

$$R_{mpq} = \frac{\alpha_m^2 \omega_n^2}{\omega_n^2 + \frac{k^2}{\rho^2 c_v^2} (\alpha_m^2 + \beta_p^2 + \gamma_q^2)} \lambda \chi^2 \sin(\alpha_m x) \quad (\text{الف} - ۲۹)$$

هیچ انتقال حرارتی در سطوح جانبی رخ نمی‌دهد یعنی $(\partial\theta/\partial y)|_{y=\pm(D/2)}=0$

برای تیر یک‌سرگیردار در انتهای ثابت، تیر در تماس حرارتی کامل با تکیه‌گاه که دمای آن T_0 است، می‌باشد یعنی $\theta|_{x=0}=0$ و در انتهای آزاد و انتهای تکیه‌گاه ساده تیر باز هم شرایط آدیاباتیک حکمفرماست یعنی $(\partial\theta/\partial x)|_{x=L}=0$

با استفاده از این شرایط مرزی حرارتی، تغییر دما به دلیل اثرات کوپلینگ ترموالاستیک، می‌تواند به فرم سری‌های فوری به صورت زیر بیان شود.

$$\Theta(x,y,z) = \frac{8E\alpha T_0}{(1-\nu)\rho c_v} \frac{1}{DLh} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ (\Gamma_{mpq} + i\Lambda_{mpq}) ((\zeta\eta + \lambda\xi) \sin(\beta_p y) \cos(\gamma_q z) + (\xi\delta + \lambda\chi) \cos(\beta_p y) \sin(\gamma_q z)) \right\} \sin(\alpha_m x) \quad (۲۳)$$

در حالی که پارامترهای بیان شده در دامنه توزیع دمای سه‌بعدی به صورت روابط (۲۴) هستند.

$$\Gamma_{mpq} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \frac{k^2}{\rho^2 c_v^2} (\alpha_m^2 + \beta_p^2 + \gamma_q^2)} \quad (\text{الف} - ۲۴)$$

$$\Lambda_{mpq} = \frac{\omega_n \frac{k}{\rho c_v} (\alpha_m^2 + \beta_p^2 + \gamma_q^2)}{\omega_n^2 + \frac{k^2}{\rho^2 c_v^2} (\alpha_m^2 + \beta_p^2 + \gamma_q^2)} \quad (\text{ب} - ۲۴)$$

$$\zeta = \int_0^L \frac{d^2 V_0}{dx^2} \sin(\alpha_m x) dx \quad (\text{پ} - ۲۴)$$

$$\lambda = \int_0^L \frac{d^2 W_0}{dx^2} \sin(\alpha_m x) dx \quad (\text{ت} - ۲۴)$$

$$\eta = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} y \sin(\beta_p y) \cos(\gamma_q z) dy dz \quad (\text{ث} - ۲۴)$$

$$\xi = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} z \sin(\beta_p y) \cos(\gamma_q z) dy dz \quad (\text{ج} - ۲۴)$$

$$\delta = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} y \cos(\beta_p y) \sin(\gamma_q z) dy dz \quad (\text{د} - ۲۴)$$

$$\chi = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} z \cos(\beta_p y) \sin(\gamma_q z) dy dz \quad (\text{ه} - ۲۴)$$

توابع شکل $\phi_r(x)$ باید به گونه‌ای انتخاب شوند که شرایط مرزی مسئله را ارضا کنند. توابع شکل به کار رفته شده در این تحلیل مودشیپ‌های تیر بدون در نظر گرفتن ترم‌های کوپلینگ ترموالاستیک هستند که در حالت کلی به صورت رابطه (۳۲) بیان می‌شوند [۱۸].

$$\phi_r(x) = (\cosh(\gamma_r x) - \cos(\gamma_r x)) - \vartheta_r (\sinh(\gamma_r x) - \sin(\gamma_r x)) \quad (32)$$

در صورتی که ϑ_r و γ_r با توجه به شرایط مرزی مسئله تعیین می‌شوند که در شرایط مرزی مختلف به فرم زیر خواهند بود.

$$\vartheta_r = \frac{\sinh(\gamma_r L) - \sin(\gamma_r L)}{\cosh(\gamma_r L) + \cos(\gamma_r L)} \quad \text{تیر یک سر گیردار}$$

$$\vartheta_r = \frac{\cosh(\gamma_r L) + \cos(\gamma_r L)}{\sinh(\gamma_r L) - \sin(\gamma_r L)} \quad \text{تیر یک سر گیردار - یک سر تکیه‌گاه ساده}$$

$$\vartheta_r = \frac{\sinh(\gamma_r L) + \sin(\gamma_r L)}{\cosh(\gamma_r L) - \cos(\gamma_r L)} \quad \text{تیر دو سر گیردار}$$

و γ_r وابسته به شماره مودی است که تیر در آن ارتعاش می‌کند. تابع زمانی برای ارتعاشات خمشی هارمونیک با فرکانس رزونانس ω_r (انتقال فرکانس به دلیل کوپلینگ ترموالاستیک) به صورت رابطه (۳۳) خواهد بود.

$$q_r(t) = e^{i\omega_r t} \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (33)$$

باقیمانده (یعنی خطای معادله حرکت برای ارضای جواب تقریبی) معادله حرکت (۳۰) به فرم رابطه (۳۴) است.

$$R = \frac{EI_y}{1-\nu^2} \frac{\partial^4 w_{0N}}{\partial x^4} - \frac{8E^2 \alpha^2 T_0}{(1-\nu)^2 \rho c_v} - \frac{1}{DLh} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (R_{mpq} + iI_{mpq}) e^{i\omega_r t} + \rho A \frac{\partial^2 w_{0N}}{\partial t^2} = 0 \quad (34)$$

حل تقریبی که در (۳۱) بیان شده است باید به طور میانگین معادله حرکت را ارضا کند. چنان‌که میانگین باقیمانده وزن‌دار با در نظر گرفتن یک تابع شکل مناسب در بازه $0 \leq x \leq L$ به سمت صفر میل کند. در روش گالرکین توابع وزن و توابع شکل ϕ_j یکسان هستند.

$$\int_0^L \mathcal{R} \phi_j(x) dx = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (35)$$

برای محاسبه این انتگرال با تعریف $q_r(t)$ از رابطه (۳۳) و اعمال کردن این شرط که توابع شکل تیر (مود شیپ‌های تیر)، بدون در نظر گرفتن میرایی نسبت به هم معامندند N معادله گسسته شده حرکت به شکل زیر به دست می‌آیند.

$$I_{mpq} = \frac{\alpha_m^2 \omega_n \frac{k}{\rho c_v} (\alpha_m^2 + \beta_p^2 + \gamma_q^2)}{\omega_n^2 + \frac{k^2}{\rho^2 c_v^2} (\alpha_m^2 + \beta_p^2 + \gamma_q^2)^2} \lambda \chi^2 \sin(\alpha_m x) \quad (\text{ب} - 29)$$

$$P_{mpq} = \frac{\alpha_m^2 \omega_n^2}{\omega_n^2 + \frac{k^2}{\rho^2 c_v^2} (\alpha_m^2 + \beta_p^2 + \gamma_q^2)^2} \zeta \eta^2 \sin(\alpha_m x) \quad (\text{پ} - 29)$$

$$Q_{mpq} = \frac{\alpha_m^2 \omega_n \frac{k}{\rho c_v} (\alpha_m^2 + \beta_p^2 + \gamma_q^2)}{\omega_n^2 + \frac{k^2}{\rho^2 c_v^2} (\alpha_m^2 + \beta_p^2 + \gamma_q^2)^2} \zeta \eta^2 \sin(\alpha_m x) \quad (\text{ت} - 29)$$

تغییر شکل غالب در کاربردهایی که در آنها از یک تیر به عنوان تشدیدگر استفاده می‌شود، جابجایی در راستای محور Z است یعنی ارتعاشات خمشی تیر حول محور Y . بنابراین در این تحلیل، این نوع ارتعاشات تیر با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار خواهد گرفت. با ساده‌سازی معادلات حرکت بیان شده در روابط (۲۶)، (۲۷) و (۲۸) و صرفنظر کردن از ترم اینرسی پیچشی معادله حرکت برای ارتعاشات خمشی حول محور Y ، با در نظر گرفتن توزیع دمای سه‌بعدی به فرم رابطه (۳۰) ساده می‌شود.

$$\frac{EI_y}{1-\nu^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - \frac{8E^2 \alpha^2 T_0}{(1-\nu)^2 \rho c_v} - \frac{1}{DLh} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (R_{mpq} + iI_{mpq}) e^{i\omega_r t} + \rho A \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (30)$$

۳- حل معادله کوپلینگ ترموالاستیک

R_{mpq} و I_{mpq} در معادله حرکت (۳۰)، بیان‌کننده ترم‌های کوپلینگ ترموالاستیک برای ارتعاشات خمشی تیر در مود n ام هستند. فرکانس طبیعی تیر که از این معادله حرکت به دست می‌آید به صورت مختلط خواهد بود. قسمت حقیقی آن یک فرکانس جدید است که در واقع مشخص‌کننده انتقال فرکانس ناشی از میرایی ترموالاستیک است. در حالی که بخش موهومی فرکانس، میرایی را نشان می‌دهد. معادله حرکت به دست آمده در رابطه (۳۰) خود تابع فرکانس است زیرا R_{mpq} و I_{mpq} توابعی از فرکانس طبیعی تیر هستند. بنابراین برای حل معادله حرکت (۳۰) و به دست آوردن فرکانس طبیعی تیر در حالت کوپلینگ ترموالاستیک یک پروسه حل تکراری بر اساس روش باقیمانده وزن‌دار گالرکین مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این روش از یک فرم گسسته‌سازی شده خاص معادلات حرکت برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی استفاده می‌شود. گام اول در پروسه حل انتخاب یک جواب تقریبی به فرم (۳۱) است.

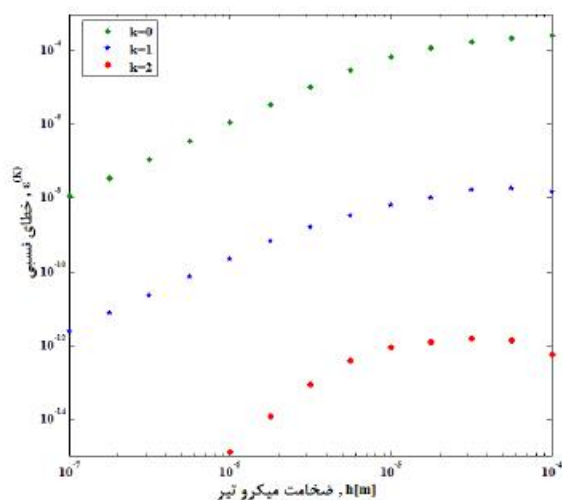
$$w_0(x, t) \approx w_{0N}(x, t) = \sum_{r=1}^N \phi_r(x) q_r(t) \quad (31)$$

$\omega_n = \omega_n|_{isothermal}$ که در آن $K=0$ مربوط به اولین تقریب است که در آن خطای نسبی بیان شده در رابطه (۳۹) به صورت تابعی از ضخامت برای تیر یکسرگردار، در شکل ۲ نشان داده خواهد شد. مشخصات مکانیکی این میکروتیر، سیلیکون در دمای ۳۰۰ K به صورت جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود. و مشخصات هندسی آن به صورت $L=10h$ و $D=5h$ است. در حالی که ضخامت تیر در محدوده ۱۰۰ نانومتر تا ۱۰۰ میکرومتر در حال تغییر است.

جدول ۱۴: مشخصات مکانیکی سیلیکون در دمای ۳۰۰K [۱۳]

$E=160$ GP	مدول یانگ
$\rho=2300$ kg/m ³	چگالی جرمی
$c_v=695.6521$ Jkg ⁻¹ K ⁻¹	گرمای ویژه در حجم ثابت
$k=150$ Wm ⁻¹ K ⁻¹	فاکتور رسانش گرمایی
$\alpha=2.6 \times 10^{-6}$ K ⁻¹	فاکتور انبساط گرمایی
$\nu=0.28$	نسبت پواسون

شکل ۲ نتایج محاسبات تکراری معادله (۳۸) را برای تیر یکسرگردار سیلیکونی که در مود اول ارتعاش می‌کند، نشان می‌دهد. همانگونه که در این شکل دیده می‌شود، در تکرار دوم خطای نسبی ε که در معادله (۳۹) تعریف شده است به مقداری کمتر از 10^{-12} می‌رسد. در نتیجه انتقال فرکانس به دلیل اثرات کوپلینگ ترموالاستیک را می‌توان با استفاده از معادله (۴۰) که در قسمت بعد خواهد آمد، محاسبه کرد.



شکل ۲: تغییرات خطای نسبی $\varepsilon^{(k)}$ مربوط به حل تکراری معادله (۳۹) برای انتقال فرکانس نسبت به ضخامت میکروتیر

شکل ۲ نتایج محاسبات تکراری معادله (۳۸) را برای تیر یکسرگردار سیلیکونی که در مود اول ارتعاش می‌کند، نشان می‌دهد. همانگونه که در این شکل دیده می‌شود، در تکرار دوم خطای نسبی ε که در معادله (۳۹) تعریف شده است به مقداری کمتر از 10^{-12} می‌رسد. در نتیجه انتقال فرکانس به دلیل اثرات کوپلینگ ترموالاستیک را می‌توان با استفاده از معادله (۴۰) که در قسمت بعد خواهد آمد، محاسبه کرد.

$$\sum_{r=1}^N \left(\frac{EI_y \gamma_r^4}{1-\nu^2} L \delta_{ij} - \rho A L \delta_{ij} \omega_r^2 \right) e^{i\omega_r t} - \frac{8E^2 \alpha^2 T_0}{(1-\nu)^2 \rho c_v} \frac{1}{DLh} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^L (R_{mpq} + iI_{mpq}) \phi_j(x) dx e^{i\omega_n t} = 0, \quad j=1,2,\dots,N \quad (36)$$

در حالی که δ_{ij} تابع دلتای کرونکر است.

بنابراین از این سیستم معادلات یک معادله خاص به صورت زیر برای ω_n بدست می‌آید.

$$\omega_n^2 = \frac{EI_y \gamma_n^4}{(1-\nu^2) \rho A} - \frac{8E^2 \alpha^2 T_0}{(1-\nu)^2 \rho c_v} \frac{1}{D^2 L^2 h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^L (R_{mpq} + iI_{mpq}) \phi_n(x) dx \quad (37)$$

در حالی که ترم اول معادله (۳۷) بیان کننده فرکانس طبیعی تیر بدون در نظر گرفتن کوپلینگ ترموالاستیک است. بنابراین فرکانس طبیعی تیر به صورت رابطه (۳۸) خلاصه می‌شود.

$$\omega_n^2 = \omega_n|_{isothermal}^2 - \frac{8E^2 \alpha^2 T_0}{(1-\nu)^2 \rho c_p} \frac{1}{D^2 L^2 h^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^L (R_{mpq} + iI_{mpq}) \phi_n(x) dx \quad (38)$$

رابطه (۳۸) یک معادله جبری غیرخطی از ω_n است، که می‌تواند با استفاده از روش تکراری حل شود. در اولین تقریب R_{mpq} و I_{mpq} با استفاده از رابطه (۲۹) با قرار دادن $\omega_n = \omega_n|_{isothermal}$ به دست می‌آیند. بعد از آن معادله (۳۸) برای به دست آوردن ω_n حل می‌شود. در تکرار دوم همین پروسه برای مقادیر جدید ω_n تکرار می‌شود. این حل برای $m=p=q=30$ همگرا می‌شود. بعد از آن مقدار جدید ω_n به دست آمده، فرکانس ارتعاشات را در حالت کوپلینگ ترموالاستیک نشان می‌دهد که یک عدد مختلط خواهد بود.

۴- ارائه یافته‌ها و نتایج

در این بخش بر اساس روش بحث شده در این مقاله، خطای نسبی انتقال فرکانس در تکرار K ام، مقدار انتقال فرکانس و فاکتور کیفیت مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۴.۱ خطای نسبی انتقال فرکانس

خطای نسبی انتقال فرکانس در تکرار K ام در مود n ام به صورت رابطه (۳۹) خواهد بود.

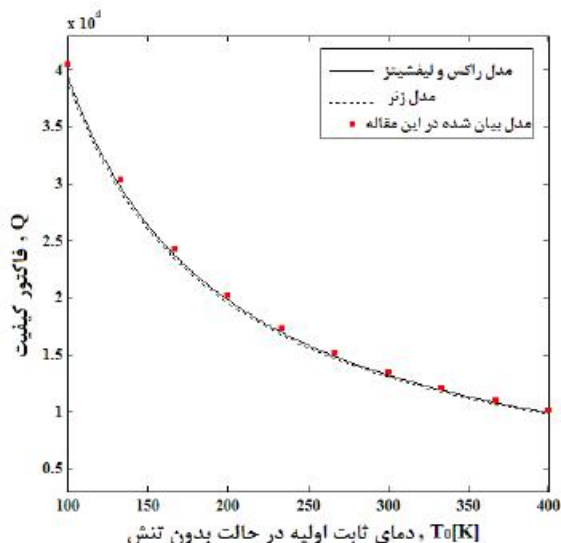
$$\varepsilon^{(K)} = \frac{\text{Re}(\omega_n^{(K)}) - \text{Re}(\omega_n^{(K-1)})}{\text{Re}(\omega_n^{(K-1)})} \quad K=1,2,3,\dots \quad (39)$$

می‌شود.

$$Q \approx \frac{1}{2} \left| \frac{\text{Re}(\omega_n^{(K^*)})}{\text{Im}(\omega_n^{(K^*)})} \right| \quad (41)$$

در این قسمت ابتدا فاکتور کیفیت، به صورت تابعی از دمای ثابت اولیه T_0 در این مدل به دست آورده شده و با مدل زرن [۱] و مدل راکس و لیفشیتز [۷] مقایسه شده است. فاکتور کیفیت برای تیر یک‌سرگردار سیلیکونی با ضخامت $h=5\mu\text{m}$ ، طول $L=10h$ و عرض $D=5h$ و $v=0$ و در محدوده دمای $100-400\text{ K}$ محاسبه شده است.

بنابر نتایج به دست آمده، شکل ۴ فاکتور کیفیت محاسبه شده با استفاده از مدل بیان شده در این مقاله را با مدل‌های زرن و راکس و لیفشیتز مقایسه می‌کند. همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود، مدل موجود در نسبت پواسون صفر (برای اینکه بتوان آن را با یک تیر ساده تقریب زد [۱۶]) انطباق خوبی با مدل‌های تحلیلی توزیع دمای یک‌بعدی دارد.



شکل ۴: مقایسه فاکتور کیفیت محاسبه شده با استفاده از مدل بیان شده در این مقاله با مدل‌های زرن و راکس و لیفشیتز در مقادیر

مختلف دمای ثابت اولیه T_0

در ادامه، در شکل ۵ فاکتور کیفیت با استفاده از مدل توزیع دمای سه‌بعدی به صورت تابعی از دمای ثابت اولیه T_0 برای تیر دوسرگردار سیلیکونی با ضخامت $h=5\mu\text{m}$ ، طول $L=10h$ ، عرض $D=5h$ و نسبت پواسون میانگین $v=0.25$ در محدوده دمای $100-400\text{ K}$ محاسبه شده است. همانگونه که از شکل ۵ دیده می‌شود، با افزایش دمای ثابت اولیه T_0 ، فاکتور کیفیت کاهش پیدا می‌کند.

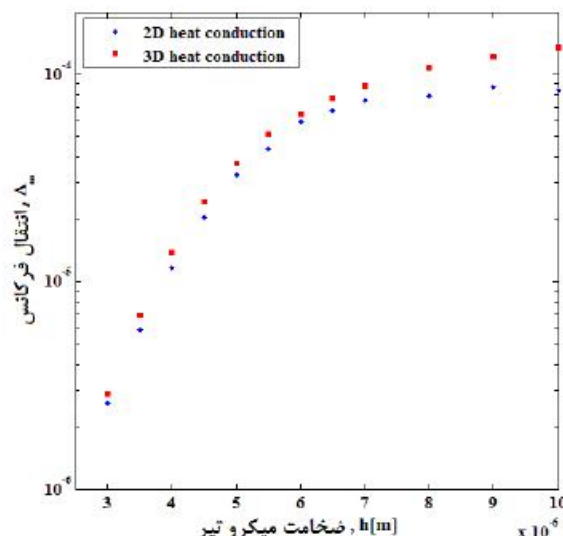
همانگونه که از شکل‌های ۴ و ۵ دیده شد در حالت کلی افزایش دما منجر به کاهش فاکتور کیفیت یا به عبارتی افزایش میرایی ترموالاستیک می‌شود. مشابه این نتیجه در کار انجام شده بوسیله لیفشیتز و راکس [۷] نیز دیده شده است. بنابراین برای کاهش این نوع از میرایی باید تا حد امکان دمای تشدیدگر را کاهش داد.

۲.۴ انتقال فرکانس

مقدار انتقال فرکانس ناشی از اثرات کوپلینگ ترموالاستیک به صورت معادله (۴۰) خواهد بود [۱۳].

$$\Delta_{\omega} = \frac{\text{Re}(\omega_n^{(K^*)}) - \omega_n|_{\text{isothermal}}}{\omega_n|_{\text{isothermal}}} \quad (40)$$

برای اعتبار سنجی پروسه حل در این قسمت، انتقال فرکانس به دست آمده از این مدل با انتقال فرکانس ناشی از میدان درجه حرارت دوبعدی [۱۳] در شکل ۳ مورد مقایسه قرار گرفته است. انتقال فرکانس برای یک تیر دوسرگردار سیلیکونی با طول $L=90\mu\text{m}$ و عرض $D=5h$ و $v=0$ و در دمای 300 K محاسبه شده است. در حالی که ضخامت تیر در محدوده $10-3$ میکرومتر در حال تغییر است.



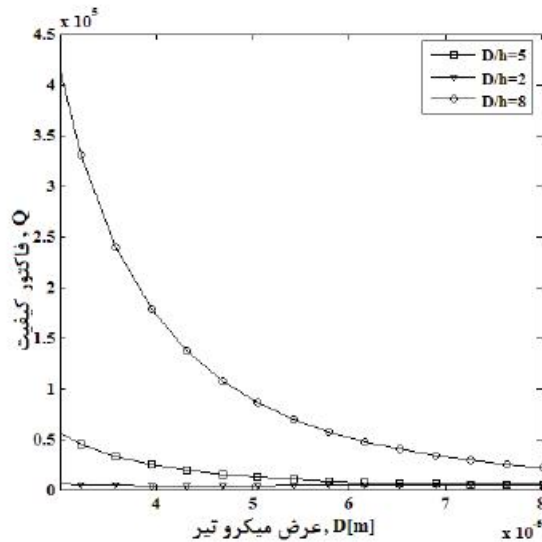
شکل ۳: مقایسه انتقال فرکانس محاسبه شده با استفاده از مدل توزیع دمای سه‌بعدی و مدل توزیع دمای دوبعدی بیان شده در مرجع [۱۳]

همانطور که در شکل ۳ دیده می‌شود، در ضخامت‌های کم میکروتری میزان اختلاف بین انتقال فرکانس ناشی از توزیع حرارت دوبعدی و سه‌بعدی در همه موارد کمتر از ۱۰٪ است. در صورتی که با افزایش ضخامت میکروتری که منجر به افزایش عرض آن نیز می‌شود میزان این اختلاف در حال افزایش یافتن است و در ضخامت $10\mu\text{m}$ به ۲۷٪ می‌رسد.

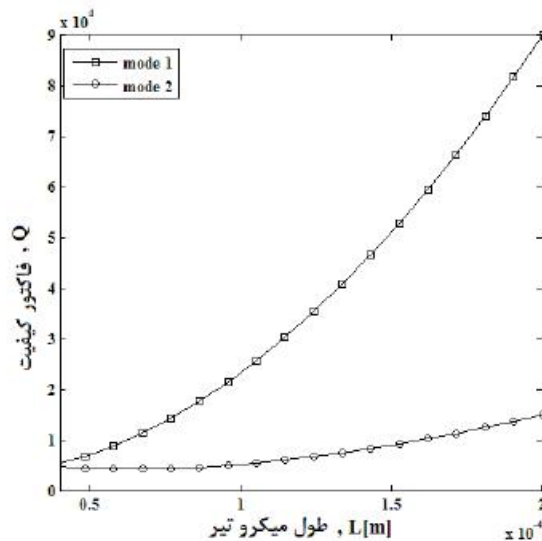
۳.۴ فاکتور کیفیت

میرایی در جامدات به وسیله معکوس فاکتور کیفیت Q^{-1} می‌تواند اندازه‌گیری شود. این فاکتور کیفیت برای یک تیر در حال ارتعاش به صورت بخشی از انرژی هدر رفته در هر سیکل است. در واقع هدف اصلی از بررسی میرایی ترموالاستیک به دست آوردن فاکتور کیفیت ناشی از این اثر در یک تشدیدگر است. این فاکتور کیفیت به صورت نسبت بخش حقیقی فرکانس به بخش موهومی آن به صورت معادله (۴۱) تعریف

از تفسیر شکل ۶ می‌توان فهمید که در یک ضخامت خاص، کاهش نسبت D/h باعث افزایش فاکتور کیفیت می‌شود. تفسیر مشابهی از شکل ۷ این واقعیت را نشان می‌دهد که در یک عرض خاص، افزایش نسبت D/h باعث افزایش فاکتور کیفیت می‌شود. بنابراین به دلیل تأثیر دوگانه این افزایش و کاهش نسبت D/h بر فاکتور کیفیت، از نسبت $D/h=5$ که در واقع یک حالت بهینه است برای اکثر محاسبات در این بخش استفاده شده است.



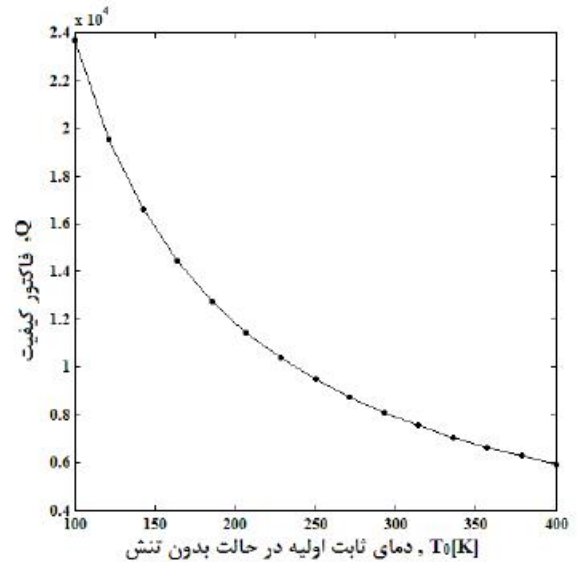
شکل ۷: تغییرات فاکتور کیفیت نسبت به عرض برای میکروتیر دوسرگیردار در مقادیر مختلف نسبت عرض به ضخامت، D/h و طول ثابت $L=200\mu\text{m}$



شکل ۸: تغییرات فاکتور کیفیت در طول‌های مختلف برای تیر دوسرگیردار در دو مود ارتعاشی اول

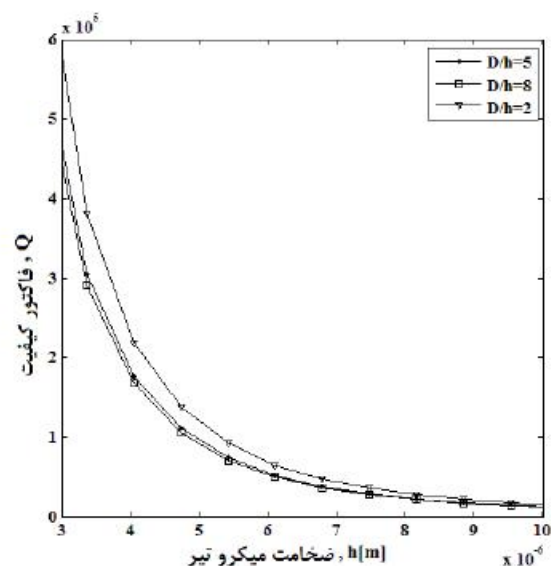
شکل ۸ تغییرات فاکتور کیفیت را در طول‌های مختلف برای تیر دوسرگیردار سیلیکونی با ضخامت $h=5\mu\text{m}$ عرض $D=40\mu\text{m}$ و دمای اولیه 300K را در دو مود ارتعاشی اول نشان می‌دهد. همانطور که در

اثر تغییرات ضخامت، تغییرات عرض و تغییرات طول میکروتیر بر فاکتور کیفیت در شکل‌هایی که در ادامه خواهند آمد، نشان داده خواهد شد.



شکل ۹: فاکتور کیفیت محاسبه شده یا استفاده از مدل توزیع دمای سه بعدی برای تیر دوسرگیردار با نسبت بواسون میانگین $\nu=0.25$ در مقادیر مختلف دمای ثابت اولیه

در شکل‌های ۶ و ۷ اثرات تغییرات ضخامت و عرض در یک میکروتیر دوسرگیردار سیلیکونی با طول ثابت $L=200\mu\text{m}$ در دمای اولیه 300K و در چند مقدار مختلف نسبت عرض به ضخامت، D/h نشان داده شده‌اند. همانطور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، در حالت کلی افزایش ضخامت و عرض در یک طول ثابت و در یک نسبت D/h خاص، باعث کاهش فاکتور کیفیت می‌شود.



شکل ۱۰: تغییرات فاکتور کیفیت نسبت به ضخامت برای میکروتیر دوسرگیردار در مقادیر مختلف نسبت عرض به ضخامت، D/h و طول ثابت $L=200\mu\text{m}$

۶- مراجع

- [1] Zener, C., 1937. "Internal friction in solids I. Theory of internal friction in reeds", *Physical Review*, 52, pp. 230-235.
- [2] Zener, C., 1938. "Internal friction in solids II. General theory of thermoelastic internal friction", *Physical Review*, 53, pp. 90-99.
- [3] Zener, C., Otis, W., Nuckolls, R., 1938. "Internal friction in solids III. Experimental demonstration of thermoelastic internal friction", *Physical Review*, 53, pp. 100-101.
- [4] Berry, B.S., 1955. "Precise investigation of the theory of damping by transverse thermal currents", *Journal of Applied Physics*, 26, pp. 1221-1224.
- [5] Roszhardt, R.V., 1990. "The effect of thermoelastic internal friction on the Q of micromachined silicon resonators", *IEEE Solid State Sensor and Actuator Workshop*, Hilton Head Island, SC, USA, pp. 13-16.
- [6] Yasumura, K.Y., Stowe, T.D., Chow, E.M., Pfafman, T., Kenny, T.W., Stipe, B.C., Rugar, D., 2000. "Quality Factors in Micron- and Submicron-thick Cantilevers", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 9, 1, pp. 117-125.
- [7] Lifshitz, R., 2002. "phonon-mediated dissipation in micro- and nano-mechanical systems", *Physica B*, 316/317, pp. 397-399.
- [8] Sun, Y.X., Fang, D.N., Soh, A.K., 2006. "Thermoelastic damping in micro- beam resonators", *International Journal of Solids and Structures*, 43, pp. 3213-3229.
- [9] Wong, S.J., Fox, C.H.J., Mc William, S., 2006. "Thermoelastic damping of the in-plane vibration of thin silicon rings", *Journal of Sound and Vibration*, 293, pp. 266-285.
- [10] Zamanian, M., Khadem, S.E., 2010. "Analysis of thermoelastic damping in microresonators by considering the stretching effect", *International Journal of Mechanical Sciences*, 52, pp. 1366-1375.
- [11] Sun, Y., Saka, M., 2010. "Thermoelastic damping in micro-scale circular plate resonators", *Journal of Sound and Vibration*, 329, pp. 328-337.
- [12] Li, P., Fang, Y., Hu, R., 2012. "Thermoelastic damping in rectangular and circular microplate resonators", *Journal of Sound and Vibration*, 331, pp. 721-733.
- [13] Prabhakar, S., Paidoussis, M.P., Vengallatore, S., 2009. "Analysis of frequency shifts due to thermoelastic coupling in flexural-mode micromechanical and nanomechanical resonators", *Journal of Sound and Vibration*, 323, pp. 385-396.

این شکل دیده می‌شود، در حالت کلی افزایش طول میکروتیر منجر به افزایش فاکتور کیفیت می‌شود. در مود ارتعاشی اول افزایش طول، به صورت قابل توجهی باعث افزایش فاکتور کیفیت می‌شود در حالی که در مود ارتعاشی دوم، افزایش طول تأثیر قابل توجهی بر فاکتور کیفیت ندارد. از تفسیر این شکل می‌توان دریافت افزایش طول میکروتیر منجر به کاهش میرایی ترموالاستیک شده است. که این امر در واقع تأییدکننده این مطلب است که این نوع میرایی فقط در ابعاد میکرو و نانو دیده می‌شود و با افزایش ابعاد تیر این نوع میرایی اثر خود را از دست می‌دهد.

۵- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در تشدیدگرها تمایل زیادی به طراحی و ساخت سیستم‌هایی با حداقل اتلاف انرژی یا حداکثر فاکتور کیفیت وجود دارد. مهم‌ترین مکانیزم محدود کننده فاکتور کیفیت، میرایی ترموالاستیک است. بنابراین برای بهبود عملکرد تشدیدگرهای با فاکتور کیفیت بالا، مدل‌سازی دقیق و پیش‌بینی اتلاف ناشی از میرایی ترموالاستیک یک نیاز اساسی خواهد بود. در این مقاله سعی بر این بود که با مدل‌سازی دقیق‌تر این مکانیزم اتلافی، تأثیر پارامترهای مختلف بر فاکتور کیفیت و همچنین اثرات کوپلینگ ترموالاستیک بر روی فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار بگیرد. نتایج حاصل از این تحلیل‌ها نشان داد که

- در ضخامت‌های کم میکروتیر میزان اختلاف بین انتقال فرکانس ناشی از توزیع حرارت دوبعدی و سه‌بعدی در همه موارد کمتر از ۱۰٪ است. در صورتی که با افزایش ضخامت میکروتیر که منجر به افزایش عرض آن نیز می‌شود میزان این اختلاف در حال افزایش یافتن است و در ضخامت $10\mu\text{m}$ به ۲۷٪ می‌رسد.

- برای تغییرات فاکتور کیفیت نسبت به تغییرات دمایی اولیه، مدل مطرح شده در این مقاله در نسبت پواسون صفر (برای اینکه بتوان آن را با یک تیر ساده تقریب زد) انطباق خوبی با مدل‌های تحلیلی توزیع دمایی یک‌بعدی که بوسیله زور و راکس و لیفشیتز ارائه شده‌اند، دارد.

- نتایج حاصل از تغییرات فاکتور کیفیت نسبت به تغییرات دمایی اولیه، با استفاده از مدل توزیع دمایی سه‌بعدی برای تیر دوسرگردار سیلیکونی نشان می‌دهد که با افزایش دمایی اولیه، فاکتور کیفیت کاهش پیدا می‌کند.

- در حالت کلی افزایش طول میکروتیر منجر به افزایش فاکتور کیفیت می‌شود. در مود ارتعاشی اول افزایش طول، به صورت قابل توجهی باعث افزایش فاکتور کیفیت می‌شود در حالی که در مود ارتعاشی دوم، افزایش طول تأثیر قابل توجهی بر فاکتور کیفیت ندارد.

- [17] Song, Y., Bhushan, B., 2008. "Atomic force microscopy dynamic modes: modeling and applications", *J. Phys.: Condens. Matter*, 20, pp. 225012-41.
- [18] James, M.L., Smith, G.M., Wolford, J.C., Whaley, P.W., 1989. *Vibration of Mechanical and Structural Systems with Micro computer Applications*, Harper and Row, New York.
- [14] Hetnarski, R., Eslami, M. R., 2009. *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*, Springer, Heidelberg.
- [15] Sadd, M.H., 2005. *Elasticity- Theory, Applications, and Numerics*, Elsevier, New York.
- [16] Nayfeh, A., Younis, M.I., 2004. "Modeling and simulations of thermoelastic damping in microplates", *Journal of Micromechanics and Microengineering* 14, pp. 1711-1717.