



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

دوره ۴۸، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۵، صفحه ۱۸۷ تا ۱۹۶

Vol. 48, No. 2, Summer 2016, pp. 187-196



نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر - مهندسی مکانیک

AmirKabir Journal of Science & Research  
Mechanical Engineering  
ASJR-ME

## بررسی اثر نسبت اضلاع میله در انتشار امواج هدایت شده فراصوت در میله‌ای با مقطع مستطیلی

مرتضی رفیعی<sup>۱\*</sup>، خسرو نادران طحان<sup>۲</sup>

۱- کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

۲- استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

(دریافت: ۱۳۹۲/۳/۷ پذیرش: ۱۳۹۴/۴/۸)

### چکیده

در این پژوهش تأثیر نسبت اضلاع مقطع یک میله با مقطع مستطیلی بر سرعت امواج طولی، پیچشی و خمشی بررسی شده و جابجایی ذرات میله در مجاورت سطوح آزاد آن به دست آمده است. حرکت موج در یک میله با مقطع مستطیلی باید به صورت سه‌بعدی تحلیل شود. در دستگاه معادلات همگنی که برای تأمین شرایط مرزی سطوح بدون تنش تشکیل می‌شود، ضرایب نامعینی ظاهر می‌شوند که برای وجود جواب غیر بدیهی باید دترمینان ضرایب این دستگاه برابر صفر شود. به این ترتیب معادله مشخصه امواج قابل انتشار به دست می‌آید. با نوشتن یک برنامه رایانه‌ای، ریشه‌های حقیقی این معادله استخراج و نمودارهای طیف فرکانس، سرعت فاز، سرعت گروه و ساختار موج برای امواج طولی، پیچشی و خمشی رسم می‌شوند. با افزایش نسبت اضلاع مقطع میله مشاهده می‌شود که با افزایش فرکانس، سرعت فاز امواج طولی و پیچشی کاهش یافته در حالی که سرعت فاز امواج خمشی افزایش یافته است. همچنین برای برخی از مودها، تغییر مکان ذرات در مجاورت سطح قابل ملاحظه و در برخی از مودهای دیگر این تغییر مکان ناچیز است.

### کلمات کلیدی:

امواج هدایت شده فراصوت، سرعت فاز، سرعت گروه، ساختار موج، سطح مقطع مستطیلی.

## ۱- مقدمه

رایانه‌ای نوشته شده و به کمک آن ریشه‌های معادله مشخصه استخراج و سپس نمودارهای طیف فرکانس، سرعت فاز، سرعت گروه و ساختار موج برای شش مود اول این امواج بر حسب عدد موج در میله‌ای با مقطع مستطیلی به پهنای  $2a$  و ضخامت  $2b$  و با نسبت پهنای به ضخامت ۱ و ۲ و ۳ ترسیم شده‌اند. همچنین نسبت پهنای به ضخامت ۲۰ به عنوان حالت انتهایی، معادل یک صفحه برای مقایسه نتایج در نظر گرفته شده است. مقایسه نتایج حاصل از این پژوهش برای حالتی که نسبت پهنای به ضخامت میله برابر با یک است با نتایج مقطع مربعی در منابع دیگر انطباق دارد. این پژوهش ضمن اینکه پیشنهادهایی برای بهبود روش‌های آزمون‌های فراصوت با انتخاب مود مناسب ارائه می‌دهد، امکان بررسی مقاطع دیگر مانند نبشی، قوطی و ناودانی را فراهم می‌آورد.

## ۲- معادلات حاکم

معادله حرکت در یک محیط الاستیک ایزوتروپیک که به معادله ناویر مشهور است در رابطه (۱) ارائه شده است.

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu\nabla^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

که در آن  $\lambda$  و  $\mu$  ثابت‌های لامه،  $\vec{u}$  بردار تغییر مکان،  $\rho$  چگالی و  $t$  پارامتر زمان و  $\nabla$  و  $\nabla^2$  به ترتیب عملگرهای گرادینان و لاپلاسیان می‌باشند. بردار تغییر مکان، با استفاده از روش تجزیه هلمهلتز، به صورت ترکیبی از گرادینان یک تابع پتانسیل اسکالر  $\varphi$  و کرل یک تابع پتانسیل برداری  $\vec{H}$  که دیورژانس آن برابر صفر است، نوشته می‌شود.

$$\vec{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \vec{H}, \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (2)$$

با جایگذاری بردار تغییر مکان در رابطه (۱) و انجام عملیات لازم روابط (۳) و (۴) به دست می‌آیند.

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (4)$$

در این روابط سرعت‌های موج طولی و عرضی طبق رابطه (۵) با ثابت‌های لامه و چگالی در ارتباط هستند.

$$c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (5)$$

## ۳- حل معادلات

در شکل ۱ مقطع میله و دستگاه محورهای مختصات آن نشان داده شده است.  $x$  و  $y$  محورهای روی مقطع میله و محور  $z$  هم‌راستا با طول میله است و صفحات  $x = \pm a$  و  $y = \pm b$  مرزهای جانبی میله هستند.

امروزه استفاده از امواج هدایت شده فراصوت به عنوان یکی از آزمون‌های غیر مخرب در صنایع مختلف کاربردهای فراوان و روبه‌رشدی دارد و به عنوان راهی برای تعیین و تشخیص عیوب مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. پژوهش‌های بسیاری پیرامون انتشار موج در ورق‌ها و لوله‌ها انجام شده است، اما هنوز حل دقیقی برای بسیاری از مقاطع وجود ندارد. علت این محدودیت بیشتر از این روست که در ورق‌ها معمولاً دو بعد از جسم را می‌توان بی‌نهایت فرض کرد و در استوانه‌ها می‌توان از خواص تقارن محوری جسم و انتشار موج برای ساده‌سازی و حل معادلات استفاده نمود، اما در میله‌هایی با مقطع مستطیلی، یافتن مؤلفه‌های بردار تغییر مکان که تمام شرایط مرزی را روی سطوح آزاد میله تأمین کنند و در نتیجه تشکیل معادله مشخصه‌ای که به کمک آن بتوان مشخصه‌های انتشار امواج فراصوت مثل طیف فرکانس، سرعت فاز و سرعت گروه را به دست آورد بسیار پیچیده‌تر است. تأثیر مؤلفه‌های جانبی حرکت بر مؤلفه طولی و تابش و بازتاب امواج روی سطوح اضافی میله‌های مستطیلی، مسأله را از حالت یک و یا دوبعدی به یک مسأله سه‌بعدی تبدیل می‌کند که برای حل معادلات حاکم بر حرکت، باید فرضیات ساده‌کننده و تقریب‌های مناسبی را به کار برد؛ موضوعاتی که تلاش پژوهشگران را در دهه‌های گذشته به خود اختصاص داده است [۱].

با تشکیل معادله مشخصه برای موج طولی به صورت تئوری [۲] و همچنین با انجام آزمایش به صورت تجربی [۳ و ۴] نشان داده شده است که سرعت فاز مود اول امواج طولی در میله‌ای با مقطع مستطیلی نسبت به سرعت فاز این امواج در یک حجم نامحدود، با افزایش فرکانس کاهش یافته و به سرعت فاز امواج سطحی می‌رسد. برای بررسی تأثیر نسبت اضلاع و فرکانس بر سرعت فاز مودهای مختلف علاوه بر میله‌های با مقطع مستطیلی [۵]، میله‌هایی با مقاطع مختلف دیگر نیز مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۶].

برای بررسی انتشار امواج در میله‌ها اغلب از روش حل تحلیلی دقیق برای یک صفحه و یا استوانه استفاده می‌شود، اگرچه مشکل اساسی در مقاطع مستطیلی، تأمین همه شرایط مرزی روی سطوح آزاد میله است. برای حل معادلات حاکم بر حرکت موج، علاوه بر روش انرژی (همیلتون و ریتمس)، روش‌های دیگری مانند روش تلفیقی برای مقطع مربعی [۷]، روش اجزاء محدود [۸ و ۹] و یا روش المان مرزی برای مقاطع دلخواه [۱۰] و روش انطباق مود نیز مورد استفاده قرار گرفته است [۱۱]. روش‌های تقریبی که بر مبنای بسط مؤلفه‌های بردار تغییر مکان به صورت سری‌های دوتایی از مختصات مقطع میله و حفظ تعداد معینی از جملات استوارند، نیز مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یکی از روش‌های تحلیلی انتشار موج در مقاطع مستطیلی که بر مبنای معادلات سه‌بعدی حرکت استوار است، روش جمع آثار است [۱۲]. در مطالعه حاضر از این روش برای محاسبه مؤلفه‌های بردار تغییر مکان و استخراج معادله مشخصه امواج طولی، خمشی و پیچشی استفاده شده است. برای این کار یک برنامه

ریشه‌های معادله مشخصه به صورت معمول تعداد معینی از معادلات و به همان تعداد، از ضرایب  $A_n$  و  $B_m$  در نظر گرفته می‌شود. در پژوهش حاضر فقط برای چهار ضریب مجهول (دو ضریب از هر سری)، ریشه‌های حقیقی معادله مشخصه استخراج شده‌اند. این معادله فقط با وجود دو متغیر فرکانس و عدد موج قابل حل است. به ازای هر عدد موج داده شده، فرکانس‌های بی‌شماری به دست می‌آید که نشان‌دهنده‌ی مودهای قابل انتشار موج هستند و به ترتیب از اولین مود به دست آمده شماره‌گذاری می‌شوند. البته نتایج بدست آمده فقط به ضریب پواسون و نسبت اضلاع میله وابسته هستند. با نوشتن یک برنامه رایانه‌ای و استفاده از روش عددی نصف کردن فاصله‌ها، ریشه‌های معادله استخراج و طیف فرکانس، نمودارهای سرعت فاز، سرعت گروه و ساختار موج برای شش مود اول و نسبت‌های متفاوت اضلاع رسم شده‌اند.

در تشکیل دستگاه معادلات همگن پارامترهایی ظاهر می‌شوند که مقادیر آن‌ها از روابط زیر محاسبه شده و جایگزین می‌شوند.

$$\alpha_1^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 - \xi^2 \quad \alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 - \eta^2 \quad (1-7)$$

$$\beta_1^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 - \xi^2 \quad \beta_2^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 - \eta^2 \quad (2-7)$$

$$L_1^2 = \frac{\omega^2}{2c_T^2} - k^2 - \xi^2 \quad L_2^2 = \frac{\omega^2}{2c_T^2} - k^2 - \eta^2 \quad (3-7)$$

در این روابط  $\xi$  و  $\eta$  پارامترهایی هستند که برای هریک از انواع موج به گونه‌ای به دست می‌آیند که شرایط مرزی مسئله را ارضا کنند. مقادیر آن‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شوند ( $m=0,1,2,3,\dots$  و  $n=0,1,2,3,\dots$ ).

• برای امواج طولی:  $\eta = \frac{n\pi}{a}$  و  $\xi = \frac{m\pi}{b}$

• برای امواج پیچشی:  $\xi = (2n+1)\frac{\pi}{2a}$  و  $\eta = (2m+1)\frac{\pi}{2b}$

• برای امواج خمشی:  $\xi = (2n+1)\frac{\pi}{2a}$  و  $\eta = \frac{m\pi}{b}$

دستگاه معادلات همگن برای امواج طولی، پیچشی و خمشی به صورت روابط (۸) تا (۱۰) به دست آمده‌اند.

• دستگاه معادلات همگن برای امواج طولی

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^{n+m} \left[ L_1^2 \left( \frac{R\omega^2}{c_L^2} + \xi^2 \right) / (\alpha_1 - \eta) - \xi^2 \alpha_1 \beta_1 / (\beta_1 - \eta) \right] \sin \alpha_1 b \sin \beta_1 b \\ & - 2b B_m \left[ L_2^4 \sin \beta_2 a \cos \alpha_2 a + (\eta^2 + k^2) \alpha_2 \beta_2 \sin \alpha_2 a \cos \beta_2 a \right] = 0 \\ & - 2a A_n \left[ L_1^4 \sin \beta_1 b \cos \alpha_1 b + (\xi^2 + k^2) \alpha_1 \beta_1 \sin \alpha_1 b \cos \beta_1 b \right] \\ & + 2 \sum_{m=0}^{\infty} B_m (-1)^{n+m} \left[ L_2^2 \left( \frac{R\omega^2}{c_L^2} + \eta^2 \right) / (\alpha_2 - \xi) - \eta^2 \alpha_2 \beta_2 / (\beta_2 - \xi) \right] \sin \alpha_2 a \sin \beta_2 a = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

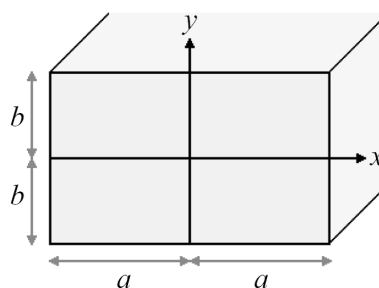
اگر  $w = w_0(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$  مؤلفه بردار تغییر مکان در امتداد محور  $z$  و  $w_0(x, y)$  دامنه آن باشد، برحسب تقارن این دامنه نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  می‌توان مودهای قابل انتشار در میله را به صورت زیر دسته بندی کرد که در این دسته بندی  $k$  عدد موج نامیده می‌شود.

• اگر  $w_0(x, y)$  تابع زوجی هم از  $x$  و هم از  $y$  باشد، موج طولی یا تراکمی است (مودهای  $L$ ).

• اگر  $w_0(x, y)$  تابع فردی هم از  $x$  و هم از  $y$  باشد، موج پیچشی است (مودهای  $T$ ).

• اگر  $w_0(x, y)$  تابع فردی از  $x$  و تابع زوجی از  $y$  یا برعکس باشد، موج خمشی است (مودهای  $Bx$  و  $By$ ).

• اگر مقطع میله مربع باشد به دلیل تقارن مقطع نسبت به قطرهای  $y = \pm x$ ، امواج دیگری نیز قابل تشخیص است [۷].



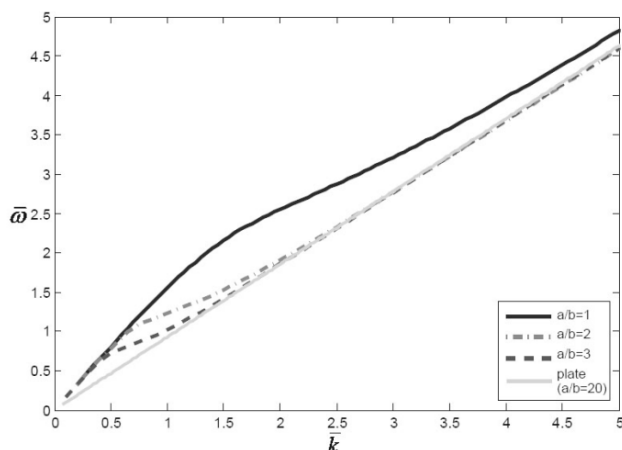
شکل ۱: مقطع میله و دستگاه مختصات

شرایط مرزی برای حل مساله میله نامتناهی با مقطع مستطیلی که تنش‌های عمودی و برشی بر روی سطوح جانبی آن صفر هستند، در رابطه (۶) ارائه می‌شود.

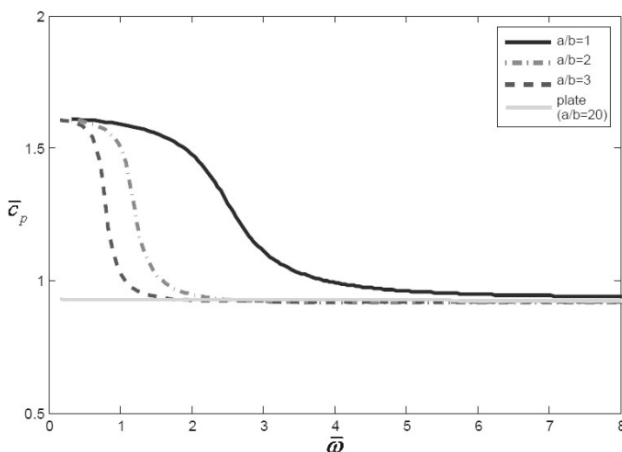
$$\begin{aligned} \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 & \quad \text{at } x = \pm a \\ \sigma_y = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0 & \quad \text{at } y = \pm b \end{aligned} \quad (6)$$

با استفاده از روش جمع آثار و انتخاب توابع مثلثاتی مناسب می‌توان توابع پتانسیل اسکالر و برداری را با ضرایب ثابت نامعین به نحوی پیدا کرد که پس از محاسبه مؤلفه‌های بردار تغییر مکان، معادلات حرکت برای تمام زمان‌ها تأمین شوند. به کمک روابط تغییر مکان - کرنش و کرنش - تنش می‌توان مؤلفه‌های تنش را در هر نقطه از میله محاسبه نمود.

پس از اعمال شرایط مرزی که در آن سطوح خارجی میله بدون تنش در نظر گرفته شده‌اند، دستگاه معادلات همگنی به دست می‌آید که با حل آن‌ها، ضرایب ثابت نامعین قابل محاسبه‌اند. با انجام عملیات ریاضی طولانی و پیچیده، این دستگاه معادلات همگن برای هر یک از امواج طولی، پیچشی و خمشی استخراج شده‌اند [۱۲]. در این دستگاه معادلات، ضرایب ثابت نامعین به صورت  $A_n$  و  $B_m$  ظاهر می‌شوند که تعداد آن‌ها نامحدود است. برای این که این دستگاه معادلات همگن جواب غیر بدیهی داشته باشد باید دترمینان ضرایب آن صفر شود. به این ترتیب معادله مشخصه امواج قابل انتشار در میله تشکیل می‌شود. برای محاسبه

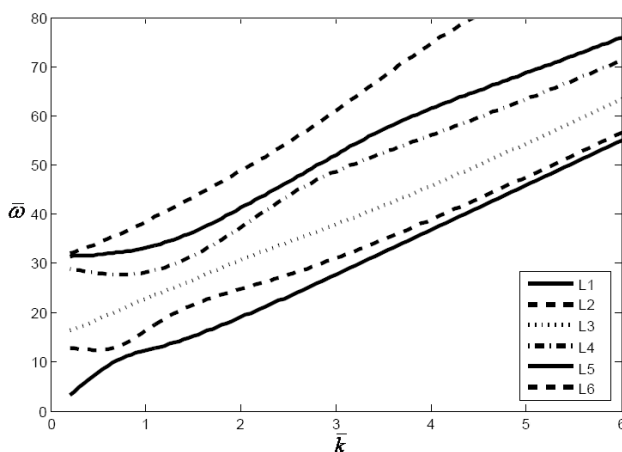


شکل ۲: طیف فرکانس اولین مود طولی برای میله با مقطع مستطیلی با نسبت اضلاع مختلف



شکل ۳: سرعت فاز اولین مود طولی برای میله با مقطع مستطیلی با نسبت اضلاع مختلف

منحنی‌های پراکندگی طیف فرکانس، سرعت فاز و سرعت گروه برای شش مود اول طولی در میله‌ای با نسبت پهنا به ضخامت ۲، در شکل‌های (۴) تا (۶) ارائه شده است.



شکل ۴: طیف فرکانس موج طولی در میله با مقطع مستطیلی

#### • دستگاه معادلات همگن برای امواج پیچشی

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^{n+m} [L_1^2 (\frac{R\omega^2}{c_L^2} + \xi^2) / (\alpha_1 - \eta) - \xi^2 \alpha_1 \beta_1 / (\beta_1 - \eta)] \cos \alpha_1 b \cos \beta_1 b - b B_m (L_2^4 \cos \beta_2 a \sin \alpha_2 a + (\eta^2 + k^2) \alpha_2 \beta_2 \cos \alpha_2 a \sin \beta_2 a) = 0$$

$$- a A_n (L_1^4 \cos \beta_1 b \sin \alpha_1 b + (\xi^2 + k^2) \alpha_1 \beta_1 \cos \alpha_1 b \sin \beta_1 b) + \sum_{m=0}^{\infty} B_m (-1)^{n+m} [L_2^2 (\frac{R\omega^2}{c_L^2} + \eta^2) / (\alpha_2 - \xi) - \eta^2 \alpha_2 \beta_2 / (\beta_2 - \xi)] \cos \alpha_2 a \cos \beta_2 a = 0 \quad (9)$$

#### • دستگاه معادلات همگن برای امواج خمشی

$$-\sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^{n+m} [L_1^2 (\frac{R\omega^2}{c_L^2} + \xi^2) / (\alpha_1 - \eta) - \xi^2 \alpha_1 \beta_1 / (\beta_1 - \eta)] \sin \alpha_1 b \sin \beta_1 b + b B_m [-L_2^4 \cos \beta_2 a \sin \alpha_2 a + (\eta^2 + k^2) \alpha_2 \beta_2 \cos \alpha_2 a \sin \beta_2 a] = 0$$

$$a A_n [-L_1^4 \sin \beta_1 b \cos \alpha_1 b - (\xi^2 + k^2) \alpha_1 \beta_1 \sin \alpha_1 b \cos \beta_1 b] + \sum_{m=0}^{\infty} B_m (-1)^{n+m} [L_2^2 (\frac{R\omega^2}{c_L^2} + \eta^2) / (\alpha_2 - \xi) - \eta^2 \alpha_2 \beta_2 / (\beta_2 - \xi)] \cos \alpha_2 a \cos \beta_2 a = 0 \quad (10)$$

لازم به توضیح است که جواب معادله‌ی فرکانسی فقط به ضریب پواسون و نسبت اضلاع وابسته خواهد بود زیرا در معادلات فرکانسی نسبت‌های سرعت فاز و سرعت گروه و همچنین نسبت ضرایب لامه فقط به ضریب پواسون وابسته‌اند و پارامترهای دیگر با داشتن ضریب پواسون، مدول کشسانی و چگالی قابل محاسبه هستند، بنابراین بی‌بعدسازی این پارامترها در ارائه بهتر نتایج مفید خواهد بود. در این مسئله پارامترهای بدون بعد از رابطه (۱۱) به دست می‌آیند.

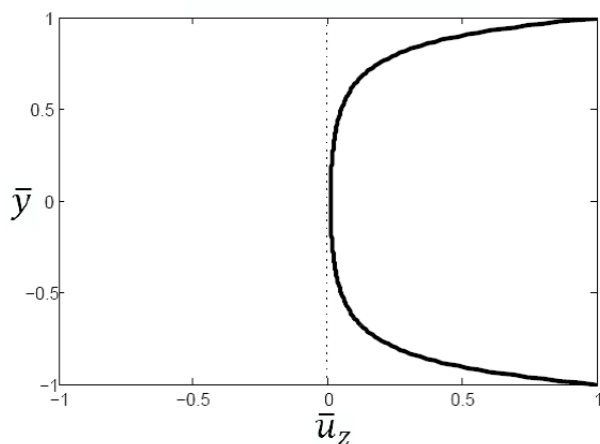
$$\bar{\omega} = \frac{\omega b}{c_T}, \quad \bar{c}_p = \frac{c_p}{c_T}, \quad \bar{c}_g = \frac{c_g}{c_T}, \quad \bar{k} = kb \quad (11)$$

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{u_{i_{max}}}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}$$

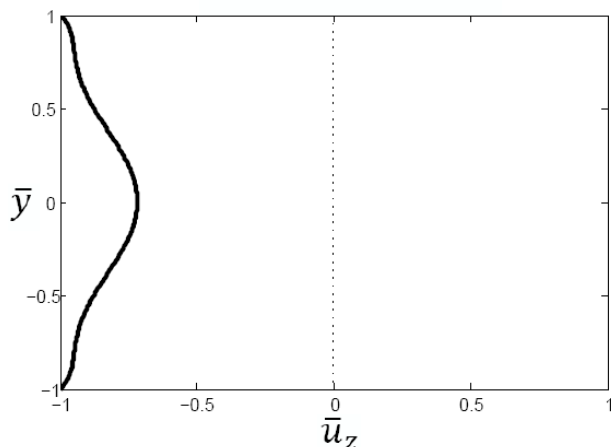
#### ۴- نتایج

##### ۴-۱- مود طولی

نمودارهای طیف فرکانس و سرعت فاز برای اولین مود طولی میله مستطیلی فولادی با ضریب پواسون ۰/۳ و نسبت‌های پهنا به ضخامت مختلف در شکل‌های ۲ و ۳ ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش نسبت پهنا به ضخامت، فرکانس موج قابل انتشار به خصوص برای عددهای موج کوچک، کاهش می‌یابد و سرعت فاز سریع‌تر به سمت یک مقدار ثابت که سرعت موج سطحی ریلی نام دارد، میل می‌کند و این نمودارها به مرور مشابه نمودارهای موج لمب در ورق می‌شوند.



شکل ۷: ساختار موج مود اول طولی در میله با مقطع مستطیلی در فرکانس ۲۹۰ kHz

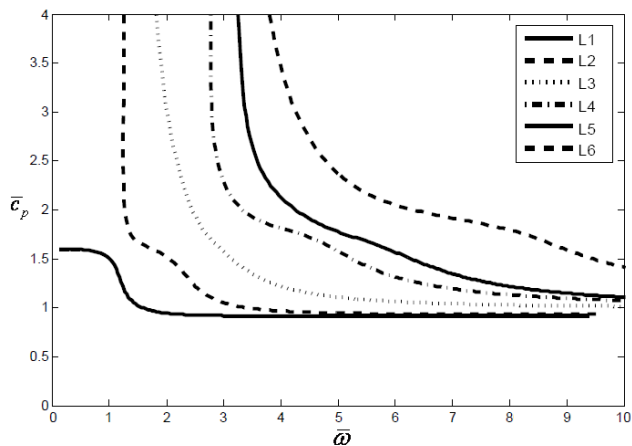


شکل ۸: ساختار موج مود پنجم طولی در میله با مقطع مستطیلی در فرکانس ۳۴۵ kHz

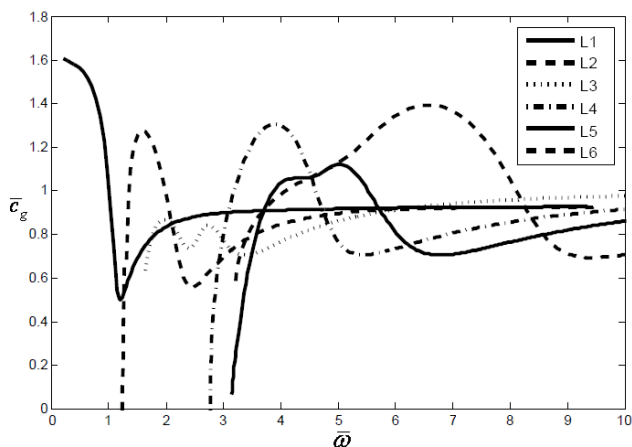
#### ۴-۲- مود پیچشی

نمودارهای طیف فرکانس و سرعت فاز برای اولین مود پیچشی در شکل‌های ۹ و ۱۰ ارائه شده است. با توجه به این نمودارها، مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت پهنا به ضخامت مقطع میله، فرکانس قطع کاهش می‌یابد و برعکس موج طولی، سرعت فاز اولین مود پیچشی با سرعت کمتری به سمت سرعت موج ریلی میل می‌کند. همچنین با افزایش نسبت اضلاع مقطع میله، نمودارها شبیه به نمودارهای موج لمب در ورق شده‌اند.

نمودار پراکندگی طیف فرکانس، سرعت فاز و سرعت گروه برای شش مود اول پیچشی در میله با مقطع مستطیل و نسبت اضلاع ۲، به ترتیب در شکل‌های ۱۱، ۱۲ و ۱۳ رسم شده‌اند.



شکل ۵: سرعت فاز موج طولی در میله با مقطع مستطیلی

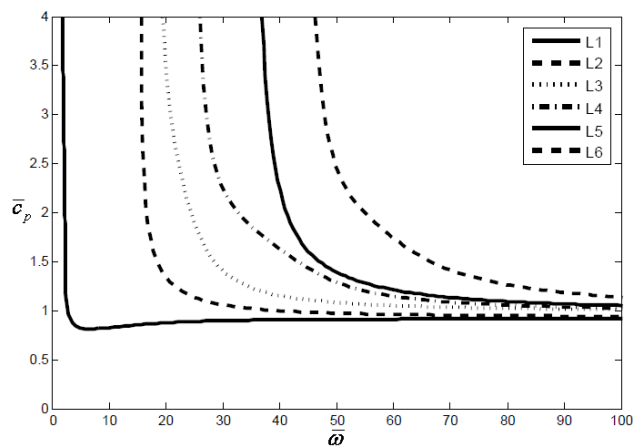


شکل ۶: سرعت گروه موج طولی در میله با مقطع مستطیلی

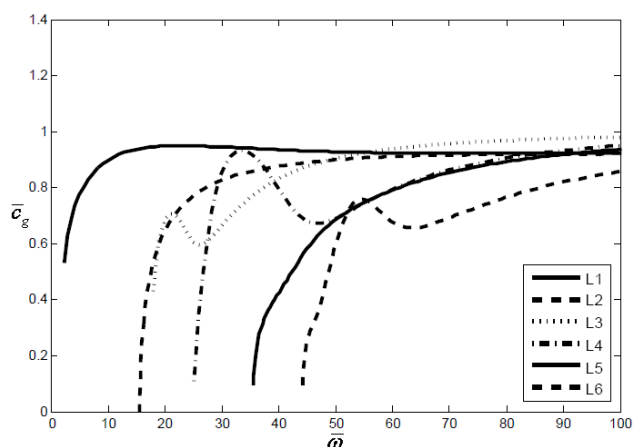
در شکل ۴ دیده می‌شود که فرکانس مود اول در  $k=0$  به سمت صفر میل می‌کند ولی سایر مودها دارای یک فرکانس غیر صفر هستند که فرکانس قطع نامیده می‌شود و در فرکانس‌های کمتر از آن منتشر نمی‌شوند. بنابراین مود اول تنها مود طولی است که در تمام فرکانس‌ها قابل انتشار است. در فرکانس قطع سرعت فاز به سمت بی‌نهایت و سرعت گروه به سمت صفر میل می‌کند. همچنین مشاهده می‌شود که در فرکانس‌های بالا این نمودار تبدیل به خط مستقیم می‌شود و همان‌طور که از شکل ۵ مشاهده می‌شود نمودارهای سرعت فاز، به یک مقدار ثابت که برابر با سرعت موج سطحی ریلی است، میل می‌کنند. نمودارهای سرعت گروه در شکل ۶ نیز شرایط مشابهی دارند و به مقدار ثابتی میل می‌کنند.

به‌عنوان نمونه با در نظر گرفتن عدد موج به صورت  $kb=10$  جابجایی بی بعد شده در راستای محور  $z$  برای نقاط واقع بر محور  $y$  در مقطع این میله، در شکل‌های (۷) و (۸) رسم شده است. این نمودارها برای انتخاب مود مناسب در آزمون‌های غیر مخرب به کار می‌روند، زیرا برای وضوح امواج دریافتی، معمولاً مودی که تغییر مکان بیشتری روی مرزها ایجاد کند، مناسب‌تر است. بنابراین مودهای اول و پنجم از این نقطه نظر مودهای مناسبی هستند.

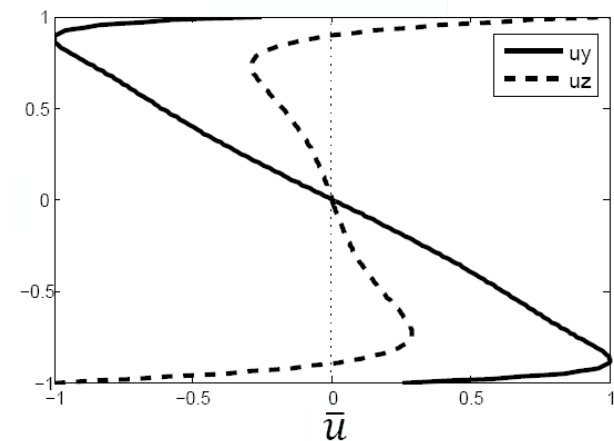
امواج پیچشی سریع‌تر خطی می‌شود و در نتیجه سرعت فاز سریع‌تر به یک مقدار ثابت میل خواهد کرد. همچنین تمام مودهای پیچشی دارای فرکانس قطع هستند که در فرکانس‌های کمتر از آن منتشر نمی‌شوند. بنابراین اگر فرکانس تحریک کوچک‌تر از فرکانس قطع مود اول پیچشی در نظر گرفته شود مود پیچشی در میله ایجاد نخواهد شد.



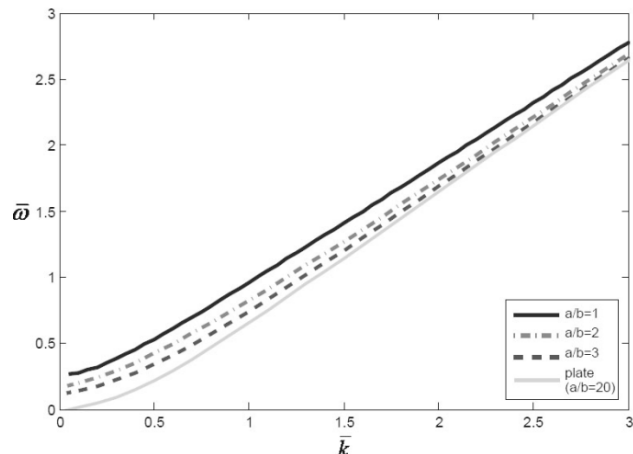
شکل ۱۲: سرعت فاز امواج پیچشی در میله با مقطع مستطیلی



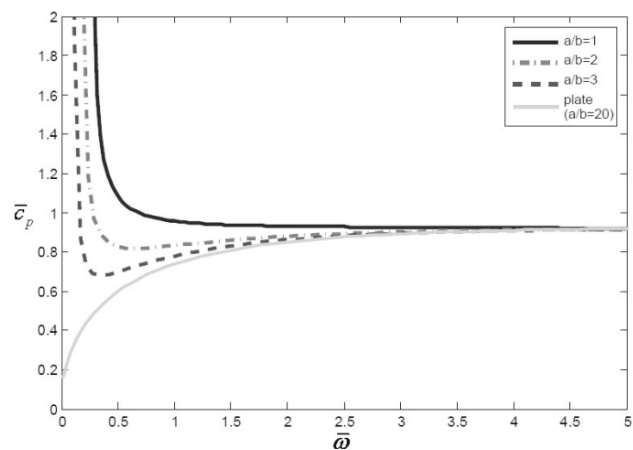
شکل ۱۳: سرعت گروه امواج پیچشی در میله با مقطع مستطیلی



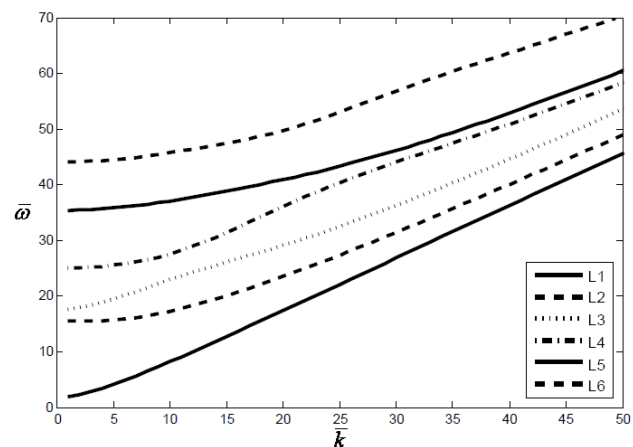
شکل ۱۴: ساختار موج مود اول پیچشی در میله با مقطع مستطیلی در فرکانس ۳۰۰ kHz



شکل ۹: طیف فرکانس اولین مود پیچشی برای میله با مقطع مستطیلی با نسبت اضلاع مختلف

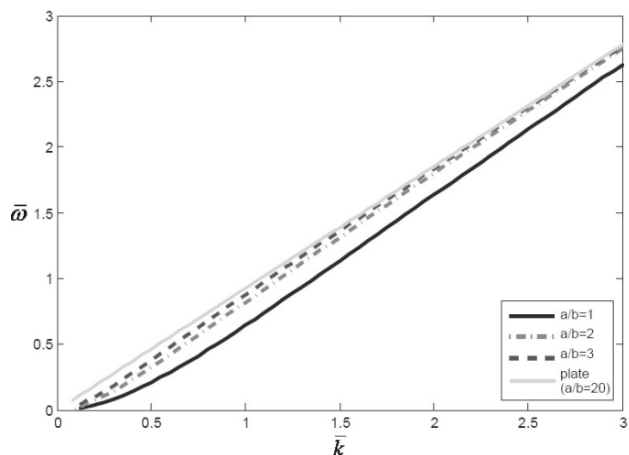


شکل ۱۰: سرعت فاز اولین مود پیچشی برای میله با مقطع مستطیلی با نسبت اضلاع مختلف

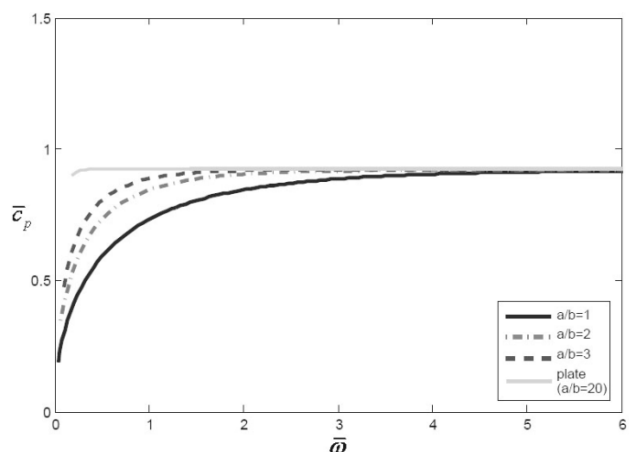


شکل ۱۱: طیف فرکانس امواج پیچشی در میله با مقطع مستطیلی

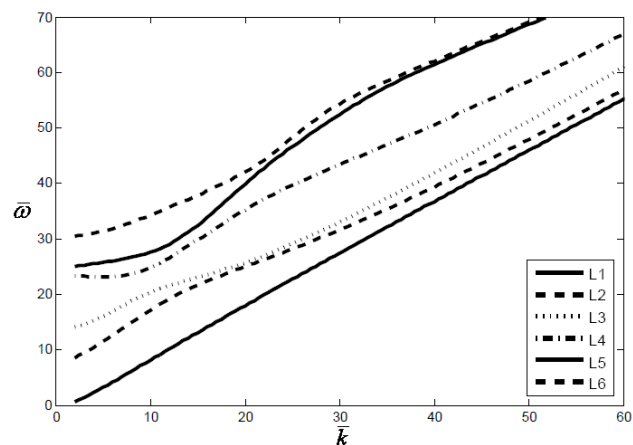
در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود که طیف فرکانس برای اعداد موج بزرگ خطی می‌شود و در نتیجه نمودارهای سرعت فاز و سرعت گروه به مقداری ثابت میل می‌کنند. در مقایسه با امواج طولی، طیف فرکانس



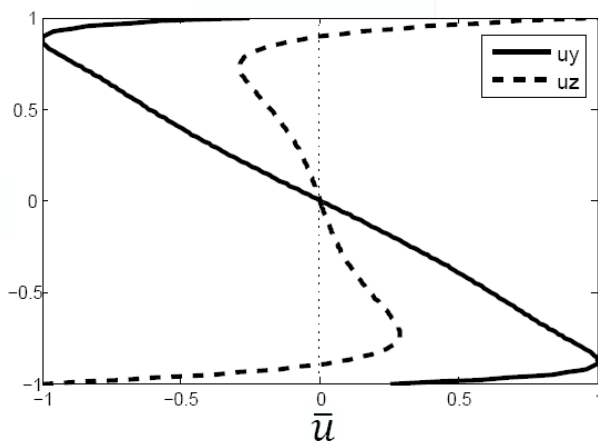
شکل ۱۶: طیف فرکانس اولین مود خمشی برای میله با مقطع مستطیلی با نسبت اضلاع مختلف



شکل ۱۷: سرعت فاز اولین مود خمشی برای میله با مقطع مستطیلی با نسبت اضلاع مختلف



شکل ۱۸: طیف فرکانس موج خمشی در میله با مقطع مستطیلی



شکل ۱۵: ساختار موج مود پنجم پیچشی در میله با مقطع مستطیلی در فرکانس ۳۷۰ kHz

تغییر مکان بدون بعد مود اول و پنجم پیچشی در میله با مقطع مستطیل با نسبت اضلاع ۲ و عدد موج  $kb=10$  به ترتیب در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ رسم شده است.

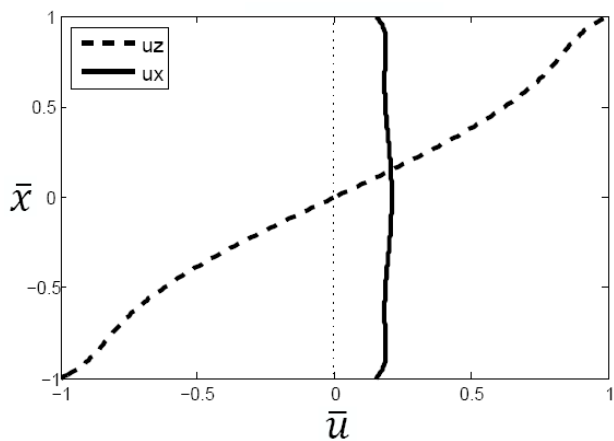
با توجه به اینکه اندازه ضلع‌های مقطع میله باهم برابر نیستند، جابجایی  $u_y$  برای نقاط واقع بر محور  $x$  با جابجایی  $u_x$  برای نقاط واقع بر محور  $y$  متفاوت است. بنابراین برای انتخاب مودهایی با تحریک مناسب باید به این نکته توجه شود، زیرا برای بعضی از مودها جابجایی روی سطوح مختلف میله تفاوت قابل توجهی باهم دارند.

#### ۴-۳- مود خمشی

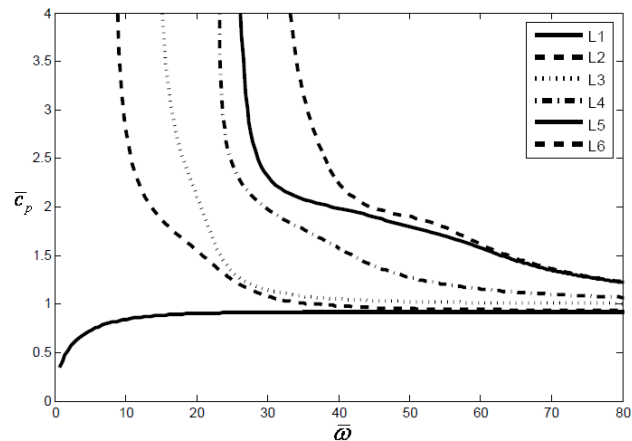
نمودارهای طیف فرکانس و سرعت فاز برای اولین مود خمشی در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ ارائه شده است. با افزایش نسبت پهنا به ضخامت میله، فرکانس امواج قابل انتشار برای یک عدد موج معین، اندکی افزایش می‌یابد و با افزایش عدد موج یا فرکانس، این نمودارها مشابه نمودارهای موج برشی در ورق می‌شوند.

نمودارهای طیف فرکانس، سرعت فاز و سرعت گروه برای شش مود اول خمشی در میله فولادی با مقطع مستطیل و نسبت پهنا به ضخامت ۲، به ترتیب در شکل‌های ۱۸ تا ۲۰ نشان داده شده‌اند. در شکل ۱۸ مشاهده می‌شود که مود اول در  $k=0$  به سمت صفر میل می‌کند، در حالی که سایر مودها به سمت یک فرکانس معین میل می‌کنند. بنابراین غیر از مود اول که در تمام فرکانس‌ها قابل انتشار است سایر مودها دارای یک فرکانس قطع هستند که در آن سرعت فاز به سمت بی‌نهایت و سرعت گروه به سمت صفر میل می‌کند.

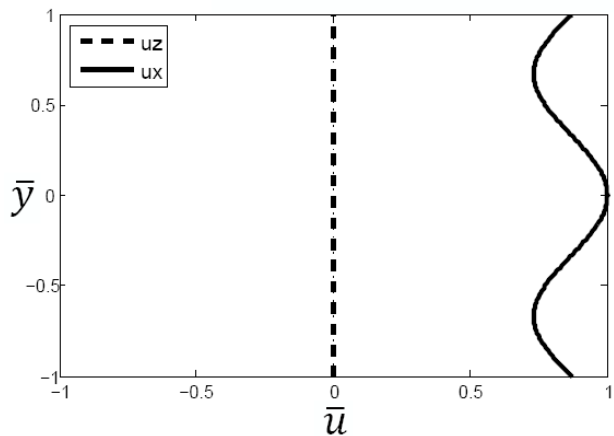
ساختار موج مودهای اول و پنجم خمشی برای میله با مقطع مستطیل با نسبت اضلاع ۲ و عدد موج  $kb=10$  در شکل‌های ۲۱ تا ۲۴ رسم شده است. خط‌چین، جابجایی در جهت محور  $z$  و خط پر، جابجایی در جهت محور  $x$  را نشان می‌دهد.



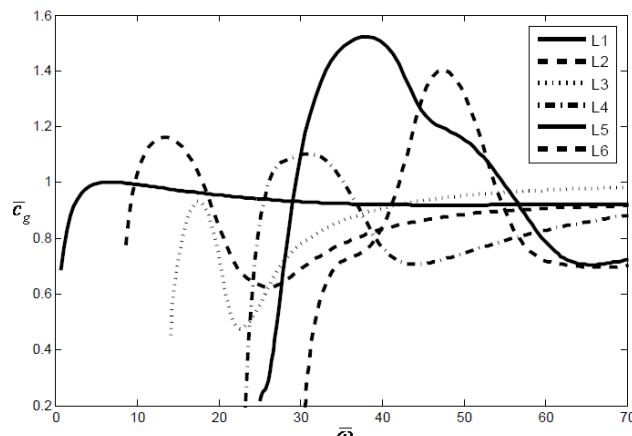
شکل ۲۲: ساختار موج مود اول خمشی در میله با مقطع مستطیلی در فرکانس ۲۹۰ kHz روی محور  $x$



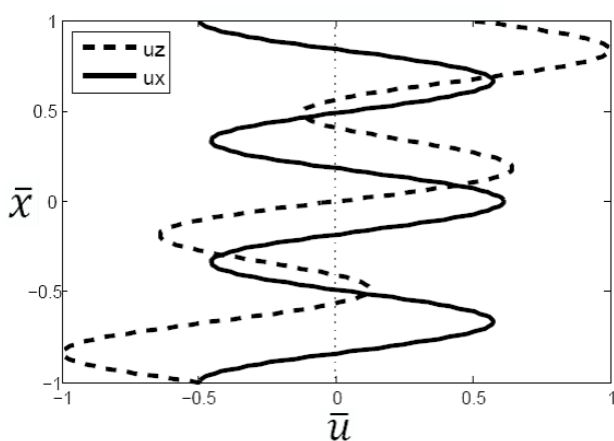
شکل ۱۹: سرعت فاز موج خمشی در میله با مقطع مستطیلی



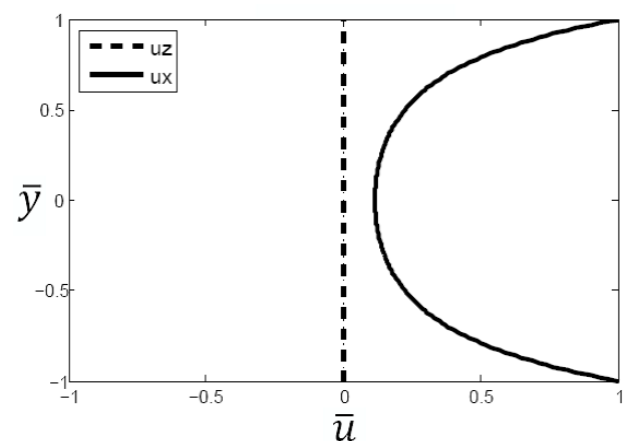
شکل ۲۳: ساختار موج مود اول خمشی در میله با مقطع مستطیلی در فرکانس ۳۵۰ kHz روی محور  $y$



شکل ۲۰: سرعت گروه موج خمشی در میله با مقطع مستطیلی



شکل ۲۴: ساختار موج مود اول خمشی در میله با مقطع مستطیلی در فرکانس ۳۵۰ kHz روی محور  $x$



شکل ۲۱: ساختار موج مود اول خمشی در میله با مقطع مستطیلی در فرکانس ۲۹۰ kHz روی محور  $y$



## ۵- نتیجه گیری

روش جمع آثار به عنوان یک روش تحلیلی برای بررسی انتشار امواج در میله‌هایی با مقطع مستطیل به کار گرفته شد. این روش که اولین بار برای تحلیل نمودارهای تجزیه امواج در میله‌ای با مقطع مربع به کار برده شد [۱۲]، منجر به تعیین مقادیر ویژه یک دستگاه معادلات همگن با بی‌نهایت معادله می‌شود که برای یافتن این مقادیر ویژه باید از روش مناسبی برای کاهش مرتبه ماتریس ضرایب این دستگاه استفاده شود. اگرچه به نظر می‌رسد که با انتخاب تعداد معینی از معادلات که در مطالعه حاضر مورد استفاده قرار گرفته است، جواب‌ها برای مقاطع مستطیلی از دقت کافی برخوردار نباشد، ولی نتایج به دست آمده، با نتایج ارائه شده در مرجع [۱۲] که از روش مشابهی برای حالت خاص مقطع مربع استفاده کرده است، کاملاً انطباق دارد. البته با استفاده از روش‌های جدید حل دستگاه‌ها با بی‌نهایت معادله، امکان دستیابی به پاسخ‌های دقیق‌تر نیز وجود دارد.

در بررسی حاضر ریشه‌های حقیقی معادله مشخصه محاسبه شده‌اند. برای تحلیل کامل رفتار ارتعاشی میله می‌توان ریشه‌های موهومی و یا مختلط معادله مشخصه را نیز استخراج و بررسی کرد. با توجه به نمودارهای به دست آمده، نشان داده شد که برای مقادیر بزرگ عدد موج (محدوده طول موج‌های کوتاه)، سرعت فاز اولین مود طولی، صرف‌نظر از اندازه ابعاد مقطع، به یک عدد ثابت که ممکن است سرعت موج سطحی ریلی باشد میل می‌کند. در برخی منابع تعریف دیگری برای این مقدار ثابت ارائه شده است [۱]. برای مقادیر کوچک عدد موج یا در فرکانس‌های پایین (محدوده طول موج‌های بلند)، با افزایش نسبت پهنا به ضخامت میله، سرعت فاز تمام مودها غیر از اولین مود پیچشی، سریع‌تر به این عدد ثابت میل می‌کند.

برای ایجاد وضوح بیشتر در حسگرهای دریافت‌کننده امواج، جابجایی‌ها باید دامنه قابل توجهی داشته باشند. نمودارهای ساختار موج کمک می‌کنند تا بتوان مود و فرکانس مناسب را به گونه‌ای انتخاب کرد که بیشترین دامنه‌ها روی وجه مورد نظر ظاهر شود. در میله با مقطع مستطیل غیر از مودهای اول طولی و خمشی سایر مودها دارای فرکانس قطع هستند که در فرکانس‌های کمتر از آن منتشر نمی‌شوند. فرکانس‌های قطع در میله با مقطع مستطیل کمتر از فرکانس قطع در مقطع مربع است و با افزایش نسبت اضلاع مقطع میله این فرکانس کاهش بیشتری می‌یابد.

## ۶- مراجع

- [1] Meleshko, V. V., Bondarenko, A. A., Trofimchuk, A. N., Abasov, R. Z., 2010 "Elastic waveguides: History and the state of the art. II", *Journal of Mathematical Sciences*, 167 (2), pp. 197-216.
- [2] Graff, K. F., 1991, "Wave motion in elastic solids", Dover Publications Inc., New York.

- [3] Morse, R. W., 1948, "Dispersion of compressional waves in isotropic rods of rectangular cross section", *J. Acoust. Soc. Am.*, 20, pp.833-838.
- [4] Morse, R. W., 1950, "The velocity of compressional waves in rods of rectangular cross section", *J. Acoust. Soc. Am.*, 22, pp. 219-223.
- [5] Medick, M. A., 1967, "On dispersion of longitudinal waves in rectangular bars", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 34, pp. 714-717.
- [6] Aalami, B., 1973, "Waves in prismatic guides of arbitrary cross section", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 40, pp. 1067-1072.
- [7] Fraser, W. B., 1970, "Longitudinal elastic waves in square bars", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 37, pp. 537-538.
- [8] Hayashi, T., Song, W. J., Rose, J. L., 2003, "Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross section, a rod and rail example", *Ultrasonics*, 41, pp. 175-183.
- [9] Hayashi, T., Tamayama, C., Murase, M., 2006, "Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross section", *Ultrasonics*, 44, pp. 17-24.
- [10] Gunawan A., Hirose S., 2005, "Boundary element analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross section", *Engineering Analysis With Boundary Elements*, Vol. 29, pp. 913-924.
- [11] Miyamoto, T., Yasuura, K., 1977, "Numerical analysis on isotropic elastic waveguides by mode-matching method - II. Particle velocities and dispersion characteristics in rods of rectangular cross section", *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, SU-24, pp. 369-375.
- [12] Tanaka, K., Iwahashi, Y., 1977, "Dispersion relation of elastic waves in bars of rectangular cross section", *Bull. JSME*, 20, pp. 922-929.

