# مدل‌كردن جريان سيال در شكستگي سنگي به روش اتومات سلولي

علي وارث وزيريان[i] *; احمد فهيمي‌فر[ii]

## چكيده

مدل‌سازي جريان سيال درون شكستگي طبيعي سنگي يكي از مسائل مهم در ژئومكانيك بشمار مي‌رود. بطور كلي روشهاي عددي گوناگوني بمنظور مدل‌سازي جريان سيال در شكستگيها بكار مي‌روند. در كنار روشهاي عددي متداول، روش اتومات سلولي قابليت زيادي در مدل‌سازي پديده‌هاي فيزيكي پيچيده مانند جريان سيال، مدل‌سازي گسل و ايجاد و رشد ترك از خود نشان داده است و از اين رو مي‌تواند نقش مفيدي در مدل سازي جريان در شكافهاي سنگي، به كمك ساير روشها ايفا كند.

در اين مطالعه، جريان سيال نيوتني در یک شکستگي با ديواره‌هاي صاف و نيز زبر با بهره‌گيري از روش عددي اتومات سلولي مدل شده است. در اين تحقيق سيال بصورت تك‌فاز در نظر گرفته شده و شكاف طبيعي نيز بصورت دوبعدي مدل مي‌شود. بمنظور مدل‌سازي عددي، برنامه‌اي در محيط برنامه‌نويسي فرترن تهيه شده و مورد استفاده قرار گرفته است. در اين مقاله، ابتدا روش اتومات سلولي معرفي شده و چگونگي كاربرد آن در مدل‌سازي جريان سيال تشريح مي‌گردد. در ادامه، چگونگي مدل‌سازي جريان سيال و چگونگي شبيه‌سازي شرايط مرزي بيان مي‌گردد. در پايان نيز نتايج مدل‌سازي ارائه شده و با روشهاي تحليلي و تجربي مقايسه مي‌شود.

## كلمات كليدي

جريان سيال، شكستگي سنگي ايده‌آل، زبري نسبي، روش اتومات سلولي، شبكه بولتزمن.

# *Fluid Flow Modeling in Single Fracture Using Cellular Automata Method*

Ali Varesvazirian; Ahmad Fahimifar

***ABSTRACT***

Fluid flow simulation through a natural fracture is one of the most important and complex problem in Geomechanics. In general, various analytical and numerical methods are used to model fluid flow in fractures. Cellular automata method has been known as a powerful tool for simulation of complex phenomena such as fluid flow, fault movement and fracture production and propagation in a media. As a result, it can have predominant role on simulation of fluid flow in rock fractures.

In this study, the modeling of fluid flow in ideal fracture has been carried out employing cellular automata method. For this purpose, a computer program has been developed and used in Fortran Power Station Domain. In this paper, the cellular automata method has been introduced and its application in fluid flow modeling described. The method of fluid flow simulation has also been presented and the results compared with available analytical solution.

***KEYWORDS***

Fluid Flow, Single Fracture, Relative Roughness, Cellular Automata, Lattice Boltzmann.

تاريخ دريافت مقاله:۱۳۸۷/۸/۲

تاريخ اصلاحات مقاله:۱۳۸۹/۴/۱

[i] *نويسنده مسئول و دانشجوي دكتراي مكانيک خاک و مهندسي پي، دانشكده مهندسي عمران و محيط زيست، دانشگاه صنعتي اميركبير (پلي‌تكنيک تهران) .Email: avvazirian@aut.ac.ir

[ii] استاد دانشكده مهندسي عمران و محيط زيست و عضو هسته قطب علمي مقاوم‌سازي و بهينه سازي ابنيه، ساختگاه‌ها و شريانهاي حياتي، دانشگاه صنعتي اميركبير (پلي‌تكنيک تهران)، .Email: fahim@Aut.ac.ir

## ۱- مقدمه

بررسي جريان سيال در شكاف طبيعي سنگي موضوعي است كه در زمينه‌هاي گوناگون علوم مهندسي كاربرد فراواني دارد. يكي از موارد كاربرد اين موضوع در مهندسي مخازن نفت بوده كه تحقيقات فراواني در دهه‌هاي اخير در زمينه آن انجام شده است. اهميت اين موضوع در مهندسي مخازن نفت به دليل آن است كه بسياري از بزرگترين ذخائر نفت دنيا در سازندهايي كه بصورت طبيعي درزدار هستند، قرار دارند. در ايران نيز بيش از ۹۰ درصد مخازن نفتي را سنگهاي شكافدار تشكيل مي‌دهد. بنابراين مطالعات در زمينه مدلسازي جريان سيال در اين گونه مخازن، مهم است. بعلاوه اين موضوع در ساير مباحث ژئومكانيك از جمله هيدرولوژي آب زير زميني و دفن زباله‌هاي هسته‌اي نيز كاربرد فراوان دارد.

تاريخچه مطالعه در اين زمينه به نزديک چهار دهه مي‌رسد. بر اين اساس روشهاي فراواني در زمينه مدلسازي جريان در شكافها ارائه شده است. اين روشها بطور كلي دو روند متفاوت را دنبال مي‌كنند. الف: ايده‌آلسازي شكاف و استفاده از روشهاي تحليلي و عددي، و ب: مدلسازي دقيق درزه با درنظر گرفتن تغييرات خصوصيات هندسي و مكانيكي درزه در سطح آن به كمك حل عددي معادلات حاكم بر جريان.

تا كنون مطالعات زيادي در زمينه تعيين نفوذپذيري يک شكستگي منفرد سنگي در اثر عبور جريان تک‌فاز انجام گرفته است ، [۱]، [۲] و [۳]. در اين مطالعات، مقدار نفوذپذيري براي جريان دائمي و لايه‌اي يک سيال بين دو صفحه موازي شيشه‌اي تعيين شده است. براي وارد كردن اثر زبري سطوح در تعيين مقدار دبي عبوري از واحد عرض درزه، $Q/w$، رابطه شماره (۱) ارائه شده است [۴].

$$\frac{Q}{w}=\left(\frac{\Delta p}{12\nu\rho\Delta L}\right)\frac{b^3}{f} \qquad (۱)$$

در اين رابطه كه به قانون مكعب شهرت دارد، Dp، اختلاف فشار بين دو انتهاي درزه بوده و $\rho$ و $\nu$ به ترتيب چگالي و لزجت كينماتيكي سيال مي‌باشد. پارامتر b نيز معرف بازشدگي متوسط درزه $\Delta L$ طول آن است. $f$ ضريب تصحيح براي در نظر گرفتن اثر زبري سطوح بوده كه مقداري بين ۱/۰۴ تا ۱/۶۵ براي آن پيشنهاد شده است. مقدار اين ضريب براي حالت ايده‌آل برابر ۱ است. لوئيس براي تعيين اين ضريب بر حسب زبري نسبي سطوح شكستگي رابطه تجربي شماره (۲) را ارائه كرده است [۲].

$$f=1+8.8(R_r)^{1.5}, \qquad R_r=\frac{\varepsilon}{b} \qquad (۲)$$

كه در آن $R_r$ و $\varepsilon$ به ترتيب زبري نسبي و اندازه ميانگين برآمدگيهاي سطوح مي‌باشد.

در مدلسازي جريان سيال در شكافهاي طبيعي با فرض شبيه‌سازي دقيق هندسه شكاف، استفاده از روشهاي عددي اجتناب‌ناپذير است. روشهاي عددي گوناگوني براي مدلسازي سيال و جريان سيال در درزها و شكستگيها و نيز اثر همراهي آنها ارائه شده است. از اين جمله مي‌توان به روشهاي تفاوت محدود، المان محدود، المان مرزي و المان مجزا اشاره كرد. هريك از اين روشها با توجه به تغييرپذيري خصوصيات درزه در سطح آن، داراي محدوديتهايي از نظر حجم محاسبات هستند. چندي پيش مدلهاي شبكه‌اي (Lattice Models) همراه با روش اتومات سلولي، موفقيتهايي در زمينه مدلسازي پديده‌هاي پيچيده نظير جريان سيالات در مقياس ميكرو به‌دست آورده‌اند [۵] و [۶]. بمنظور سازگار نمودن خواص ماكروسكوپي سيال با معادلات بكار رفته در مدل سازي جريان سيال به كمک مفهوم اتومات سلولي، از تقريب بولتزمن استفاده شده است [۷]. بهمين دليل اتومات سلولي مورد استفاده در ديناميک سيالات بيشتر با نام شبكه بولتزمن شناخته مي‌شود.

اساس روش اتومات سلولي، مدلسازي سيال با استفاده از جزء بجزء سازي محيط و زمان در مقياس ميكرو و توسعه آن در مقياسهاي بزرگتر مي‌باشد. بر اين اساس مدلهاي رياضي ارائه شده در اين روشها داراي مفهوم ساده و در عين حال مفيد براي توصيف پديده‌هاي پيچيده مي‌باشد. از طرفي، به دليل محلي بودن معادلات، احتمال ناپايداري عددي در شبيه‌سازي به اين روش ناچيز است. از اين رو در اين تحقيق براي شبيه‌سازي جريان سيال درون شكستگي منفرد با هندسه و مشخصه هاي ايده‌ال سازي شده از اين روش استفاده شده است.

در اين مقاله ابتدا روش اتومات سلولي به طور مختصر معرفي شده و سپس چگونگي مدلسازي سيالات به كمک اين روش بيان مي‌گردد. در ادامه سازگاري معادلات ديفرانسيل حاكم بر سيالات با روش ياد شده نشان داده شده و به دنبال آن مدلسازي جريان سيال در يک شكاف ايده‌آل به كمک برنامه تهيه شده در محيط فرترن بيان مي‌گردد. در ادامه همچنين شبيه‌سازي جريان درون شكستگيهاي داراي سطوح زبر تشريح شده و نتايج مدلسازي آن ارائه مي‌گردد. در پايان اين نتايج با روشهاي تحليلي و تجربي مقايسه مي‌شود.

## ۲- مروري بر روش اتومات سلولي

تاريخچه اتومات سلولي به سال ۱۹۶۶ ميلادي باز مي‌گردد [۸]. اتومات سلولي یک سيستم جزء بجزء ديناميکي بوده که رفتار آن بر اساس روابط موضعي مشخص مي‌شود. اين سيستم در واقع متشکل از تعداد زيادي اجزاء ساده بوده که توسط یک دسته قوانين موضعي با يکديگر داراي اندرکنش هستند [۹]. ويژگيهاي یک اتومات سلولي عبارتند از:

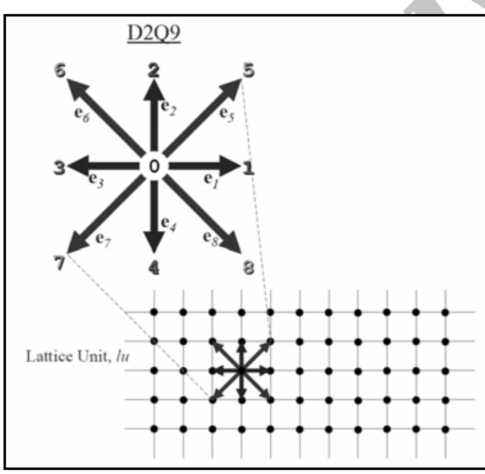
- هر اتومات سلولي از شبکه‌اي يك يا چند بعدي از سلولهاي فرضي تشکيل شده است.
- مشخصه ديگر يك اتومات سلولي، تعريف همسايگي براي هر سلول مي‌باشد. براي هر سلول تعدادي از سلولهاي مجاور بعنوان همسايه آن سلول تعريف مي‌گردد كه سلول مورد نظر تنها با آنها داراي اندرکنش است.
- از مشخصه‌هاي ديگر يك اتومات سلولي، زمان يا پارامتري شبيه آن است که به صورت جزءبجزء تعريف مي‌شود.
- از ويژگيهاي مهم يك اتومات سلولي، تعريف وضعيت (state) براي آن مي‌باشد. به عبارت ديگر براي هر سلول در هر پله زماني، يك وضعيت مشخص از مجموعه وضعيتهاي از پيش‌تعريف شده نسبت داده مي‌شود.
- در هر اتومات سلولي، قانون و يا قوانيني (Rules) حاکم است که اندر كنش بين هر سلول با همسايگانش را مشخص كرده و بر اساس آن، وضعيت يك سلول را در هر مرحله با توجه به وضعيت سلولهاي همسايه آن در مرحله قبل توصيف مي كند.

ملاحظه مي‌گردد که اتوماتهاي سلولي از ديدگاه كلي داراي مفهوم بسيار ساده‌اي هستند. دليل آنچه كه اين ابزار مي‌تواند رفتار سيستم‌هاي پيچيده فيزيكي را شبيه‌سازي كند، انعطاف‌پذيري در تعريف خصوصيات آن نظير همسايگي و به ويژه قوانين حاكم بر آن مي‌باشد. همين ويژگي باعث گرديده است كه با بيان يك مجموعه قوانين ساده، بتوان رفتار پيچيده برخي پديده‌ها كه برخي ماهيت تصادفي نيز دارند را به سادگي بيان نمود. فريسچ [۱۰] از اين قابليت اتومات سلولي براي مدل‌سازي رفتار سيالات استفاده نموده و مدل اتومات سلولي شبکه گازي (Lattice Gas Cellular Automata) را ارائه نمود. او همچنين با استفاده از تقريب بولتزمن توانست مفاهيمي نظير فشار و ويسکوزيته را با اتومات سلولي خود بيان کرده و معادلات رفتاري ماکروسکوپي سيال يعني معادله ناوير-استوکس و حالات خاص آنرا نيز در مدل خود برقرار سازد. اين مدل که به مدل شبکه بولتزمن شهرت دارد، بعدها توسط محقق ديگري و با الگوهاي متنوعي توسعه يافت [۱۱]. در بخش بعدي روش اتومات سلولي ارائه شده توسط مک‌نامارا و زانتي [۱۲] که نوع توسعه يافته مدل فريسچ بوده، تشريح شده و چگونگي سازگاري آن با معادلات ماکروديناميک بيان مي‌گردد.

## ۳- روش اتومات سلولي شبکه بولتزمن

### ۳-۱- شبکه بولتزمن

همانگونه که گفته شد، روش شبکه بولتزمن، تکامل يافته روش شبکه گازي بوده که بر اساس ديناميک مولکولي ساده شده‌اي توسعه يافته است. در اين اتومات سلولي فضا و زمان بصورت جزء بجزء در نظر گرفته مي‌شود. بعبارت ديگر فضا بصورت یک مجموعه از سلولهايي در نظر گرفته مي‌شود که از طريق شبکه با سلولهاي همسايه خود در ارتباط است. ذرات سيال موجود در هر سلول تنها از طريق شبکه و بر اساس قوانين برخورد و انتشار مي‌تواند به سلولهاي مجاور منتقل شود. تا کنون انواع مختلفي از شبکه‌هاي دوبعدي و سه بعدي مورد استفاده قرار گرفته است. شبکه دو بعدي به‌کار رفته در اين مطالعه، یک شبکه مربعي با ۸+۱ همسايگي (هشت سلول مجاور بهمراه سلول مبدأ) بوده که به شبکه D2Q9 معروف است. اين شبکه و همسايگي‌هاي آن در شکل (۱) ديده مي‌شود.




شکل (۱): شبکه بولتزمن بکار رفته در اين مطالعه[۱۳]

### ۳-۲- معادلات شبکه بولتزمن

در شبکه بولتزمن بر خلاف شبکه گازي، بجاي استفاده از متغيرهاي گسسته Boolean براي پر يا خالي بودن سلولها، از متغيرهاي پيوسته استفاده مي‌شود. اين متغير پيوسته در واقع

يک متغير احتمالاتي بوده که احتمال حرکت سيال در هر مسير را نشان مي‌دهد. معادلات کلي شبکه بولتزمن بصورت (۳) مي‌باشد.

$$f_i(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i\Delta x, t+\Delta t) = f_i(\mathbf{x},t) + \Omega_i(f(\mathbf{x},t)), \quad i=0,1,..,8 \qquad (۳)$$

که در آن $f_i(\mathbf{x},t)$ مقدار چگالي ورودي سيال به گره با مختصات $\mathbf{x}$ در زمان $t$ و در جهت $i$ مي‌باشد. بردارهاي جهت $\mathbf{e}_i$ به صورت (۴) تعريف مي‌گردد.

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} (0,0) & i=0 \\ \left(\cos\left([i-1]\frac{\pi}{2}\right), \sin\left([i-1]\frac{\pi}{2}\right)\right) & i=1,2,3,4 \\ \sqrt{2}\left(\cos\left([i-5]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right), \sin\left([i-5]\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) & i=5,6,7,8 \end{cases} \qquad (۴)$$

پارامترهاي $\Delta\mathbf{x}$ و $\Delta t$ مقدار نمو مکان و زمان مي‌باشد. تابع $\Omega$، عملگر برخورد ناميده مي‌شود که نرخ تغيير توزيع سيال در هر جهت را در اثر برخورد تعيين مي‌کند. به عبارت ديگر اين عملگر همان قوانين حاکم بر اتومات سلولي مي‌باشد.

با توجه به تعريف ارائه شده براي $f$، مقدار چگالي سيال، $\rho$، و بردار سرعت آن، $\mathbf{u}$، در هر نقطه به کمک (۵) و (۶) قابل بيان است.

$$\rho = \sum_i f_i \qquad (۵)$$

$$\rho\mathbf{u} = \sum_i f_i \mathbf{e}_i \qquad (۶)$$

همچنين از آنجا که عملگر $\Omega$، بيان کننده مفهوم برخورد در فيزيک مي‌باشد، بايستي قوانين بقاي جرم و اندازه‌حرکت را برآورده نمايد:

$$\sum_i \Omega_i = 0 \qquad (۷)$$

$$\sum_i \Omega_i \mathbf{e}_i = 0 \qquad (۸)$$

به کمک (۷) و (۸) برخي از خصوصيات تابع عملگر برخورد قابل تعيين مي‌باشد. با استفاده از تقريب بولتزمن و فرض خطي بودن عملگر برخورد فرم کلي اين تابع در شرايط کلي به صورت (۹) تخمين زده مي‌شود[۱۴].

$$\Omega_i(f(\mathbf{x},t)) = -\frac{1}{\tau}\left[f_i(\mathbf{x},t)\right] - f_i^{eq}(\mathbf{x},t) \qquad (۹)$$

در (۹) $f^{eq}$، تابع توزيع چگالي در شرايط تعادلي بوده و $\tau$، پارامتر بدون بعد تمدد زمان (single Relaxation time) ناميده مي‌شود که سرعت نزديک شدن به شرايط تعادل را کنترل مي‌کند. چن و همکارانش در شرايط سرعت کم (عدد ماخ کوچک) با بسط تابع $f^{eq}$، فرم کلي آنرا بدست آوردند [۱۵]. با توجه به اينکه معادلات ديفرانسيل جاري بر سيالات تراکم ناپذير نظير ناوير استوکس، غير خطي از درجه ۲ است، بسط تابع $f^{eq}$ در صورت حذف جملات مرتبه بالاتر بصورت رابطه (۱۰) خواهد بود.

$$f_i^{eq} = \rho\left[a_1 + a_2\mathbf{e}_i.\mathbf{u} + a_3(\mathbf{e}_i.\mathbf{u})^2 + a_4u^2\right] \qquad (۱۰)$$

که در آن $u=|\mathbf{u}|$ بوده و $a_1$ تا $a_4$ ثوابت شبکه بولتزمن هستند که با توجه به هندسه آن و روابط پايستاري جرم و اندازه حرکت ((۷) و (۸)) تعيين مي‌گردد. براي مدل مورد استفاده در اين تحقيق، رابطه (۱۰) بصورت (۱۱) قابل باز نويسي است[۱۶].

$$f_i^{eq} = \rho\omega_i\left[1 + \frac{3}{c}\mathbf{e}_i.\mathbf{u} + \frac{9}{2c^2}(\mathbf{e}_i.\mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2}u^2\right] \qquad (۱۱)$$

که در آن $c = \Delta\mathbf{x}/\Delta t$، ثابت سرعت شبکه بوده و $\omega_i$ به صورت (۱۲) مي‌باشد.

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{4}{9} & i=0 \\ \frac{1}{9} & i=1,2,3,4 \\ \frac{1}{36} & i=5,6,7,8 \end{cases} \qquad (۱۲)$$

### ۳-۳- استخراج خواص ماکروديناميکي از مشخصه‌هاي ميکروديناميکي شبکه بولتزمن

مي‌توان نشان داد که براي مدل دو بعدي D2Q9، مقدار فشار، $p$، و ويسکوزيته کينماتيکي سيال، $\nu$، به ترتيب از روابط (۱۳)و (۱۴) قابل تعيين است[۷].

$$p = c_s^2.\rho = \frac{c^2}{3}.\rho \qquad (۱۳)$$

$$\nu = \frac{\Delta t.c^2}{3}\left(\tau - \frac{1}{2}\right) \qquad (۱۴)$$

در (۱۳) $c_s$ ثابت سرعت صوت شبکه است که با توجه به ويژگيهاي شبکه D2Q9 برابر $c(1/\sqrt{3})$ است. توجه شود که $c_s$ همواره برابر سرعت واقعي صوت در سيال مورد نظر نيست.

### ۳-۴- دقت شبيه‌سازي

براي دست‌يابي به دقت کافي درنتايج شبيه‌سازي، مقدار پارامتر $\Delta x$، بايد در مقايسه با $L_{Hydro}$ (کوچکترين بعد ماکروسکوپي مدل که بر جريان سيال تأثيرگذار است) به اندازه کافي کوچک باشد [۱۴]. همچنين، (۹) در صورتي معتبر است که عدد ماخ $(Ma)$ مدل کوچک باشد [۱۷]. عدد ماخ حداکثر سرعت سيال به سرعت صوت در مدل $(u_{max}/c_s)$ مي‌باشد. لذا به منظور کوچک نگه‌داشتن آن بايد سرعت صوت در مدل، $c_s$، و پيرو

آن مقدار $c$ به اندازه كافي بزرگ اختيار شود. اين خود بمعني نسبت $\Delta x / \Delta t$ بزرگ يا مقدار $\Delta t$ بسيار كوچک است.

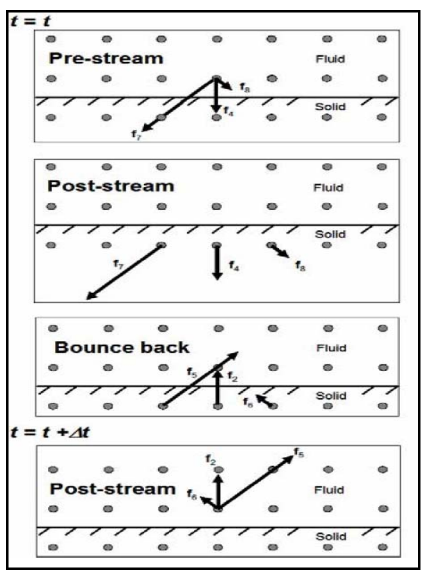
با داشتن مقدار واقعي $\nu$ مي‌توان پارامتر $\tau$ را از رابطه (۱۵) كه معكوس (۱۴) است، بدست آورد.

$$\tau = \frac{3}{\Delta t . c^2} \nu + \frac{1}{2} \qquad (۱۵)$$

رابطه ياد شده براي مقادير واقعي $\nu$، يک حد پايين براي $\tau$ ارائه مي‌كند ($\tau = ۰/۵$). مطالعات نشان مي‌دهد كه براي مقادير كوچک $\tau$ (نزديک به ۰/۵) الگوريتم بولتزمن ناپايدار مي گردد. درحاليكه براي مقادير بزرگ اين پارمتر ($\tau > ۱$)، تابع $f$ بطور يكنواخت و آرام به $f^{eq}$ همگرا مي‌گردد. براي مقدار $\tau = ۱$، توزيع سرعت به تندي به حالت نهايي رسيده و براي مقادير $۰/۵ < \tau < ۱$، تابع $f$ حول $f^{eq}$ با كاهش دامنه نمايي نوسان كرده و همگرا مي‌گردد [۱۸].

### ۳-۵- شرايط مرزي

يكي از مهمترين مسائل در روش اتومات سلولي شبكه بولتزمن، چگونگي تعريف شرايط مرزي است. بطور كلي روشهاي گوناگوني براي مدل‌سازي عددي شرايط مرزي وجود دارد كه بسته به شرايط و نيازها مورد استفاده قرار مي‌گيرد. از اين جمله مي‌توان به مرزهاي بدون اصطكاک، بدون لغزش، متناوب، و مرزهاي آزاد اشاره كرد. [۱۳]. در اين پژوهش سطوح درزه به صورت مرزهاي بدون لغزش در نظر گرفته مي‌شوند. در اين مرزها معادلات شبكه به گونه‌اي در نظر گرفته مي‌شود كه جهت جريان مبادله شونده بين گره‌هاي داخلي و مرزي پس از برخورد معكوس شود [۱۹]. شرايط مرزي ياد شده بطور شماتيک در شكل (۲) نشان داده شده است.




شكل (۲): چگونگي باز توزيع جريان در مرز برگشتي [۱۸]

بمنظور مدل نمودن شرايط مرزي در ورودي و خروجي درزه، از شرايط مرزي آزاد با كنترل فشار، مطابق روش ارائه شده توسط Sukap [۱۳] استفاده شده است.

### ۳-۶- شرايط اوليه

از آنجا كه اتومات سلولي شبكه بولتزمن، يک سيستم ديناميک است، لذا مي‌توان آن را براي هر الگوي اوليه ممكن اجرا نمود. الگوي اوليه شامل مقادير اوليه فشار و سرعت براي تمامي گره‌هاي داخلي مي‌باشد اما از آنجا كه محاسبه مقدار $f$ اوليه به طور مستقيم از مقادير فشار و سرعت اوليه ممكن نيست، بجاي سرعت و فشار اوليه، مقدار تابع $f$ در شرايط اوليه فرض گرديده و فشار و سرعت اوليه از آن محاسبه مي‌گردد. چنانچه سيستم مورد نظر يک جريان دائمي باشد، ميدان فشار و سرعت در شبكه بولتزمن، پس از اجراي چند مرحله به شرايط دائمي خواهد رسيد و پس از آن بدون تغيير مي‌ماند. بديهي است در اين مورد انتخاب مناسب شرايط اوليه در كاهش زمان همگرا شدن مدل بسيار مؤثر است.

## ۴- شبيه‌سازي جريان سيال در شكستگي سنگي ايده‌آل به كمک روش شبكه بولتزمن

### ۴-۱- هندسه مدل

براي مدل سازي جريان سيال در شكاف ايده‌آل سنگي، يک شكاف دو بعدي با بازشدگي ۵ ميليمتر و طول ۵۰ ميليمتر در نظر گرفته شده است.

### ۴-۲- انتخاب پارامترهاي مدل

براي مدل سازي جريان سيال از مدل دوبعدي D2Q9 كه در بخشهاي قبل توضيح داده شد، بهره گرفته شده است. لزجت كينماتيكي سيال، $\nu = ۱ \ mm^2/s$ (معادل لزجت آب در دماي ۲۰ درجه سانتيگراد) در نظر گرفته شده است. در اين راستا، پارامترهاي مدل مطابق (۱۶) انتخاب شده است:

$$\begin{aligned} &\Delta x = 0.05mm << L_{hydro} = 5mm \\ &\Delta t = 0.0004s \Rightarrow c_s = 72.17\, mm/s \\ &\tau = \frac{3}{\Delta t . c^2}\nu + \frac{1}{2} = 0.98 \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

پارامترهاي مدل با رعايت موارد بند ۳-۴ انتخاب شده‌اند. همچنين فشار ورودي ۰/۴ پاسكال در برابر فشار خروجي ۰/۲ پاسكال به مدل اعمال گرديده است. در شرايط اوليه تمامي مقادير $f_i(\mathbf{x},0)$ براي سلولهاي داخلي صفر فرض شده است.

## ۴-۳- ابزار مدل‌سازي

بمنظور محاسبات عددي مورد نياز، برنامه‌اي در محيط فرترن تهيه شده است كه قابليت شبيه‌سازي مدل شبكه بولتزمن، حل معادلات و ايجاد شرايط مرزي مورد نظر را دارا مي‌باشد. روند انجام محاسبات در اين برنامه عبارت است از:

- ابتدا پارامترهاي ورودي شامل ابعاد هندسي درزه، ويژگيهاي سيال، شرايط مرزي و شرايط اوليه تعريف مي‌شود.
- بعنوان نقطه آغاز، مقادير اوليه تابع توزيع چگالي، $f_i(\mathbf{x},t)$ براي همه نقاط داخلي فرض گرديده و اختصاص داده مي‌شود. فرض اوليه مي‌تواند متناسب با شرايط اوليه تعيين گردد.
- به كمك (۵) و (۶)، مقادير اوليه چگالي و سرعت براي تمامي نقاط تعيين مي‌گردد.
- با توجه به معلوم بودن مقادير چگالي و سرعت، مقدار تابع $f^{eq}$ به كمك (۱۱) قابل محاسبه خواهد بود.
- پس از تعيين تابع $f^{eq}$ ، مقدار عملگر برخورد از (۹) محاسبه مي‌گردد.
- تابع توزيع چگالي خروجي از گره‌ها، $f_i^{/}(\mathbf{x},t)$ در زمان $t$ از رابطه (۱۷) محاسبه مي‌شود.

$$f_i^{/}(\mathbf{x}_i,t)= f_i(\mathbf{x},t)+\Omega_i\left(f(\mathbf{x},t)\right), \qquad (۱۷)$$

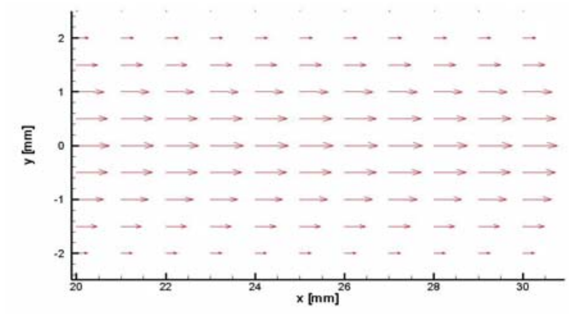
- در اين مرحله، تابع توزيع چگالي خروجي بعنوان ورودي گره‌هاي همسايه در نظر گرفته مي‌شود:

$$f_i(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i\Delta x,t+\Delta t)= f_i^{/}(\mathbf{x},t) \qquad (۱۸)$$

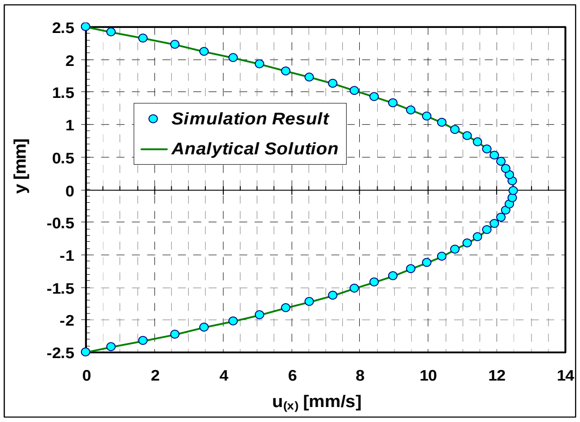
- مراحل ياد شده تا رسيدن به وضعيت پايدار يا زمان مورد نظر ادامه مي‌يابد. وضعيت پايدار در برنامه حالتي است كه نسبت تغييرات متوسط سرعت در هر مرحله نسبت به مرحله قبل، از ۰/۰۱ درصد كمتر شود.

## ۴-۴- نتايج مدل سازي عددي

براي شرايط تعريف شده، شبيه‌سازي عددي جريان سيال پس از تكرار مراحل زياد، به وضعيت پايدار همگرا گرديده است. در اين حالت، ميدان سرعت سيال در محدوده مياني شكستگي برابر شكل (۳) به دست آمده است. همچنين، پروفيل مؤلفه طولي سرعت سيال در مقطع عرضي گذرنده از وسط درزه در شكل (۴) نشان داده شده است. در اين شكل، پروفيل سرعت سيال كه بر اساس حل تحليلي مسأله برابر (۱۹) به دست آمده است نيز، مشخص شده است. همانگونه كه ديده مي‌شود، نتايج شبيه‌سازي عددي از برابري مناسبي با نتايج حل تحليلي برخوردار است.




شكل (۳): ميدان بردار سرعت سيال در محدوده مياني درزه

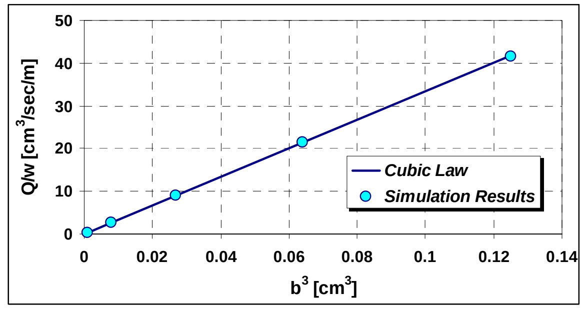



شكل (۴): توزيع مؤلفه طولي سرعت سيال بر روي مقطع عرضي گذرنده از وسط درزه

$$u_x(x,y)=u_x(y)=\frac{h^2(p_2-p_1)}{2\nu.\rho.L}\times\left(1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right) \qquad (۱۹)$$
$$u_y(x,y)=0$$

در رابطه ياد شده كه حل تحليلي معادله عمومي ناوير-استوكس، براي شرايط خاص اين مسأله است، $u_x$ و $u_y$ بترتيب مؤلفه هاي بردار سرعت در جهت $x$ و $y$ بوده و $(x,y)$ مختصات نقطه مورد بررسي مي‌باشد. $h$ برابر نصف بازشدگي درزه بوده $(h=b/2)$ و $L$ طول آن است. پارامترهاي $p_1$ و $p_2$ بترتيب فشار سيال در دو انتهاي درزه بوده و $\rho$ و $\nu$ نيز بترتيب چگالي و ويسكوزيته كينماتيكي سيال مي‌باشد.

به منظور بررسي اثر بازشدگي درزه، $b$، بر مقدار جريان سيال، تحليل فوق براي درزه‌هاي با باز شدگي مختلف از ۱ تا ۴ ميليمتر تكرار شده و جريان عبوري از درزه با انتگرال گيري از پروفيل عرضي سرعت محاسبه شده است. نمودار تغييرات دبي عبوري از درز با مكعب بازشدگي در شكل (۵) نشان داده شده است. همانگونه كه ملاحظه مي‌گردد، مقدار دبي با $b^3$ متناسب است. ضريب تناسب نيز برابر $\Delta p/12\nu\rho$ مي‌باشد. بر اين اساس قانون مكعب مطابق (۱) با ضريب تصحيح ۱ براي درزه‌هاي ايده‌آل شبيه‌سازي شده برقرار است.



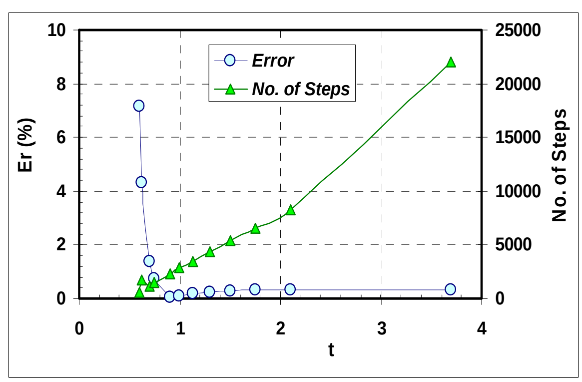

شكل (۵): نمودار تغييرات دبي عبوري از واحد عرض درزه بر حسب مكعب بازشدگي آن

## ۴-۵- مطالعه پارامتريک و ارزيابي دامنه كاربرد مدل

به منظور تعيين دامنه كاربرد پارامترها و سنجش محدوده درستي مدل، بر روي برخي متغيرهاي مدل شامل $\tau$ و $Ma$، مطالعه پارامتري انجام گرفته است. اين متغيرها به اين دليل انتخاب شده‌اند كه هريک در برگيرنده تعدادي از پارامترهاي تأثيرگذار مي‌باشد. به علاوه، تحليل پارامتريک براي لزجت كينماتيكي نيز به دليل اهميت آن انجام شده است. شبيه‌سازي با تغيير دادن هريک از اين پارامترها به صورت مستقل تكرار شده و خطاي شبيه‌سازي (نسبت سرعت حداكثر به دست آمده از شبيه‌سازي به مقدار محاسبه شده از حل تحليلي) و نيز تعداد مراحل مورد نياز براي رسيدن به وضعيت پايدار تعيين شده است. اين دو شاخص به ترتيب نمايانگر دقت و سرعت شبيه‌سازي مي‌باشد. در ادامه نتايج اين تحليل پارامتريک ارائه مي‌گردد. گفتني است در تمامي اين شبيه‌سازيها عدد رينولدز كوچک بوده و شرايط جريان لايه‌اي بر قرار بوده است.

پارامتر $\tau$

به منظور تحليل پارامتريک $\tau$، $\Delta x$ و $\Delta t$ به طور متناسب تغيير داده شده كه نتيجه آن تغيير $\tau$ و ثابت ماندن $Ma$ مي‌باشد. نتايج اين تحليل در شكل (۶) نشان داده شده است.

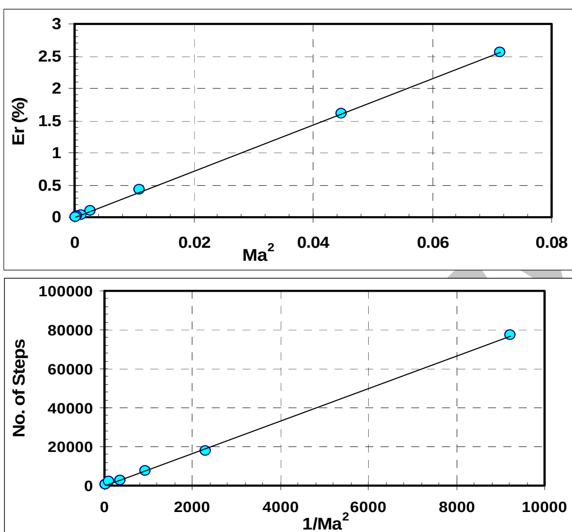



شكل (۶): نمودار تغييرات شاخص خطا و تعداد مراحل شبيه‌سازي به تغييرات $\tau$

همانگونه كه ملاحظه مي‌گردد، خطاي شبيه سازي به ازاي مقادير $\tau$ بين ۰/۹ تا ۱ حداقل بوده و به ازاي مقادير كمتر از آن به شدت زياد مي‌گردد. شاخص خطاي شبيه‌سازي براي مقادير بيش از ۱ به طور نسبي ثابت مانده است. درحاليكه تعداد مراحل مورد نياز براي دست‌يابي به شرايط پايدار، با افزايش $\tau$ به صورت هموار افزايش مي‌يابد. بر اين اساس مقدار بهينه $\tau$ كه به ازاي آن دقت و سرعت شبيه‌سازي هردو رضايت بخش باشد، نزديک به ۱ است.

پارامتر $Ma$

در اين حالت نيز مقادير $\Delta x$ و $\Delta t$ به گونه‌اي تغيير داده مي‌شود كه عدد $Ma$ تغيير كرده، ولي $\tau$ ثابت بماند ($\tau \approx 1$). نتايج اين تحليل در شكل (۷) نشان داده شده است. همانگونه ديده مي‌شود، خطاي شبيه سازي به صورت خطي با مجذور عدد $Ma$ وابسته است؛ درحاليكه تعداد مراحل مورد نياز براي رسيدن به حالت پايدار داراي رابطه خطي با معكوس $Ma^2$ مي‌باشد. بنابراين كاهش عدد ماخ منجر به افزايش دقت و نيز افزايش زمان شبيه‌سازي مي‌گردد.

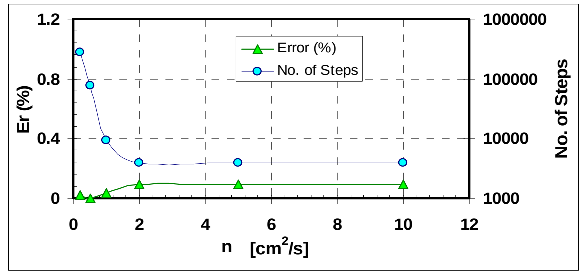



شكل (۷): نمودار تغييرات شاخص خطا و تعداد مراحل شبيه‌سازي به تغييرات عدد $Ma$

لزجت كينماتيكي $\nu$

تغيير لزجت كينماتيكي بدون تغيير دادن $\Delta x$ و $\Delta t$، منجر به تغيير هردو پارامتر $\tau$ و $Ma$ مي‌گردد. اما از آنجا كه خطاي شبيه‌سازي به اين دو پارامتر وابسته است، بايد همراه با تغيير $\nu$، $\Delta x$ و $\Delta t$ را نيز طوري تغيير داد تا در وهله نخست مقدار $\tau$ در حدود ۱ باقي بماند و ديگر آنكه مقدار $Ma$ نيز بيش از ۰/۱ نشود. نتايج تحليل حساسيت نشان مي‌دهد كه مقدار خطاي شبيه سازي در اين حالت كم و مستقل از تغييرات $\nu$ است. در

حاليكه مقدار مراحل مورد نياز براي رسيدن به حالت پايدار با كاهش مقدار $\nu$ به شدت افزايش مي‌يابد (شكل (۸)).




شكل (۸): نمودار تغييرات خطاي شبيه‌سازي و تعداد مراحل آن به تغييرات لزجت كينماتيكي، $\nu$

## ۵- بررسي اثر زبري بر شدت جريان عبوري از درزه

در بخش گذشته، جريان سيال درون شكستگي ايده‌آل شبيه‌سازي شده و نتايج آن با حل تحليلي مقايسه شد. همچنين تحليل حساسيت براي پارامترهاي مدل انجام گرفته و مقادير مناسب آنها تعيين شد. در اين بخش، با استفاده از نتايج به دست آمده، شبيه‌سازي سيال درون شكستگي با سطوح زبر انجام شده و نتايج آن ارائه مي‌گردد. بدين منظور ابتدا چگونگي توليد سطوح زبر تشريح شده و پس از بيان شيوه شبيه‌سازي، نتايج آن ارائه مي‌شود.

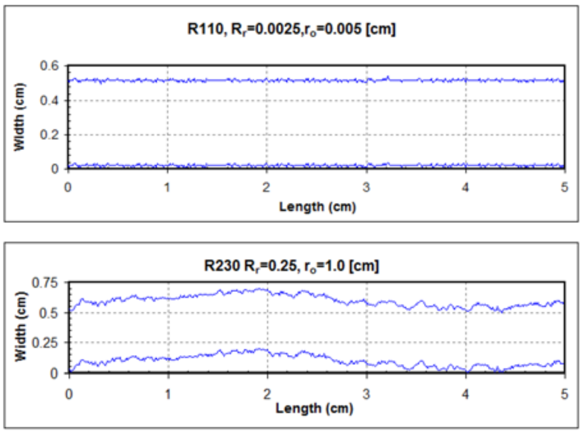
### ۵-۱- توليد سطوح زبر

در اين بخش اثر زبري سطوح شكستگي بر شدت جريان عبوري از آن مورد بررسي قرار مي گيرد. بر اين اساس شكستگيهايي با باز شدگي يكسان ولي زبري هاي متفاوت توليد شده و جريان سيال درون آنها شبيه‌سازي مي‌گردد. سطوح توليد شده همگي به طول ۵ سانتيمتر و بازشدگي ۵ ميليمتر بوده درحاليكه زبري نسبي آنها ۰/۰۰۲۵، ۰/۰۲۵، ۰/۰۷۵ و ۰/۲۵ مي‌باشد. براي توزيع زبري از فرآيند گاوسي برگشتي درجه اول (Gaussian first-order auto-regressive Process) يا به اختصار $AR1$ استفاده شده است. به كمك اين روش همبستگي زبري روي هر سطح با استفاده از پارامتر طول همبستگي فاصله‌اي (Spatial Correlation Length) يا $r_o$ ايجاد مي‌گردد. در روش $AR1$، متغير تصادفي همبسته $X^{(L)}$ در موقعيت $L$، به كمك (۲۰) از $X^{(L-1)}$ (متغير تصادفي وابسته در موقعيت $L-1$) و متغير تصادفي مستقل $Y^{(L)}$ در همان موقعيت به دست مي‌آيد:

$$X^{(L)} = Y^{(L)} + R_1 X^{(L-1)} + \mu, \qquad R_1 = (-1/r_o) \tag{۲۰}$$

در (۲۰)، $Y^{(L)}$ متغير تصادفي مستقل با ميانگين صفر و واريانس $\sigma^2\left[1-(R_1)^2\right]$ بوده و $\mu$ و $\sigma^2$ به ترتيب ميانگين و واريانس متغير تصادفي همبسته $X$ مي‌باشد.

در اين پژوهش به ازاي هر زبري نسبي، چهار شكستگي با طول همبستگي فاصله‌اي $r_o = ۰/۰۰۵$، ۰/۰۵، ۰/۵، ۱/۰cm توليد گرديده است. لذا در مجموع ۱۶ شكستگي با سطوح زبر توليد گرديده و شبيه‌سازي جريان سيال درون آنها انجام شده است. در شكل (۹) دو نمونه از اين شكستگيها نشان داده شده است.




شكل (۹): نمونه‌هايي از درزه‌هاي توليد شده با زبري نسبي $R_r$ و فاصله همبستگي $r_o$

### ۵-۲- ابزار مدل‌سازي و پارامترهاي مدل

بمنظور شبيه‌سازي جريان سيال، روش شبكه بولتزمن كه در بخش ۳ معرفي شد، به كار گرفته شده است. براي انجام محاسبات عددي مورد نياز، از برنامه تهيه شده در محيط فرترن كه در بند ۴-۳ معرفي شد، با همان خصوصيات استفاده شده است. براي شبيه‌سازي مرز سيال با سطوح درزه از شرايط مرزي با اصطكاك كامل استفاده شده است. همچنين بمنظور مدل نمودن شرايط مرزي در ورودي و خروجي درزه، از شرايط مرزي آزاد با كنترل فشار برابر روش ارائه شده توسط Sukap [۱۳] استفاده شده است.

در اين قسمت نيز لزجت كينماتيكي سيال شبيه‌سازي شده، $\nu = ۱ \; mm^2/s$ (معادل لزجت آب در دماي ۲۰ درجه سانتيگراد) و چگالي $\rho = ۱ \; \text{kg/cm}^3$ در نظر گرفته شده است. در اين راستا، پارامترهاي مدل مطابق (۲۱) انتخاب شده است:

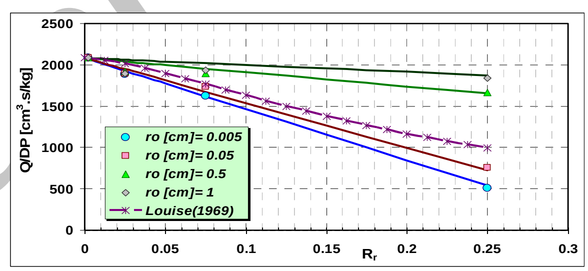
$$\begin{aligned} &\Delta x = 0.05mm << L_{hydro} = 5mm \\ &\Delta t = 0.0004s \Rightarrow c_s = 72.17\,mm/s \\ &\tau = \frac{3}{\Delta t.c^2}\nu + \frac{1}{2} = 0.98 \end{aligned} \tag{۲۱}$$

براي ايجاد جريان سيال، اختلاف فشار ۲، ۲۰، ۲۰۰ و ۲۰۰۰

پاسكال بين ورودي و خروجي درزه‌هاي مختلف ايجاد شده و شبيه‌سازي انجام گرفته است. نتايج شبيه‌سازي‌ها در بند بعد ارائه مي‌شود.

۵-۳- نتايج شبيه‌سازي

نتايج شبيه سازي نشان مي‌دهد كه مطابق انتظار، براي همه درزه‌ها رابطه خطي بين جريان عبوري از درزه و اختلاف فشار بين دو سوي درزه برقرار است. بر اين اساس در شكل (۱۰) نمودار تغييرات نسبت جريان به اختلاف فشار $Q/\Delta P$ برحسب زبري نسبي براي هريک از طولهاي همبستگي فاصله‌اي نشان داده شده است. همانگونه كه ملاحظه مي‌گردد، با افزايش زبري، شدت جريان كاهش مي‌يابد. اين كاهش نسبت به زبري نسبي تا اندازه‌اي به صورت خطي بوده و براي شكستگيهاي با طول همبستگي كوچكتر، بيشتر است. به عبارت ديگر هرچه پارامتر زبري داراي همبستگي بيشتري روي سطوح باشد، اثر زبري نسبي در كاهش جريان كمتر مي‌گردد. همانگونه كه ملاحظه مي‌شود، اثر طول همبستگي فاصله‌اي در شدت جريان عبوري از درزه بسيار زياد و قابل مقايسه با زبري نسبي مي‌باشد.




شكل (۱۰): نمودار تغييرات نسبت $Q/\Delta P$ به تغييرات زبري نسبي سطوح به ازاي طول همبستگي مختلف $r_o$

در اين شكل همچنان نقاط مربوط به رابطه تجربي ارائه شده توسط Louis براي اثر زبري بر جريان درون درزه‌هاي طبيعي نشان داده شده است. اين رابطه در محدوده زبري نشان داده شده به طور نسبي خطي است. همانگونه كه ملاحظه مي‌گردد، نتايج شبيه‌سازي رابطه Louis را در بر مي‌گيرد. به عبارت ديگر، مي‌توان دريافت كه شكستگيهاي آزمايش شده توسط Louis داراي همبستگي زبري با طول همبستي در محدوده $۰/۰۵ < r_o < ۰/۵$ cm مي‌باشد.

با توجه به نتايج به دست آمده و رابطه بين زبري نسبي و جريان عبوري از درزه در محدوده مورد مطالعه ($R_r < ۰/۲۵$)، مي‌توان ضريب $f$ در (۱) را به صورت (۲۲) در نظر گرفت.

$$f = \frac{1}{1 - F(r_o)\cdot R_r} \qquad (۲۲)$$

كه در آن $F(r_o)$ تـابعي كاهـشي از طـول همبـستگي فاصـله‌اي زبري سطوح مي‌باشد. نوع اين تابع شديداً بـه چگـونگي توزيـع زبري روي سطوح بستگي داشته و تعيين دقيـق‌تـر آن نيازمنـد توليد نمونه‌هاي بيشتري از شكستگي با توزيع زبري مختلـف و شبيه‌سازي سيال درون آنها بـوده و مـي‌توانـد زمينـه‌اي بـراي تحقيقات آتي به شمار رود.

۶- نتيجه

در اين مقاله، جريان سيال در يک شكستكي سنگي ايده‌آل‌سازي شده به كمک روش اتومات سلولي و با استفاده از معادلات شبكه بولتزمن شبيه‌سازي گرديد. نتايج مدل‌سازي از برابري بسيار خوبي با نتايج حل تحليلي برخوردار بوده و با قانون مكعب سازگاري كامل دارد. آناليز پارامتري انجام شده نيز نشان مي‌دهد كه به منظور دست‌يابي به دقت و سرعت كافي، پارامتر $\tau$ بايد نزديک به ۱ انتخاب گردد. همچنين به منظور افزايش دقت شبيه‌سازي، عدد $Ma$ بايد به ۰/۱ محدود گردد. نتايج تحليل حساسيت بر روي لزجت كينماتيكي نيز نشان مي‌دهد با كاهش اين پارامتر، كه به معني افزايش عدد رينولدز است، تعداد مراحل مورد نياز براي رسيدن مدل به وضعيت پايدار، به شدت افزايش مي‌يابد. بنابراين مي‌توان گفت سرعت انجام شبيه‌سازي به ويسكوزيته و به عبارت بهتر به عدد رينولدز وابستگي زيادي دارد.

نكته قابل توجه در اين مدل‌سازي چگونگي تعيين پارامترهاي ورودي شبكه بولتزمن، به كمک خواص ماكروديناميكي سيال و درزه مي‌باشد. بدين منظور مقادير نمو زمان و مكان در اين مدل‌سازي بسيار كوچک انتخاب گرديده كه موجب شد زمان انجام محاسبات تا اندازه اي طولاني گردد. لذا بالابردن سرعت همگرايي مدل با استفاده از روشهاي عددي در افزايش كارايي آن نقش اساسي خواهد داشت و زمينه تحقيقات بعدي را فراهم مي‌كند.

شبيه‌سازي جريان دورن شكستگيهاي زبر نشان داد كه علاوه بر زبري نسبي، مقدار همبستگي فاصله‌اي آن نيز در شدت جريا عبوري بسيار مؤثر است. بر اين اساس در محدوده زبري نسبي كوچكتر از ۰/۲۵ مي‌توان رابطه بين زبري نسبي و جريان عبوري را خطي در نظر گرفت كه شيب آن وابسته به طول همبستگي فاصله‌اي زبري روي سطوح مي‌باشد. به عبارت ديگر هرچه پارامتر زبري داراي همبستگي بيشتري روي سطوح باشد، يعني طول همبستگي فاصله‌اي بيشتر باشد، شيب خط مورد نظر كمتر بوده و اثر زبري بر جريان كوچكتر خواهد شد. همچنين اين مطالعه نشان داد كه به ازاي طول همبستگي فاصله‌اي مشخص رابطه تجربي لوئيس [۲] برابري خوبي با نتايج شبيه‌سازي عددي انجام شده دارد.

## ۷- مراجع


[۱] Snow, D. T.; "Anisotropic Permeability of Fractured Media", Water Resources Res., Vol.5, No. 6, p.p. 1273-1289, 1965.

[۲] Louis, C. A; "A study of groundwater flow in jointed rock and its influence on the stability of rock masses", Rock Mech. Res. Rep. 10, Imperial College, London, 90 pp, 1969.

[۳] Golf-Racht, Van, T. D.; Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering, Elsevier Publishing Company, 710 pp, 1982.

[۴] Withersphoon, P. A.; Wang, J. S. Y.; Iwai K; Gale, J. E.; "Validity of the cubic law for fluid flow in a deformable rock fracture", Water Resources Res. Vol. 16, No. 6, p.p. 1016-1024, 1980.

[۵] Gutfraind, R.; Hansen, A.; "Study of fracture permeability using lattice-gas automata", Transport Porous Media, Vol. 18, No. 2, p.p. 131-149, 1995.

[۶] Zhang, X.; Knackstedt, M. A.; Sahimi, M.; "Fluid flow across mass fractals and self-affine surfaces", Physica A, Vol. 233, p.p. 835, 1996.

[۷] Chen, S.; Doolen, G. D.; "Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows", Fluid Mech., Vol. 30, p.p. 329-364, 1998.

[۸] Von Neumann, J.; "The Theory of Self-Reproducing Automata", Urbana, University of Illinois Press 1966.

[۹] Wolfram, S.; "Universality and complexity in cellular automata", Physica D Vol. 10, p.p. 1–35, 1984.

[۱۰] Frisch, U.; Hasslacher, B.; Pomeau, Y.; "Lattice-Gas Automata for the Navier-Stokes Equation", Phys. Rev. Lett., Vol. 56, p.p. 1505-1508, 1986.

[۱۱] McNamara, G.; Zanetti, G.; "Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata", Phys. Rev. Lett. Vol. 61, p.p. 2332–2335, 1988.

[۱۲] D'Humi`eres, D.; Lallemand, P.; Frisch, U.; "Lattice-gas models for 3D hydrodynamics", Europhys. Lett. 2, 291–297, 1986.

[۱۳] Sukop, M. C.; Trone, T. D.; Lattice Boltzmann Modeling (An Introduction for Geoscientists and Engineers), Springer-Verlag publication, Berlin, Heidelberg, 2006.

[۱۴] Rothman, D.H.,; Zaleski, S.; Lattice-Gas Cellular Automata (Simple Models of Complex Hydrodynamics), Cambridge University press, Cambridge, 1997.

[۱۵] Chen, S.; Wang Z.; Shan X.W.; Doolen G.D.; "Lattice Boltzmann computational fluid dynamics in three dimensions", J. Stat. Phys., Vol. 68, p.p. 379–400, 1992.

[۱۶] Qian, Y.H.; d'Humi`eres, D.; Lallemand, P.; "Lattice BGK models for Navier-Stokes equation", Europhys. Lett., Vol. 17, p.p. 479–84, 1992.

[۱۷] Feng, Y. T.; Han, K; Owen, D. R. J.; Coupled lattice Boltzmann method and discrete element modeling of article transport in turbulent fluid flow: Computational issue", Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 72, p.p. 1111–1134, 2007.

[۱۸] Aaltosalmi, U.; Fluid Flow in Porous Media with the Lattice-Boltzmann Method, Ph.D. Thesis, University of Jyvaskyla, Finland, 2005.

[۱۹] Succi, S.; The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond, Oxford University Press, 2001.