مدل‌سازي عددي امواج فوق بحراني در خم‌ها با روش حجم محدود *Roe-TVD* و ارزيابي فرضيات راه حل تحليلي

عليرضا شمخالچيان[i] * ؛ محمدرضا جعفرزاده[ii]

چکيده

در اين تحقيق جريان فوق بحراني در کانال خميده رينر و هاگر با روش عددي حجم محدود Roe-TVD مطالعه شده و با روش تحليلي ناپ-ايپن، روش عددي HLL و داده‌هاي آزمايشگاهي موجود رينر و هاگر مقايسه گرديد. آنگاه با استفاده از نتايج روش عددي، درستي فرضيات راه حل تحليلي ارزيابي شده و ديده شد که امواج مورب فوق بحراني ايستا در مسير خود در خم پخش مي‌شوند. در اعداد فرود ورودي Fr_0<٤/٢، فرض‌هاي ثابت بودن سرعت متوسط مقطع در طول خم و بدون اصطکاک بودن جريان يا ثابت بودن انرژي مخصوص با خطاي حدود يک درصد قابل قبول است و تغييرات سرعت در ديوار خارجي با خطاي حداکثر چهار درصد قابل چشم پوشي است. با افزايش عدد فرود ورودي، جريان در ديواره داخلي خم خشک مي‌شود و فرضيات فوق بي اعتبار مي‌شوند.

کلمات کليدي

کانال‌هاي خميده، جريان فوق‌بحراني، امواج مورب ايستا، حجم محدود.

Numerical Modeling of Supercritical Waves in Bends with the Finite Volume Method of Roe-TVD and Appraisal of Analytical Assumptions

A. R. Shamkhalchian; M. R. Jaefarzadeh

ABSTRACT

In this research, using the finite volume method of Roe-TVD, supercritical flow in the curved channel of Reinauer and Hager was studied and the results were compared with the analytical method of Knapp-Ippen, the numerical method of HLL and the available experimental data of Reinauer and Hager. Then, using the numerical results, the accuracy of the assumptions of the analytical method was evaluated. It was observed that the super-critical oblique standing waves are diffused along the bend way. With an inlet Froude number, Fr_0<4.2, the assumptions of constant average cross-sectional velocity along the bend and frictionless flow or constant specific energy is acceptable with an error of around one percent and the velocity variation at the external wall is tolerable with a maximum error of four percent. By increasing the inlet Froude number, flow at the internal wall dries up and the above assumptions are invalidated.

KEYWORDS

Curved channels, Supercritical flow, Oblique standing waves, Finite volume.

تاريخ دريافت مقاله:١٣٨٨/٦/٣

تاريخ اصلاحات مقاله:١٣٨٩/١٠/١٨

[i]. *نويسنده مسئول و کارشناس ارشد آب، دانشکده مهندسي دانشگاه فردوسي مشهد؛ shamkhalchian_alireza@yahoo.com

[ii]. استاد، گروه عمران- دانشکده مهندسي دانشگاه فردوسي مشهد؛ jafarzad@um.ac.ir

۱- مقدمه

هنگامي كه يک جريان فوق بحراني واردكانال خميده‌اي مي‌شود بر اثر انحناي ديواره‌هاي كانال مجموعه‌اي از امواج مورب در سطح آب به وجود مي‌آيند. يافتن شكل كلي، موقعيت و ارتفاع اين امواج در ديواره‌ها مورد علاقه محققين بوده است. كارمن [۱] و همچنين ناپ و ايپن [۲] از اولين كساني بودند كه با اعمال فرض‌هايي، روابط تحليلي براي تعيين موقعيت امواج و ارتفاع سطح آب در خم به‌دست آوردند. هارت، لنا، استفلر و طاهر شمسي نيز از محققيني بودند كه روابط تحليلي ديگري براي جريان فوق بحراني در خم ارائه نمودند [۳]. رينر و هاگر [۴]، طاهر شمسي [۳]، پوگي [۵] و بلترامي و همكاران [۶] بطور آزمايشگاهي اين نوع جريان‌ها را بررسي نمودند. در سال‌هاي اخير از روش‌هاي عددي براي بررسي اين نوع جريان‌ها استفاده شده است. براي مثال ولياني و كاليفي با استفاده از روش عددي حجم محدود HLL جريان فوق بحراني در خم را مدل‌سازي نمودند [۷].

در اين مقاله جريان فوق بحراني در خم با استفاده از روش عددي حجم محدود Roe-TVD شبيه‌سازي شده و با داده‌هاي آزمايشگاهي رينر- هاگر [۴] و فرمول‌هاي تحليلي كارمن و ناپ- ايپن مقايسه مي‌شود، آنگاه درستي فرضيات حل‌هاي تحليلي بر اساس نتايج مستقل بدست آمده از روش عددي گفته شده ارزيابي خواهند شد.

۲- حل تحليلي جريان فوق بحراني در خم‌ها

در شكل (۱)، امواج فوق بحراني مثبت و منفي در يک خم رسم شده است. اولين فراز موج در ديواره خارجي با زاويه θ_{max} از ورودي خم و اولين نشيب آن در ديواره داخلي با زاويه θ_{min} توليد مي‌شود. در محاسبات نظري فرض بر آن است كه $\theta_{\max}=\theta_{\min}=\theta_m$ باشد. موقعيت فراز و نشيب اين امواج از هندسه كانال و مشخصات جريان بدست مي‌آيد، و بر اين اساس داريم [۲]:

$$\theta_m = \tan^{-1}\frac{2b}{(2r_c+b)\tan\beta} \qquad (۱)$$

كه در آن b عرض كانال خميده، r_c شعاع مركزي خم و زاويه β بر حسب عدد فرود ورودي كانال (Fr_0) تعريف مي‌شود.

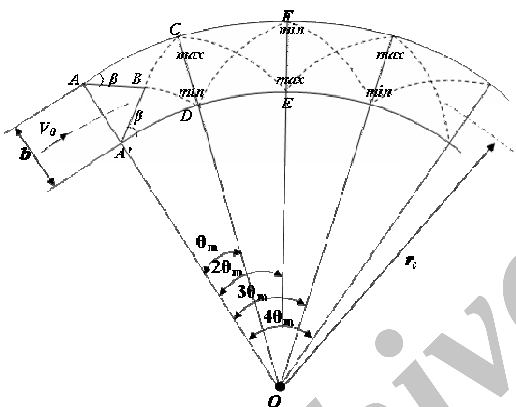
$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{Fr_0}\right) \quad ; \quad Fr_0 = \frac{V_0}{\sqrt{gh_0}} \qquad (۲)$$

در (۲) عوامل h_0 و V_0 به ترتيب عمق و سرعت آب در ورودي خم و g شتاب جاذبه است. در محاسبات تحليلي فرض مي‌شود كه پس از تشكيل اولين موج در زاويه θ_m، مجموعه امواج متوالي با فراز و نشيب‌هاي پي در پي در امتداد خم در زواياي ($2\theta_m$، $3\theta_m$، ...)، به طور دقيق و بدون استهلاک طبق شكل (۱) توسعه پيدا مي‌كنند [۲].

كارمن با اعمال فرض‌هاي ۱- جريان دو بعدي در كانال افقي با مقطع مستطيلي ۲- سرعت متوسط ثابت بر سطح مقطع ۳- جريان بدون اصطكاک، رابطه بين θ و Fr را به‌دست آورد [۱]:

$$\theta = \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{Fr^2-1}} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{Fr^2-1}} + \theta_0 \qquad 0<\theta<\theta_m \qquad (۳)$$

θ زاويه خم از ابتداي آن، θ_0 مقدار ثابت و $Fr=V/\sqrt{gh}$ عدد فرود است. h عمق آب ديواره خارجي در زاويه θ و V سرعت متوسط مقطع است، (طبق فرض $V=V_0$). در دهانه ورودي خم، $\theta=0$ و عدد فرود مشخص است، بنابراين مي‌توان مقدار ثابت θ_0 را محاسبه نمود.



شكل (۱): تشكيل امواج مورب جريان فوق بحراني در يک خم [۸]

ناپ و ايپن فرض‌هاي اول و دوم كارمن را پذيرفتند و رابطه (۴) را براي نيمرخ سطح آب در ديوار خارجي و داخلي ارائه نمودند [۲]، [۹]:

$$\frac{h}{h_0} = Fr_0^2\sin^2\left(\beta \pm \frac{\theta}{2}\right) \qquad 0<\theta<\theta_m \qquad (۴)$$

كه در آن، h ارتفاع آب در زاويه θ و h_0 ارتفاع آب در كانال ورودي به خم تعريف مي‌شود. اگر از رابطه (۱) موقعيت فراز موج تعيين شود مي‌توان با استفاده از رابطه (۳) يا (۴) ارتفاع بيشينه آن را محاسبه نمود. مطالعات آزمايشگاهي ناپ و ايپن نشان داد كه سرعت مماسي در ديواره خارجي به نسبت ثابت است.

۳- معادلات آب‌هاي كم عمق

با استفاده از معادلات آب‌هاي كم عمق، مشخصات جريان فوق بحراني دركانال‌هاي خميده به‌دست مي‌آيد. شكل

ديفرانسيلي معادلات آب‌هاي كم عمق در دو بعد براي كانال افقي با چشم پوشي كردن از اثرات اصطكاكي به صورت رابطه (۵) نوشته مي‌شود [۱۰]:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0 \qquad (۵)$$

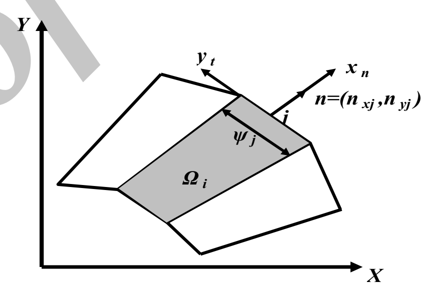
U بردار متغيرهاي بقاء و F (G) بردار شار در راستاي محور x (y) هستند و بصورت رابطه (۶) تعريف مي‌شوند:

$$U=\begin{bmatrix} h\\ hu\\ hv\end{bmatrix};\; F(U)=\begin{bmatrix} hu\\ hu^2+\frac{1}{2}gh^2\\ huv\end{bmatrix};G(U)=\begin{bmatrix} hv\\ huv\\ hv^2+\frac{1}{2}gh^2\end{bmatrix} \qquad (۶)$$

h ارتفاع سطح آب در هر نقطه، g شتاب ثقل و u (v) مؤلفه سرعت متوسط‌گيري شده در عمق در راستاي x (y) است.

۴- الگوي دو بعدي روش عددي Roe-TVD

با استفاده از روش عددي حجم محدود مي‌توان مشخصات دو بعدي جريان فوق بحراني در خم را بدون پيش فرض خاصي محاسبه نمود. با توجه به شكل (۲)، سيستم (۵) بر هر كدام از سلول‌هاي چهارگوش به صورت رابطه (۷) جداسازي مي‌شود [۱۱]، [۱۲].



شكل (۲): سيستم مختصات اصلي و محلي براي محاسبه شار دو بعدي

$$U_i^{n+1}=U_i^n-\frac{\Delta t}{\Omega_i}\sum_{j=1}^{nb}((F,G)_j^*(n_{x,j},n_{y,j})).\psi_j+S_i^n\Delta t \qquad (۷)$$

Ω_i مساحت سلول، ψ_j طول وجه j ام آن، $(n_{x,j},n_{y,j})$ مؤلفه‌هاي بردار نرمال خارجي به وجه j، Δt گام زماني، بالانويس n شماره گام زماني و nb تعداد وجوه سلول است. (در اين مقاله به علت اين كه از سلول‌هاي چهار گوش استفاده شده است، مقدار nb=۴ مي‌شود.)

مقادير شار عددي در رابطه (۷) با استفاده از روش Roe به روش زير محاسبه مي‌شود (زير نويس l مربوط به سلول i و زيرنويس r مربوط به سلول مجاور است):

$$(F,G)_j^*.(n_{x,j},n_{y,j})=\frac{1}{2}(F(U_r).n_x+G(U_r).n_y+F(U_l).n_x+G(U_l).n_y)-\frac{1}{2}\left|\widetilde{A}\right|(U_r-U_l) \qquad (۸)$$

كه در آن:

$$\widetilde{A}=R\left|\widetilde{\Lambda}\right|R^{-1} \qquad (۹)$$

R ماتريس بردارهاي ويژه راست است:

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\\ -n_y & \widetilde{u}+\widetilde{c}n_x & \widetilde{u}-\widetilde{c}n_x\\ n_x & \widetilde{v}+\widetilde{c}n_y & \widetilde{v}-\widetilde{c}n_y\end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

$$R^{-1}=\frac{1}{2\widetilde{c}}.\begin{bmatrix} 2\widetilde{c}(\widetilde{u}n_y\text{-}\widetilde{v}n_x) & -2\widetilde{c}n_y & 2\widetilde{c}n_x\\ \widetilde{c}-\widetilde{u}n_x-\widetilde{v}n_y & n_x & n_y\\ \widetilde{c}+\widetilde{u}n_x+\widetilde{v}n_y & -n_x & -n_y\end{bmatrix} \qquad (۱۱)$$

در رابطه (۹)، $\widetilde{\Lambda}$ ماتريس متوسط مقادير ويژه است:

$$\left|\widetilde{\Lambda}\right|=\begin{pmatrix} \left|\widetilde{\lambda}_1\right| & 0 & 0\\ 0 & \left|\widetilde{\lambda}_2\right| & 0\\ 0 & 0 & \left|\widetilde{\lambda}_3\right|\end{pmatrix} \qquad (۱۲)$$

كه در آن:

$$\widetilde{\lambda}_1=n_x\widetilde{u}+n_y\widetilde{v},\quad \widetilde{\lambda}_2=\widetilde{\lambda}_1+\widetilde{c},\quad \widetilde{\lambda}_3=\widetilde{\lambda}_1-\widetilde{c} \qquad (۱۳)$$

مقادير متوسط $\widetilde{u}$ و $\widetilde{c}$ و $\widetilde{h}$ در روش Roe به صورت زير تعريف مي‌شود.

$$\widetilde{h}=\sqrt{h_l h_r} \qquad \widetilde{c}=\sqrt{g\frac{h_l+h_r}{2}}$$
$$\widetilde{v}=\frac{v_l\sqrt{h_l}+v_r\sqrt{h_r}}{\sqrt{h_l}+\sqrt{h_r}} \qquad \widetilde{u}=\frac{u_l\sqrt{h_l}+u_r\sqrt{h_r}}{\sqrt{h_l}+\sqrt{h_r}} \qquad (۱۴)$$

متغيرهاي با انديس l و r بر مرز سلول و در سمت چپ و راست آن تعريف شده‌اند. براي رسيدن به دقت مرتبه دو، متغيرهاي اوليه در هر سلول به صورت تابعي خطي نوشته مي‌شوند. هم‌چنين براي كنترل نوسانات از محدودكننده شيب مين مود استفاده مي‌شود. بنابراين در هر راستاي s مقادير U عبارت است از [۱۳]:

$$U_n(s,t_n)=\widetilde{U}_i^n+\sigma_i^n(s-s_i)$$
$$s_i=s_{i-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\Delta s \qquad s_{i-\frac{1}{2}}<s<s_{i+\frac{1}{2}}$$
$$\sigma_i^n=\min\mathrm{mod}\left(\frac{\widetilde{U}_i^n-\widetilde{U}_{i-1}^n}{\Delta s},\frac{\widetilde{U}_{i+1}^n-\widetilde{U}_i^n}{\Delta s}\right)\;; \qquad (۱۵)$$
$$\min\mathrm{mod}(a,b)=\begin{cases} a & if\ |a|<|b|\ \ and\ \ ab>0\\ b & if\ |b|<|a|\ \ and\ \ ab>0\\ 0 & if\ \ ab\le 0\end{cases}$$

$\widetilde{U}_i^n$ مقدار متوسط بردار متغيرهاي بقا است كه در هر گام از حل عددي به‌دست مي‌آيد. براي جلوگيري از ناپايداري عددي، لازم است شرط كورانت-فردريخ-لوي(CFL)، در تمام سلول‌ها برقرار باشد:

$$N_{CFL} = \frac{|V_i| + \sqrt{g h_i}}{(\Omega_i / P_i)/\Delta t} \le 1 \qquad (۱۶)$$

V_i مقدارسرعت براینده و P_i محیط سلول i است.

در این تحقیق، رژیم جریان در خم‌ها فوق بحرانی بوده بنابراین شرایط مرزی مورد نیاز مانند عمق و سرعت با استفاده از اطلاعات کانال بالادست در ورودی خم اعمال شده است. برای مدل‌سازی دیوارهای کانال از شرط مرزی لغزشی[۱] استفاده شد. معادلات غیردائمی آبهای کم عمق تا رسیدن به حالت پایدار تحلیل شدند و زمانی‌که اختلاف مجموع اعماق کلیه سلول‌ها در دو گام متوالی زمانی کمتر از 10^{-7}شد، پاسخ‌ها به عنوان حل دائمی درنظر گرفته شدند.

۵- مطالعات آزمایشگاهی جریان فوق بحرانی در کانال‌های خمیده

رینر و هاگر در سال ۱۹۹۷ جریان فوق بحرانی در کانال‌های خمیده با مقطع مستطیلی را به طور آزمایشگاهی مطالعه نمودند. مشخصات هندسی یکی از کانال‌های آنها به شرح زیر بوده است [۴]:

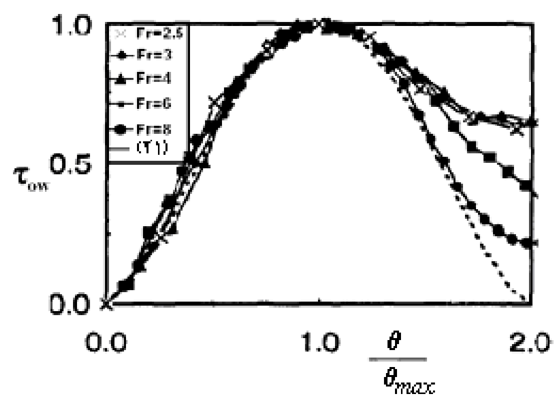
زاویه خم= 51^{o} عرض کانال= ۰/۲۵ m

شیب کانال=0^{o} شعاع مرکزی = ۳/۶۰۷ m

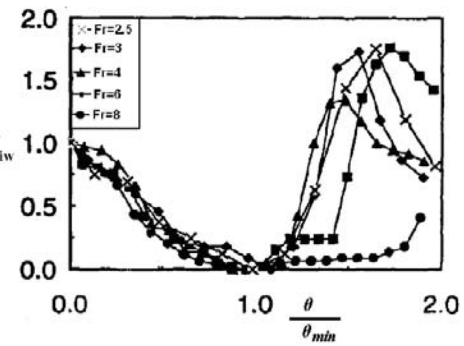
نتایج آزمایش‌های رینر و هاگر برای دیوارهای داخلی و خارجی به ازای اعداد فرود ورودی مختلف در شکل (۳-الف) و (۳-ب) نشان داده شده است. در این شکل‌ها τ_{ow} و τ_{iw} به ترتیب اعماق بی‌بعد شده در دیوارهای خارجی و داخلی هستند و طبق روابط (۱۷) و (۱۸) تعریف می‌شوند:

$$\tau_{ow} = \frac{h - h_0}{h_{\max} - h_0} \qquad (۱۷)$$

$$\tau_{iw} = 1 - \frac{h - h_0}{h_{\min} - h_0} \qquad (۱۸)$$



(الف) دیوار خارجی



(ب) دیوار داخلی

شکل (۳): نتایج آزمایشگاهی رینر و هاگر[۴]

h ارتفاع آب در هر زاویه انحراف، h_{max} و h_{min} به ترتیب ارتفاع‌های بیشینه و کمینه و h_0 ارتفاع آب در کانال بالادست است. همچنین $\theta_{\max}(\theta_{\min})$ محل تشکیل اولین فراز (نشیب) در دیوار خارجی (داخلی) است. رینر و هاگر بر اساس مشاهدات آزمایشگاهی روابطی برای محاسبه $\theta_{\max}$ و $\theta_{\min}$ ارائه داده‌اند.

$$\tan\theta_{\max} = \begin{cases} \mathrm{Fr}_0 \dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{r_m}} & \mathrm{Fr}_0 \dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{r_m}} \le 0.35 \\ 0.6\sqrt{\mathrm{Fr}_0 \dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{r_m}}} & \mathrm{Fr}_0 \dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{r_m}} > 0.35 \end{cases} \qquad (۱۹)$$

$$\tan\theta_{\min} = \sqrt{2} Fr_0 \frac{b}{r_m} \qquad (۲۰)$$

رینر و هاگر بر اساس نتایج آزمایشگاهی، روابطی ارائه نمودند که به وسیله آن‌ها می‌توان سطح آب را در دیوارهای خارجی و داخلی در محدوده اولین موج به‌دست آورد.

$$\tau_{ow} = \sin^{1.5}[(\frac{\pi}{2}\frac{\theta}{\theta_{\max}})], \quad 0 \le \theta/\theta_{\max} < 1.25 \qquad (۲۱)$$

$$\tau_{iw} = 1 - \sin^{1.5}[(\frac{\pi}{2}\frac{\theta}{\theta_{\min}})], \quad 0 \le \theta/\theta_{\min} < 1.2 \qquad (۲۲)$$

طبق شکل (۳)، رابطه (۲۱) پاسخ مناسبی در محدوده ۱/۲۵ $\ge \theta/\theta_{\max} >$ ۰/۷۵ بدست می‌دهد و از آنجا که بزرگ‌ترین اعماق در این محدوده وجود دارند، از نظر مهندسی نیز مورد علاقه است.

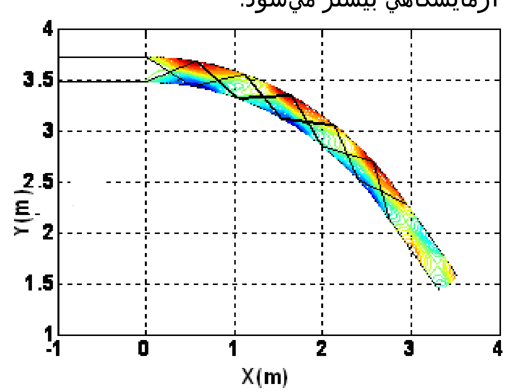
برای نیمرخ سطح آب در دیوار خارجی رابطه دیگری نیز ارائه شده است:

$$\tau_{ow} = \frac{1 - j_0(3.8\dfrac{\theta}{\theta_{\max}})}{1.4} \qquad (۲۳)$$

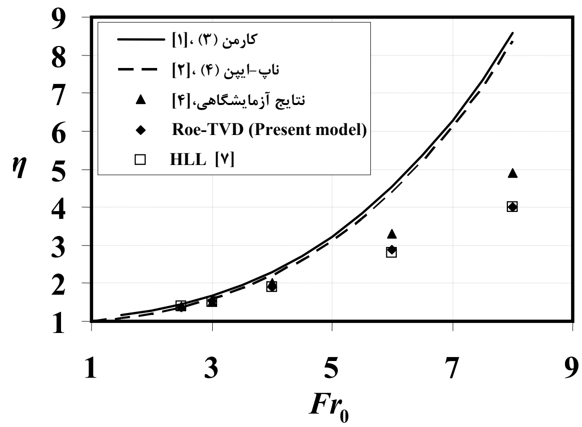
که در آن j_0 تابع بسل مرتبه صفر است[۲]. رابطه (۲۳) در محدوده ۱/۲۵ $\ge \theta/\theta_{\max} >$ ۰/۷۵ جواب‌های نزدیکی به معادله (۲۱) می‌دهد و در محدوده ۲ $\ge \theta/\theta_{\max} >$ ۱/۲۵ نیز پاسخ مناسبی دارد [۴]، [۶].

۶- مقايسه روابط تحليلي و مطالعات آزمايشگاهي با روش‌هاي عددي براي كانال خميده رينر- هاگر

وليانی و كالفي، كانال خميده رينر و هاگر را با استفاده از روش حجم محدود HLL مدل‌سازي نموده‌اند [۷]. در اين تحقيق نيز كانال خميده رينر و هاگر به كمك روش حجم محدود Roe-TVD مدل شد. در شكل (۴) موقعيت كلي امواج مورب دو بعدي در پلان، بدست آمده از مدل عددي Roe-TVD با روش تحليلي ناپ- ايپن، به ازاي عدد فرود ۲/۵ مقايسه شده است. منحني‌هاي تراز، مربوط به روش عددي هستند و خطوط توپر، موقعيت امواج مورب را از رابطه (۱) مشخص مي‌نمايند. در مجموع سه موج كامل در فاصله زواياي۰ تا ۱۷ درجه و ۱۷ تا ۳۴ درجه و ۳۴ تا ۵۱ درجه در ديواره‌هاي داخلي و خارجي تشكيل شده است. فراز اين امواج در ديوار خارجي به طور تقريبي در زواياي ۸/۵ و ۲۵/۵ و ۴۲/۵ درجه واقع شده است. در شكل (۵)، η نسبت عمق اولين فراز موج به عمق اوليه جريان ورودي در كانال بالادست ($\eta = h_{\max} / h_0$) براي روش عددي Roe-TVD، روش عددي HLL وليانی و كالفي، روابط تحليلي كارمن و ناپ- ايپن به همراه نتايج آزمايشگاهي رينر و هاگر به ازاي عددهاي فرود ورودي ۲/۵، ۳، ۴، ۶ و ۸ رسم شده است. عمق جريان در كانال بالادست در تمام حالات برابر با ۵ cm است. همان‌طور كه در اين شكل ديده مي‌شود، پاسخ روش‌هاي عددي HLL و Roe-TVD، بريكديگر منطبق است و پاسخ مدل‌هاي تحليلي كارمن و ناپ - ايپن بسيار نزديك به يكديگر هستند. در اعداد فرود كمتر از ۴، جواب‌هاي عددي و روابط تحليلي به نتايج آزمايشگاهي نزديك است در حالي‌كه با افزايش عدد فرود، فاصله جواب‌هاي عددي و به خصوص حل تحليلي از نتايج آزمايشگاهي بيشتر مي‌شود.



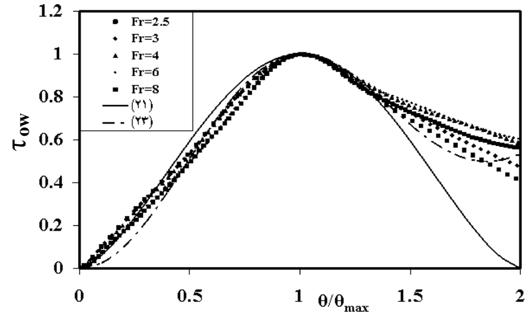
شكل (۴): موقعيت امواج بر اساس حل عددي و رابطه ناپ و ايپن براي خم رينر و هاگر در عدد فرود ۲/۵



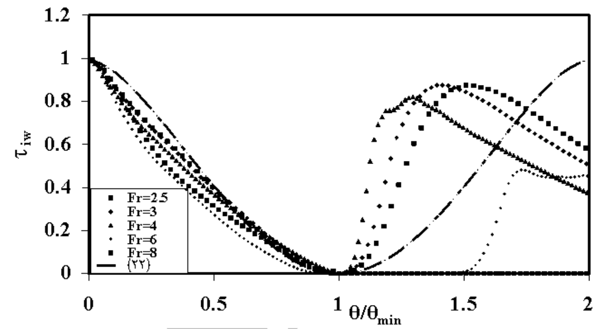
شكل (۵): مقايسه نتايج عددي با روابط تحليلي و آزمايشگاهي

در نمودارهاي شكل (۶-الف) و(۶-ب) مقادير اعماق بدون بعد τ_{ow} و τ_{iw} در مقابل $\theta/\theta_{\max}$ و $\theta/\theta_{\min}$ با استفاده از روش عددي Roe-TVD به ازاي اعداد فرود مختلف با روابط تجربي (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) به‌دست آمده از آزمايش‌هاي رينر و هاگر براي ديوارهاي خارجي و داخلي در محدوده اولين موج نشان داده شده است. همان‌طور كه ديده مي‌شود حداكثر اختلاف جواب‌هاي عددي و آزمايشگاهي به ازاي اعداد فرود كمتر از ۴ در محدوده $\theta/\theta_m <$ ۱ براي τ_{ow} و τ_{iw} كمتر از ۱۲ درصد است.

در شكل (۷) نيمرخ طولي جريان در ديوارهاي داخلي و خارجي بر اساس نتايج عددي و پيش‌بيني‌هاي ناپ و ايپن به ازاي عدد فرود ۲/۵ نشان داده شده است. در ديوار خارجي، منحني اولين موج از ابتدا تا فراز موج در مدل عددي، بر مقادير تحليلي منطبق است. در ديوار داخلي نيز منحني اولين موج عددي، از ابتدا تا نشيب، به موج تحليلي بسيار نزديک است اما برخلاف فرضيات حل تحليلي، فراز موج عددي در ديوار خارجي روبروي نشيب آن در ديوار داخلي واقع نشده است. در ادامه، امواج عددي در ديوارهاي داخلي و خارجي به طور طبيعي پخش مي‌شوند اما امواج تحليلي، طبق فرض، به طور دقيق تكرار مي‌شوند. بديهي است كه اين فرض چندان معقول به نظر نمي‌رسد. بنابراين بررسي محدوده درستي ساير مفروضات حل تحليلي لازم است.

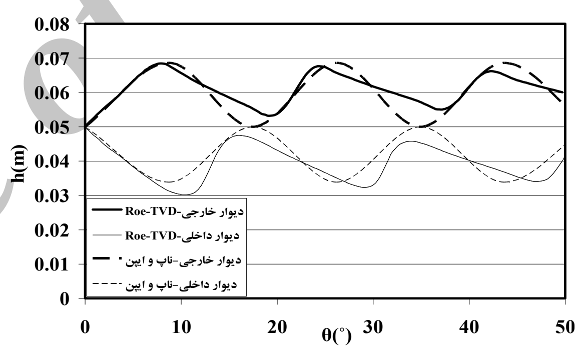


(الف) ديوار خارجي



(ب) ديوار داخلي

شکل (۶): مقايسه نتايج عددي و روابط تجربي رينر و هاگر



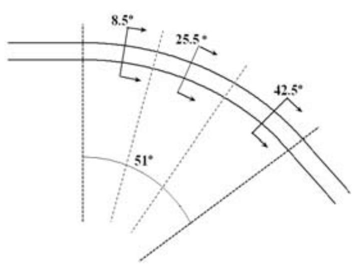
شکل (۷): مقايسه نيمرخ جريان در ديوارهاي داخلي و خارجي

۷- ارزيابي فرضيات حل تحليلي با استفاده از روش‌هاي عددي

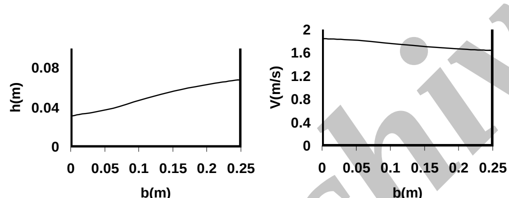
همان‌طور که در ذکر شد، کارمن و ناپ-ايپن با اعمال فرضياتي توانستند حل تحليلي جريان را در کانال‌هاي خميده به‌دست آورند. فرض اول مربوط به ماهيت جريان و هندسه کانال بود و قابل مناقشه نيست. در ادامه مقاله درستي فرض‌هاي بعدي به طور مستقل با استفاده از حل معادلات آب‌هاي کم عمق به کمک روش‌هاي عددي بررسي مي‌شوند.

۷-۱- فرض ثابت بودن سرعت متوسط در طول کانال

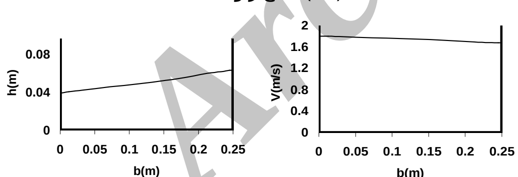
براي تحقيق در مورد فرض فوق، خم 51^{o} به سه قسمت تقسيم شد و در ميانه هر قسمت سه مقطع در زواياي $8/5^{o}$، $25/5^{o}$ و $42/5^{o}$ از ابتداي خم درنظر گرفته شدند، مطابق شکل (۴) و (۷) اين مقاطع به طور تقريب در موقعيت فراز امواج ديوار خارجي واقع شده‌اند. در شکل (۸) موقعيت مقاطع نشان داده شده است. در شکل (۹–الف) تا (۹-ج) عمق و سرعت جريان در اين مقاطع، به ازاي عدد فرود ورودي ۲/۵ رسم شده است. با توجه به شکل تغييرات عمق جريان در هر مقطع تقريباً خطي و نسبت به محور مرکزي کانال، متقارن معکوس است. به همين دليل در صورتيکه ارتفاع آب در خط مرکز کانال ثابت باشد، سطح مقطع جريان در طول خم ثابت مي‌ماند. بنابراين با توجه به ثابت بودن دبي جريان، فرض ثابت بودن سرعت متوسط مقطع در طول خم منطقي مي‌شود. درشکل (۱۰) نيمرخ سطح آب در شعاع مرکزي خم ترسيم شده است. ديده مي‌شود که هر چند عمق جريان متغير و سينوسي شکل است اما با تغييراتي کمتر از ۵ ± درصد، به طور متوسط برابر با عمق جريان ورودي به خم (۵ cm) است.



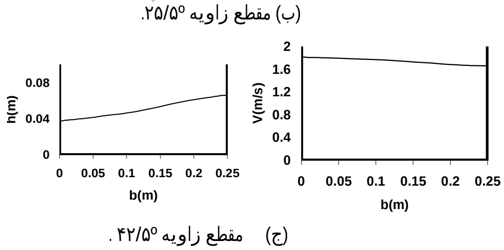
شکل (۸): موقعيت مقاطع در خم رينر و هاگر



(الف) مقطع زاويه $8/5^{o}$.

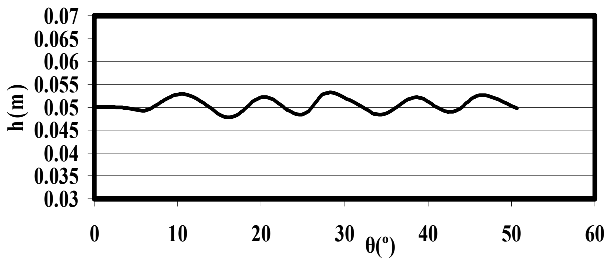


(ب) مقطع زاويه $25/5^{o}$.



(ج) مقطع زاويه $42/5^{o}$.

شکل (۹): نيمرخ سطح آب و سرعت براي مقاطع مختلف، به ازاي عدد فرود ورودي ۲/۵



شكل (١٠): نيمرخ سطح آب در خط مركزي كانال براي عدد فرود ورودي ٢/٥

جدول (١): سرعت‌هاي متوسط عددي در مقاطع مختلف (m/s)

مقطع / Fr_0	θ=۰°	θ=۸/۵°	θ=۲۵/۵°	θ=۴۲/۵°	P_v(%)
۲/۵	۱/۷۵۰۵	۱/۷۴۵۶	۱/۷۴۵۹	۱/۷۴۲۴	۰/۴۶
۳	۲/۱۰۰۶	۲/۰۹۴	۲/۰۹۵۹	۲/۰۹۱۹	۰/۴۲
۴	۲/۸۰۰۹	۲/۷۹۳۷	۲/۷۸۴۲	۲/۷۷۸	۰/۸۲
۴/۱	۲/۸۷۰۸	۲/۸۶۴۵	۲/۸۵۴۱	۲/۸۴۷۸	۱/۰۰
۴/۲	۲/۹۴۰۹	۲/۹۳۴۶	۲/۹۲۱۰	۲/۹۱۶۹	۰/۸۱
۴/۳	۳/۰۱۰۹	۳/۰۰۴۵	۲/۹۳۵۱	۲/۹۸۴۳	۲/۵۲
۴/۵	۳/۱۵۱۰	۳/۱۴۴۵	۲/۹۹۰۱	۳/۱۱۹۵	۵/۱۱
۴/۷	۳/۲۹۱۰	۳/۲۸۴۵	۳/۰۵۲۲	۳/۲۵۳۳	۷/۲۶
۵	۳/۵۰۱۰	۳/۴۹۴۴	۳/۱۶۲۸	۳/۴۵۳۹	۹/۶۶
۵/۳	۳/۶۴۱۲	۳/۶۳۴۴	۳/۲۵۷۳	۳/۵۸۶۰	۱۰/۵۴
۵/۵	۳/۸۵۱۲	۳/۸۴۴۳	۳/۳۷۲۶	۳/۷۸۴۳	۱۲/۴۳
۶	۴/۲۰۱۳	۴/۱۹۲۶	۳/۸۲۹۹	۴/۱۳۳۷	۸/۸۴
۸	۵/۶۰۱۷	۵/۵۸۹۹	۵/۰۶۴۳	۵/۴۴۵۵	۹/۵۹

در جدول (١) سرعت‌هاي متوسط در سه مقطع و به ازاي اعداد فرود ورودي مختلف به خم ارائه شده است. در اين جدول، P_v حداكثر درصد نسبت تغييرات سرعت متوسط در هر مقطع θ به سرعت كانال بالادست (θ =۰°) است. ديده مي‌شود كه ملاحظه مي‌شود حداكثر تغييرات سرعت متوسط به ازاي Fr_0<٤/٢ از يک درصد كمتر است، بنابراين فرض ثابت بودن سرعت متوسط در طول خم حداقل در اين محدوده جريان فرض مناسبي به نظر مي‌رسد، در صورتي كه Fr_0>۴/۲ باشد، جريان در بعضي قسمت‌هاي ديوار داخلي خم خشك مي‌شود و فرض مقطع مستطيلي كانال بهم مي‌خورد.

٧-٢- فرض جريان بدون اصطكاک

در صورتيكه از اصطكاک در طول خم افقي چشم‌پوشي شود انرژي مخصوص $\left(E = h + v^2/2g\right)$ در تمام مقاطع ثابت مي‌ماند. در جدول (٢) مقدار انرژي مخصوص در سه مقطع به ازاي اعداد فرود ورودي مختلف داده شده است. در اين جدول P_E حداكثر درصد نسبت تغييرات انرژي مخصوص در طول خم به انرژي مخصوص كانال بالادست در اعداد فرود مختلف است. طبق اين جدول حداكثر تغييرات انرژي مخصوص به ازاي Fr_0<٤/٢ در حدود يک درصد است بنابراين فرض ثابت بودن انرژي مخصوص در طول خم نيز حداقل در اين محدوده جريان، مناسب به نظر مي‌رسد. در جريان هاي با Fr_0>۴/۲ همان‌طور كه گفته شد خشک شدگي جريان در ديواره داخلي خم، فرض جريان در كانال مستطيلي را بهم مي‌زند.

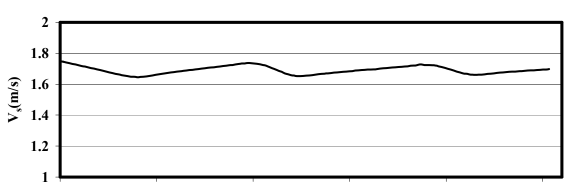
جدول (٢): انرژي مخصوص (m) مقاطع مختلف

مقطع / Fr_0	θ=۰°	θ=۸/۵°	θ=۲۵/۵°	θ=۴۲/۵°	P_E(%)
۲/۵	۰/۲۰۶۳	۰/۲۰۶۱	۰/۲۰۵۹	۰/۲۰۵۶	۰/۲۹
۳	۰/۲۷۵	۰/۲۷۴۶	۰/۲۷۴۲	۰/۲۷۳۸	۰/۴۳
۴	۰/۴۵	۰/۴۴۹۳	۰/۴۴۶۱	۰/۴۴۵۲	۱/۰۶
۴/۱	۰/۴۷۰۲	۰/۴۶۰۹	۰/۴۶۵۹	۰/۴۶۵۳	۱/۰۳
۴/۲	۰/۴۹۱۰	۰/۴۹۰۷	۰/۴۸۵۴	۰/۴۸۵۵	۱/۱۳
۴/۳	۰/۵۱۲۳	۰/۵۱۱۸	۰/۴۹۱۲	۰/۵۰۵۵	۴/۱۱
۴/۵	۰/۵۵۶۳	۰/۵۵۵۸	۱/۵۱۶۰	۰/۵۴۷۱	۷/۵
۴/۷	۰/۶۰۲۲	۰/۶۰۱۷	۰/۵۴۸۵	۰/۵۹۰۵	۸/۹۲
۵	۰/۶۷۵۰	۰/۶۷۴۴	۱/۵۹۰	۰/۶۵۹۶	۱۱/۶۹
۵/۳	۰/۷۲۶۰	۰/۷۲۵۳	۰/۶۳۳۰	۰/۷۰۷۲	۱۲/۸۱
۵/۵	۰/۸۰۶	۰/۸۰۵۲	۱/۶۸۶۲	۰/۷۸۱۸	۱۴/۸۶
۶	۰/۹۵	۰/۹۴۸	۱/۸۵۷۳	۰/۹۲۳۲	۹/۷۶
۸	۱/۶۵	۱/۶۴۵۷	۱/۴۵۵۱	۱/۵۶۵۸	۱۱/۸۱

٧-٣- بررسي ثابت بودن سرعت در ديوار خارجي

مطالعات آزمايشگاهي ناپ- ايپن نشان داد كه سرعت در طول ديوار خارجي ثابت است. در شكل (١١) نيمرخ سرعت مماسي در ديوار خارجي (Vt) بر اساس نتايج حل عددي Roe-TVD براي عدد فرود ٢/٥ رسم شده است. در جدول (٣) سرعت مماسي و حداكثر تغييرات نسبي آن در ديوار خارجي به ازاي اعداد فرود مختلف آورده شده است.

درجدول (٣)، P_{vt} حداكثر درصد نسبت تغييرات سرعت مماسي است. همان‌طور كه ديده مي‌شود حداكثر تغييرات نسبي سرعت كمتر از حدود ۴ درصد است. با توجه به اين نكته و با درنظر گرفتن شكل (١١)، فرض ثابت بودن سرعت مماسي در ديوار خارجي تا حدودي مناسب به‌نظر مي‌رسد.



شكل (١١): نيمرخ سرعت مماسي در ديوار خارجي بر اساس حل عددي Roe-TVD براي عدد فرود ٢/٥

جدول (۳): سرعت مماسي در ديوار خارجي در مقاطع مختلف

Fr_0 \ مقطع	θ=۰°	θ=۸/۵°	θ=۲۵/۵°	θ=۴۲/۵°	P_{Vt}(%)
۲/۵	۱/۷۴۸۹	۱/۸۴۷۹	۱/۸۰۱۲	۱/۸۰۷۱	۲/۵۲۴
۳	۲/۰۹۸۷	۱/۹۸۱۷	۲/۰۶۴۴	۲/۰۴۴۴	۴/۰۰۴
۴	۲/۷۹۹	۲/۶۷۳۸	۲/۷۰۲۸	۲/۶۶۱۶	۱/۵۲۳۲
۴/۱	۲/۸۶۹۹	۲/۷۴۴۵	۲/۷۶۸۴	۲/۷۳۴۴	۱/۲۲۸۹
۴/۲	۲/۹۴۰۰	۲/۸۱۴۶	۲/۸۳۳۷	۲/۸۱۵۲	۰/۶۷۳۱
۴/۳	۳/۰۰۹۹	۲/۸۸۴۳	۲/۸۸۹۴	۲/۸۹۹۸	۰/۵۳۴۹
۴/۵	۳/۱۵۰۱	۳/۰۲۴۹	۳/۰۳۲۰	۳/۰۶۹۵	۱/۴۵۲۷
۴/۷	۳/۲۹۰۱	۳/۱۶۵۰	۳/۱۶۴۹	۳/۲۱۴۰	۱/۵۲۶۹
۵	۳/۵۰۰۱	۳/۳۷۵۳	۳/۳۶۴۰	۳/۴۱۵۱	۱/۴۹۶۰
۵/۳	۳/۶۴۰۳	۳/۵۱۵۵	۳/۴۹۷۰	۳/۵۴۶۹	۱/۴۰۷۳
۵/۵	۳/۸۵۱۲	۳/۷۲۵۸	۳/۶۹۷۴	۳/۷۴۸۳	۴/۱۵۸۴
۶	۴/۱۹۹۳	۴/۰۷۴۱	۴/۰۳۲۵	۴/۰۸۶۹	۱/۳۳۱۰
۸	۴/۵۹۹۴	۵/۴۶۷۷	۵/۳۹۵۳	۵/۴۵۹۳	۱/۳۲۲۷

۸- نتيجه

جريان فوق بحراني در كانال خميده رينر و هاگر با مقطع مستطيلي با استفاده از روش عددي Roe-TVD مدل‌سازي شد و با جوابهاي تحليلي و نتايج آزمايشگاهي و همچنين جواب‌هاي به‌دست آمده از روش عددي HLL مقايسه گرديد. در ادامه درستي فرضيات روش‌هاي تحليلي به‌كمک شبيه‌سازي عددي ارزيابي شد و مشخص شد كه برخلاف فرضيات حل تحليلي ناپ-ايپن، امواج فوق بحراني در مسير خود در خم پخش مي‌شوند. دو فرض ثابت بودن سرعت متوسط مقطع در طول خم و بدون اصطكاک بودن جريان يا ثابت بودن انرژي مخصوص به ازاي Fr_0<٤/٢ با خطاي حدود يک درصد قابل قبول هستند. همچنين سرعت در ديواره خارجي را در همان محدوده اعداد فرود با خطاي حداكثر چهار درصد مي‌توان ثابت فرض نمود. با افزايش عدد فرود ورودي، جريان در ديواره خم داخلي خشک مي‌شود و از دقت فرضيات فوق كاسته مي‌شود.

۹- مراجع

[۱] Karman, V.; "Eine Praktische Anwendung Der Analogie Zwischen Ueberschall-Strömung In Offenen Gerinnen" ZAMM, Vol. 18, pp. 49-56, 1938.

[۲] Knapp R.T. and Ippen A.T.; " Curvilinear flow of liquids with free surfaces at velocities above that of wave propagation" Proc. 5th Int. Congr. of Appl. Mech., Cambridge University Press, NewYork, pp.531-536, 1938.

[۳] Ghaeini Hessaroeyeh, M. and Tahershamsi, A.; " Analytical model of supercritical flow in rectangular chute bends" J. Hydr. Res., Vol. 47, No. 5, pp. 566-573, 2009.

[۴] Reinauer, R. and Hager, H.; "Supercritical Bend Flow" J. Hydr. Engng., Vol. 123(3), pp. 208-218, 1997.

[۵] Poggi, B.; "Correnti veloci nei canali in curva" L'Energia electrica, Vol. 33, pp.465–480,1956. (Italian)

[۶] Beltrami, G.M., Repetto, R. and Del guzzo, A.; "A Simple Method To Regularize Supercritical Flow Profiles In Bends" J. Hydr. Res., Vol. 45, No. 6, pp.773-786, 2007.

[۷] Valiani, A. and Caleffi, V.; "Brief Analysis Of Shallow Water Equations Suitability To Numerically Simulate Supercritical Flow In Sharp Bends" J. Hydr. Engng., Vol. 131, No. 10, pp. 912-916, 2001.

[۸] Chow, V. T.; Open Channel Hydraulics, McGraw-Hill Intern, 680p, 1986.

[۹] Knapp, R. T.; "Design Of Channel Curves For Supercritical Flow" 2nd paper in High-velocity flow in open channels: A symposium, Transactions, ASCE, Vol. 116, pp. 296-325, 1951.

[۱۰] Toro, E.; Shock Capturing Methods For Free Surface Shallow Flows, John Wiley, ChiChester, New York, 308p, 2001.

[۱۱] Brufau1, P. and Garcia-Navarro, P.; "Two-Dimensional Dam Break Flow Simulation" Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 33, pp. 35–57, 2000.

[۱۲] Gomez, L.; "An Unstructured Finite Volume Model For Unsteady Turbulent Shallow Water Flow With Wet-dry Fronts Numerical Solver And Experimental Validation" thesis doctoral, Universidad de a Coruna, 248p, 2005.

[۱۳] Leveque, R. J.; Finite Volume Methods For Hyperbolic Systems, Cambridge University press, New York, 558p, 2002.

۱۰- زير نويس ها

1. slip boundary condition
2. Bessel function of zero order