استفاده از محاسبات فازی در مدلسازی نااطمينانيها در تخمين مقادير بر اساس روش کريجينگ، مطالعه‌ی موردی: ميزان پراکندگي مکاني سديم در آبخوان زنجان

زهره معصومي[i] *؛ محمد باقر منهاج[ii] ؛ محمد سعدی مسگری[iii]؛ مهدی فرنقي[iv]

چکيده

روش‌هاي مختلفي براي تبديل داده‌هاي نمونه‌برداری شده به سطح پيوسته وجود دارد که در يک تقسيم‌بندي کلي مي‌توان آنها را به روش‌هاي کلاسيک، زمين آماري و روش‌هايي که از هوش محاسباتي بهره مي‌برند، تقسيم نمود. يکي از روش‌های زمين‌آماری متداول، روش کريجينگ است که در آن تخمين بر اساس ساختار فضايي موجود در محيط موردنظر انجام مي‌شود و دقت برآورد در آن، بالاتر است. بر خلاف بهبود چشمگير دقت نسبت به ساير روشها، اين روش نيز داراي معايبي است که از آنها مي‌توان به حساسيت اين روش به کيفيت و خطای داده‌های ورودی و پراکندگي آنها اشاره نمود. براي رفع مشکلات ناشي از نااطميناني به داده‌های ورودی در روش کريجينگ مي‌توان از محاسبات فازی استفاده نمود که در آن مي‌توان نا اطميناني‌هاي موجود در داده‌ها را مدل کرده و از اين طريق نتايج تخمين را بهتر نمود. در اين تحقيق هدف، ارائه‌ی روشي برای مدل کردن نااطميناني‌های داده‌های ورودی با استفاده از محاسبات فازی است. در اين روش تمام داده‌های ورودی با توجه به خطاهای موجود در اندازه‌گيری‌ها به شکل اعداد فازی، وارد معادلات کريجينگ شده‌اند. بنابراين همه‌ی معادلات به شکل فازی حل شده‌اند. در پايان برای تست نتايج، از کريجينگ فازی برای تخمين مقدار سديم در آبخوان زنجان استفاده شده است. نتايج نشان‌دهنده‌ی بهبود دقت تخمين در اين روش نسبت به روش کريجينگ معمولي است، هر چند محاسبات با استفاده از اين روش پيچيده‌تر مي‌شود. همچنين در مطالعه‌ی موردی انجام شده، ميزان سديم در آب‌های زيرزميني پيرامون نواحي صنعتي و شهرهای بزرگ آبخوان بالاتر است.

کلمات کليدی

زمين - آمار، محاسبات فازی، کريجينگ فازی، واريوگرام فازی، آلودگي آب.

Using Fuzzy Computation in Modelling Uncertainties in Kriging Estimation Method, Case Study: Estimation of Sodium Spatial Dispersion in Zanjan Aquifer

Z. Masoomi, MB. Menhaj, M. Sadi mesgari, M. Farnaghi

تاريخ دريافت مقاله:۱۳۸۹/۵/۲۵

تاريخ اصلاحات مقاله:۱۳۸۹/۱۰/۵

[i] *نويسنده مسئول و دانشجوی دکتری سيستم اطلاعات مکاني، دانشگاه صنعتي خواجه نصيرالدين طوسي:zmasoomi@dena.kntu.ac.ir

[ii] استاد و عضو هيئت علمي دانشگاه صنعتي اميرکبير: menhaj@aut.ac.ir

[iii] استاديار و عضو هيئت علمي دانشگاه صنعتي خواجه نصيرالدين طوسي: mesgari@kntu.ac.ir

[iv] دانشجوی دکتری سيستم اطلاعات مکاني، دانشگاه صنعتي خواجه نصيرالدين طوسي m_farnaghi@yahoo.com

ABSTRACT

Various methods have been used to create continuous surfaces from sampled data. One of the most common geostatistical methods is Kriging, which provides an accurate estimation based on existing spatial structure in the sample points. However, Kriging method is sensitive to the errors in the input data, the dispersion of the sample. The purpose of this research is to develop a new method to handle the uncertainties resulted from the input data in the Kriging method. In this approach, the existing uncertainties in the input data are modeled by fuzzy computations, and the variogram variables are calculated in fuzzy mode. To test the new hybrid method, the sodium contamination values in Zanjan aquifer are used. The results show a generally improved accuracy in comparison to the ordinary Kriging method. Consideration of all equations and values in fuzzy raises the complexity of the computation. On the other hand, the integrity problems associated other researches on fuzzy kriging are resolved.

KEYWORDS

Geostatistics, Fuzzy Computation, Fuzzy Semi-Variogram, Water Pollution.

۱- مقدمه

بررسي وضعيت آلودگي آب‌های زيرزميني همواره اهميت خاصي دارد زيرا بهداشت و سلامت افراد رابطه‌ی مستقيم با اين مسئله دارد. به عنوان مثال در تهيه‌ی آب‌های کشاورزی بايد آلودگي آب‌های زيرزميني در نظر گرفته شود تا به سلامت محصولات کشاورزی و مصرف کنندگان آسيبي نرساند. اين مساله در تهيه آب‌های شرب نيز اهميت خاصي دارد. بنابراين لازم است ميزان عناصر و مواد محلول در آب در تمام منطقه و نه فقط در نقاط نمونه‌برداری شده، مشخص شود تا به مديران برای تصميم‌گيری هر چه صحيح‌تر و کارآتر کمک نمايد.

از آنجاکه ميزان غلظت عناصر و موادی مانند سديم، منيزيم، نيترات و غيره در نقاط معدودی از محدوده‌های مطالعاتي (آبخوان‌ها) اندازه‌گيری مي‌شود، برای بررسي پراکندگي اين مواد در آبهای زيرميني مي‌توان از روش‌های تخمين استفاده نمود. با استفاده از اين روش‌ها، مقدار يک کميت در نقاط مجهول با توجه به اندازه‌گيري‌هاي انجام شده از آن کميت در نقاط معلوم، به دست مي‌آيد. در اندازه گيري پديده‌هاي طبيعي و پديده‌هايي مانند آلودگي آب اندازه‌گيري ميزان المان موردنظر به‌وسيله‌ي نمونه‌برداري انجام مي‌شود و با توجه به اينکه نمونه‌برداری از تمام نقاط يک سطح از نظر زماني و مکاني امکان‌پذير نيست، ميزان کميت در ساير نقاط با توجه به يک سری از مدل‌های رياضي موجود تخمين زده مي‌شود [۱۴].

روش‌های مختلفي برای تخمين مقدار يک کميت در نقاط مجهول بر اساس نقاط معلوم وجود دارد که از مهم‌ترين آن‌ها مي‌توان به وزن‌دهي معکوس فاصله، چندجمله‌ای‌ها و کريجينگ اشاره نمود [۲۶]. در اين ميان، روش کريجينگ که يک روش زمين - آماری است، نسبت به ساير روش‌ها مزايای خاصي دارد که مي‌توان به اين موارد اشاره نمود: در اين روش، از ارتباط مکاني نقاط معلوم و نحوه‌ی پراکندگي آن‌ها حول نقطه‌ی تخمين برای برآورد ميزان کميت در نقطه‌ی مجهول استفاده مي‌شود. از طرفي تخمين‌گر کريجينگ، يک تخمين‌گر ناااريب و کمترين واريانس است [۲]. در حقيقت اين روش يک روش آماری است و مي‌توان از واريانس تخمين برای مشخص نمودن خطای تخمين در يک نقطه‌ی خاص استفاده نمود [۲۶].

کاربرد روش کريجينگ زماني که داده‌های اندازه‌گيری شده دارای خطا باشند، محدود مي‌شود [۱۶]. برای رفع اين مشکل مي‌توان از محاسبات فازی استفاده نمود. که مي‌توان عدم قطعيت در اطلاعات کسب شده را با بازه‌های غير تصادفي فرمول‌بندی نمود [۹] . اين عدم قطعيت يعني فقدان يک مرز مشخص که عضويت يا عدم عضويت يک عنصر را به مجموعه تميز دهد [۵]. در واقع داده‌های مبهم در کريجينگ فازی با استفاده از محاسبات فازی مدل مي‌شوند [۲۸].

کريجينگ فازی برای اولين بار به‌وسيله‌ی Bardossy و همکارانش در سال ۱۹۸۹ ارائه شد [۸]. اين روش تا امروز در حال پيشرفت و رفع نقص بوده است. از پژوهش‌هايي که در اين زمينه و با استفاده از اين روش انجام شده مي‌توان به موارد زير اشاره نمود:

- اين روش در تخمين مقادير هدايت الکتريکي آب در يک آبخوان در منطقه‌ی شمال غرب آلمان به کار گرفته شده است. به دليل تغييرپذيری بالا و توزيع نامنظم اطلاعات نقطه‌ای در اين منطقه، مجموعه‌ی داده‌های اصلي با استفاده از مقادير فازی بازسازی شده و نرم‌افزاری نيز در اين راستا تهيه شده است. نتايج اين تحقيق نشان داد که با در نظر گرفتن مقادير مشاهده‌ای به صورت فازی، واريانس تخمين به طور معني‌داری کاهش مي‌يابد [۸].

- در سال ۱۹۹٦، از این روش برای تخمین عمق یخ در منطقه‌ای در کشور آلمان استفاده شده است. در این پژوهش در کل ۲۳۹ نقطه در منطقه نمونه‌برداری شده که ۱۷۲ مورد از آنها به عنوان نقاط فازی در نظر گرفته شده و تخمین با استفاده از نرم‌افزار فازک[1] انجام شده است. همان‌طور که دیده مي‌شود، در این پژوهش نیز مانند کارهای قبل فقط تعدادی از نقاط و نه تمامي آنها به عنوان نقاط فازی در نظر گرفته شده‌اند [۲۳]. این موضوع باعث ایجاد مشکلات در تلفیق محاسبات فازی مربوط به اعداد فازی و محاسبات عادی مربوط به اعداد قطعي[2] مي‌شود.

- در سال‌های ۲۰۰۱-۲۰۰۰ در یک جزیره‌ی آتشفشاني در کشور اندونزی برای تخمین تشعشعات متان در مزارع برنج از کریجینگ فازی استفاده شده است تا آلودگي این تشعشعات در جزیره و مناطق خطر شناسایي شوند. در این تحقیق فقط نیم‌تغییر نما و عوامل آن به شکل فازی در نظر گرفته شده است و اعداد قطعي به عنوان داده‌های ورودی در نظر گرفته شده‌اند [۱۱].

- در سال ۲۰۰۳ میلادی در ایالت کالیفرنیای کشور آمریکا از کریجینگ فازی برای تخمین آلودگي هوای ناشي از عنصر PM10 استفاده شده است. در این پژوهش از نرم افزارهای GIS[3] برای فازی‌سازی میزان آلودگي استفاده شده است [۱۳]. یکي از مشکلات این تحقیق آن است که با اینکه میزان آلودگي هوا در نقاط نمونه‌برداری فازی در نظر گرفته شده است ولي در به دست آوردن واریوگرام فازی و نیز پیش‌بیني میزان آلودگي هوا از عملگرهای فازی استفاده نشده و در حقیقت اصل گسترش[4] در محاسبات فازی نادیده گرفته شده است.

- در سال ۲۰۰۸ در کشور ایران در تحقیقي روش کریجینگ فازی با روش‌های دیگر مانند کریجینگ معمولي و کوکریجینگ برای برآورد ماهانه و سالانه‌ی میزان بارندگي مورد استفاده قرار گرفت. در این کار نیز مانند دو پژوهش اول، از فرضیات و نرم‌افزار تهیه شده برای کریجینگ فازی استفاده شده است که فازک نام دارد. همانطور که گفته شد، در نرم‌افزار فازک داده‌ها به دو صورت اعداد فازی و قطعي وارد محاسبات مي‌شوند و همه‌ی آن‌ها فازی در نظر گرفته نمي‌شوند. همچنین پژوهش مشابهي در سال ۲۰۰۹ برای تهیه‌ی نقشه‌ی فرسایندگي باران در حوزه‌ی دریاچه‌ی نمک (حوزه‌ی شور) و جاجرود انجام شده است [۱] و [۳].

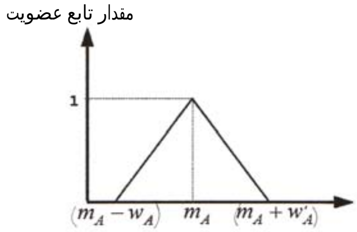
در این تحقیق، برای مدل‌سازی خطاهای موجود در اندازه‌گیری‌های مربوط به آلودگي سدیم در محدوده‌ی مطالعاتي آبخوان زنجان‌رود از کریجینگ فازی استفاده شده است. همه‌ی اعداد مربوط به نمونه‌برداری مقادیر اعداد فازی در نظر گرفته شده‌اند و نیز نیم‌تغییرنما به صورت فازی به دست آمده است. در پایان با توجه به وزن‌های فازی به‌دست آمده از معادلات، مقدار کمیت در همه‌ی نقاط مجهول محاسبه شده است. سپس با ایجاد نقشه‌های مربوطه، مکان‌های آلودگي شناسایي شده‌اند. در حقیقت در اینجا بر خلاف روش‌های قبل، با توجه به فازی بودن همه‌ی اعداد ورودی محاسبات و معادلات نیز فازی شده و برخلاف پیچیده‌تر شدن محاسبات، مشکل تلفیق و مقایسه‌ی اعداد فازی و اعداد قطعي و نیز ناهمگوني دقت، مانند آنچه در فازک وجود داشت، مطرح نیست.

۲- مقدمه‌ای بر تئوری مجموعه‌های فازی

اصول محاسبات فازی اولین بار به‌وسیله‌ی لطفي‌زاده در سال ۱۹٦۵ به صورت گسترشي از منطق دو مقداری ۰ و ۱ به منطق بي‌نهایت مقداری (میان ۰ و ۱) ارائه شد [۵]. اصول این منطق مي‌تواند در محاسبات و تصمیم‌گیری‌های مختلف مورد استفاده قرار گیرد [۲۸] و [۳۰].

مجموعه‌ی فازی و یا عدد فازی A، با کمک یک تابع F_a در بازه‌ی ۰ و ۱ که تابع عضویت[5] نام دارد، بیان مي‌شود. بنابراین مجموعه‌ی A از مقادیر $(x, F_a(x))$ با تعریف $A = \{(x, F_a(x) | x \in X, F_a(x) \in R\}$ به عنوان یک مجموعه‌ی فازی بر روی X (مجموعه‌ی x ها) و تابع عضویت $F_a(x)$ است [۵] و [۱۰].

اصلي که برای فازی‌سازی توابع و روابط قطعي به کار مي‌رود اصل گسترش نام دارد [۲۹]. در حقیقت، یک تابع متداول و مرسوم (قطعي) $f: U \rightarrow V$ فازی مي‌شود، اگر طوری گسترش یابد که بر مجموعه‌های فازی تعریف شده در U و V عمل نماید [۵]. برای سادگي محاسبات در عملگرهای فازی، فرم کانوني اعداد فازی به کار مي‌روند. این فرم‌ها به LR[6] و یا اعداد فازی کانوني مرسومند. یعني مطابق شکل ۱، نمایش یک عدد فازی توسط تابعي خاص به نام توابع مرجع که قسمت‌های چپ و راست تابع عضویت عدد فازی را تبیین مي‌کنند، انجام مي‌شود [۵] و [۲۲] و [۱۹]. در شکل ۱ یک عدد فازی مثلثي نمایش داده شده است.



شکل (۱)- تعریف عدد فازی مثلثي [۵]

عدد فازی A از نوع LR است اگر و فقط اگر داشته باشیم؛

$$\begin{cases} L(\frac{m_A - x}{W_A}) & ,-\infty < x \le m_A \\ R(\frac{x - m_A}{W'_A}) & ,m_A < x \le \infty \end{cases} \qquad (۱)$$

کـه در آن m_A، میـانگین و $W_A,\ W'_A$ میـزان عـرض‌هـای چـپ و راست عدد فازی A را نشان مي‌دهند. فرم کلي عدد فازی مانند A ، به شکل $A\equiv(m_A, W_A, W'_A)$ و یا $A\equiv(A_L, A_C, A_R)$ نمـایش داده مي‌شود که W_A, A_L میزان فازیت عدد در چپ و W'_A, A_R میـزان فازیت عدد در راست و m_A, A_C عدد مرکزی که به ازای آن تـابع عضویت ۱ است (در اصطلاح هسته نامیده مـي‌شـود) را نـشان مي‌دهند [۵]. برای سادگي محاسـبات، عملیـات جبـری روی ایـن اعداد انجام مي‌شود. برای مثال ثابت مي‌شود که اگر دو عـدد A و B را به صـورت $A\equiv(A_L, A_C, A_R)$ و $B\equiv(B_L, B_C, B_R)$ داشـته باشیم، جمع فازی به صورت رابطه‌ی (۲) تعریف مي‌شود[۷] [۵] و [۱۷]:

$$A \oplus B = (m_A + m_B, W_A + W_B, W'_A + W'_B) \qquad (۲)$$

در برخي موارد نیاز داریم مجموعه‌ی فازی B را با نقطه‌ای مانند y^* که بهترین نماینده‌ی آن مجموعه باشد، نشان دهیم. به این عمل غیرفازی سازی گویند [۱۵]. این موضوع مشابه محاسبه‌ی مقدار میانگین یک متغیر تصادفي است. غیرفازی-سازهای مختلفي تعریف شده‌اند که در اینجا به غیر فازی‌ساز مرکز ثقل اشاره مي‌شود. این نوع غیرفازی‌ساز، نقطه‌ی y^* را به عنوان مرکز ناحیه‌ای که به وسیله‌ی تابع تعلق B، پوشش داده شده تعریف مي‌نماید. به این معنا که:

$$y^* = \frac{\int y\mu_B(y)dy}{\int \mu_B(y)dy} \qquad (۳)$$

که اگر $\mu_B(y)$ را تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفي در نظـر بگیریم، آنگاه غیرفازی‌ساز، مقـدار میـانگین متغیـر تـصادفي را مي‌دهد.

۳- مقدمه‌ای بر کریجینگ

کریجینگ یکي از روش‌های زمین - آماری موجود در تخمین میزان یک کمیت است. کریجینگ یک میانگین وزن‌دار است که در آن میزان کمیت در نقاط مجهول از رابطه‌ی ٤ به دست مي‌آید [۶] و [۲۷].

$$\hat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i) \qquad (۴)$$

کـه در آن $\hat{Z}(s_0)$ مقـدار بـرآورد شـده در موقعیـت s_0، $Z(s_i)$ مقادیر مـشاهده شـده در موقعیـت i ام، λ_i مقـادیر وزن‌هـا (کـه مجهول بوده و به عنوان خروجي بایستي محاسـبه شـوند) و n تعداد نقاط معلوم است. علي رغم سـایر روش‌هـای متـداول، در کریجینگ علاوه بر فاصله، ساختار فضایي[۸] نقـاط معلـوم حـول نقطه‌ی مجهول نیز در محاسبات وارد مي‌شود.

به صورت بسیار خلاصه مراحل کاری کریجینگ به این شرح است [۲۵]:

۳-۱- محاسبه‌ی فواصل: محاسبه‌ی دو به دوی فواصل تمامي نقاط معلوم از یکدیگر

۳-۲- کلاسه‌بندی فواصل: فواصل میان نقاط کلاسه‌بندی مي‌شوند.

۳-۳- محاسبه‌ی مقدار واریوگرام: این مقدار از رابطه‌ی ۵ محاسبه مي‌شود؛

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} [Z(x+h) - Z(x)]^2 \qquad (۵)$$

که در آن $n(h)$ تعداد جفت نمونه‌های به کار رفته در محاسبه به ازای هر فاصله مانند h، $Z(x)$ مقدار مشاهده شده در موقعیـت x و $Z(x+h)$ متغیر مشاهده شده است کـه بـه فاصـله‌ی h از $Z(x)$ قرار دارد.

۳-٤- رسم واریوگرام مربوطه: در واریوگرام، محور y ها، $\gamma(h)$ ها و محور x ها فواصل h هستند [۲]. در رسم واریوگرام به طور معمول فاصله‌ی زوج نمونه‌ها گروه-بندی مي‌شوند که به آنها گام گفته مي‌شود و γ مربوط به هر گام به‌دست مي‌آید.

۳-۵- برازش یک مدل به واریوگرام: در برازش مدل به واریوگرام مي‌توان از مدل‌های کروی، نمایي، مدل‌های گوسین و غیره، وابسته به شکل واریوگرام استفاده نمود [۱۲]. در زمین - آمار، مؤلفه‌ی تصادفي واریانس در اصطلاح واریانس قطعه‌ای[۹] نام دارد و با C_0 نشان داده مي‌شود، مؤلفه‌ی ساختاردار، واریانس فضایي[۱۰] نام دارد و با C_1 نشان داده مي‌شود (که مشخص مي-نماید تا چه فاصله‌ای میان نقاط همبستگي وجود دارد) و فاصله‌ای که حداکثر مقدار واریوگرام (نیم‌تغییرنما) در آن اتفاق مي‌افتد دامنه‌ی اثر[۱۱] نام دارد و با a نمایش داده مي‌شود [۲۴] و [۱۸]. به عنوان مثال در مدل نمایي داریم:

$$\gamma(h) = C_0 + C_1(1 - \exp(-h/a)) \qquad (۶)$$

۳-۶- تخمین مقدار کمیت در نقاط مجهول: همان‌طور که گفته شد؛ تخمین‌گر کریجینگ یک تخمین‌گر نااریب و کمینه‌ی واریانس است بنابراین اول بایستي عاری عاری از خطاهای سیستماتیک باشد و دوم واریانس تخمین

آن باید حداقل باشد.

برای برقراری شرط اول باید میانگین خطای تخمین صفر باشد یعني طبق رابطه‌ی (۷):

$$E(Z_V - \hat{Z}_V) = 0 \qquad (۷)$$

که در آن Z_V مقدار کمیت در یک نقطه‌ی معلوم و $\hat{Z}_V$ مقدار تخمیني کمیت در همان نقطه است. برای برقراری شرط دوم باید واریانس تخمین را محاسبه نمود و تابع به دست آمده را به حداقل رساند. ترکیب دو معادله از شرایط فوق منجر به حل یک مسأله‌ی بهینه‌سازی مي‌شود که مي‌توان آن را با استفاده از ضرایب لاگرانژ حل نمود. در پایان نتیجه‌ی حل این مسأله معادله‌ی (۸) خواهد بود:

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot Z(x_i) \qquad ,i = 1,2,...,n(h) \qquad (۸)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۸) مقدار کمیت در نقطه‌ی مجهول p به‌دست مي‌آید [۲۱]. در رابطه‌ی (۸)، $Z(p)$ مقدار مجهول در نقطه‌ی p، λ_iها مقادیر وزن‌های برآورد شده، n تعداد جفت نمونه‌های به‌کار رفته در محاسبه به ازای هر فاصله مانند h و $Z(x_i)$ مقادیر کمیت موردنظر در نقاط معلوم است. بنابراین وزن‌ها در کریجینگ به مدل برازش داده شده[۱۲] به داده‌های معلوم، فاصله از نقاط معلوم و روابط مکاني[۱۳] میان نقاط معلوم در اطراف نقطه‌ی مجهول بستگي دارند.

٤- کریجینگ فازی

برای تخمین مکاني بهتر میزان یک کمیت، مي‌توان از محاسبات فازی بر اساس دانش کاربر استفاده نمود [۶]. کریجینگ فازی توسعه‌ای از کریجینگ معمولي است که از مزایای محاسبات فازی در آن استفاده مي‌شود. بر اساس انواع فرضیات مختلف در مورد داده‌ها و واریوگرام، سه نوع کریجینگ فازی مطرح مي‌شود [۲۳]:

- کریجینگ فازی نوع اول: با استفاده از تلفیق داده‌های فازی و قطعي و واریوگرام معمولي
- کریجینگ فازی نوع دوم: با فرض قطعي بودن داده‌های ورودی و واریوگرام فازی
- کریجینگ فازی نوع سوم: با استفاده از داده‌های فازی و واریوگرام فازی

در این تحقیق از کریجینگ فازی نوع سوم استفاده شده است. همه‌ی مشاهدات ورودی به عنوان اعداد فازی در نظر گرفته شده و در پایان با واریوگرام فازی به‌دست آمده، میزان مقادیر مجهول تخمین زده شده اند.

در اینجا برای روشن‌تر شدن استفاده از محاسبات فازی در کریجینگ با حفظ ساختار قسمت ۳، دلیل استفاده و چگونگي استفاده از فازی در کریجینگ آمده است:

٤-١- محاسبه‌ی فواصل: محاسبه‌ی دو به دوی فواصل همه‌ی نقاط معلوم از یکدیگر.

٤-٢- کلاسه‌بندی فواصل: فواصل محاسبه شده میان نقاط کلاسه‌بندی مي‌شوند.

٤-٣- محاسبه‌ی مقدار واریوگرام به شکل فازی: برای بهبود تخمین واریوگرام، مي‌توان اعداد به‌دست آمده به عنوان عوامل واریوگرام را به صورت اعداد فازی در نظر گرفت. در نتیجه، مراحل کریجینگ معمولي با استفاده از اصل گسترش به محاسبات فازی تغییر خواهد کرد. همان‌طور که دیده شد، مقدار واریوگرام در کریجینگ معمولي از رابطه‌ی ۵ محاسبه مي‌شود. در کریجینگ فازی نوع سوم با توجه به فازی بودن اعداد $Z(x)$، $Z(x+h)$ و تعمیم اصل گسترش در آن، $\gamma(h)$ فازی که به صورت $\hat{\gamma}(h)$ نشان داده شده است، به صورت رابطه‌ی (۸) محاسبه خواهد شد:

$$\gamma(h) = \frac{\oplus_1^{N(h)} \left[(\hat{Z}(x+h) \ominus \hat{Z}(x)) \otimes (\hat{Z}(x+h) \ominus \hat{Z}(x)) \right]}{2n(h)} \qquad (۸)$$

که در آن Θ، $\oplus$ و $\otimes$ عملگرهای فازی و $\hat{Z}(x)$ و $\hat{Z}(x+h)$ اعداد فازی هستند.

٤-٤- رسم واریوگرام: از آنجاکه اعداد به‌دست آمده در مرحله‌ی قبل یعني $\hat{\gamma}(h)$ ها اعداد فازی هستند، برای رسم واریوگرام با استفاده از غیر فازی‌سازها مي‌توان یک عدد به هر کدام از $\hat{\gamma}(h)$ ها نسبت داد.

٤-٥- برازش یک مدل به واریوگرام: در مرحله‌ی بعد با استفاده از روش کمترین مربعات، یک مدل به واریوگرام به‌دست آمده برازش داده مي‌شود. از آنجا که به‌دست آوردن دقیق المان‌های واریوگرام مانند C_0، و C_1 ممکن نیست، با در نظر گرفتن این اعداد به صورت اعداد فازی ابهام موجود تا حد زیادی مدل خواهد شد [۲۰]. به عنوان مثال با در نظر گرفتن واریوگرام نمایي فازی خواهیم داشت:

$$\hat{\gamma}(h) = \hat{C}_0 \oplus \hat{C}_1 \otimes (1 - \exp(-h/a)) \qquad (۹)$$

که در آن $\hat{C}_0$ و $\hat{C}_1$، اعداد فازی هستند. در این تحقیق این اعداد به صورت اعداد کانوني فازی مثلثي در نظر گرفته شده‌اند. در نتیجه مقادیر $\hat{\gamma}(h)$ اعداد فازی خواهند بود.

٤-٦- تخمین مقدار کمیت در نقاط مجهول: در اینجا نیز مانند بخش ٦-٣، برای تخمین مقادیر مجهول با فرض نااریب بودن و کمینه واریانس بودن تخمین‌گر

کریجینگ، دو معادله تشکیل می‌شود که از بهینه نمودن آنها به رابطه‌ی (۱۰) می‌رسیم که با آن مقادیر در نقاط مجهول به دست می‌آیند.

$$\hat{Z}(p)=\bigoplus_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i\otimes\hat{Z}(x_i) \qquad (۱۰)$$

کـه در آن $\hat{Z}(p)$ مقـدار مجهـول در نقطـه‌ی p، $\hat{\lambda}_i$ هـا مقـادیر وزن‌های برآورد شده که به صورت اعداد فازی هستند، n تعداد جفت نمونه‌های به کار رفته در محاسبه به ازای هر فاصله مانند h، $\hat{Z}(x_i)$ مقادیر کمیت موردنظر در نقـاط معلـوم اسـت کـه بـه صـورت اعـداد فـازی وارد محاسـبات شـده‌انـد و $\oplus$ و $\otimes$ عملگرهای جمع و ضرب فازی هستند.

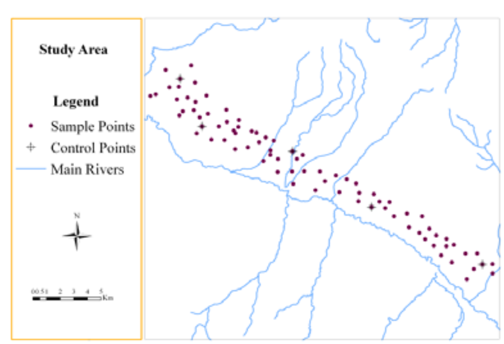
۴-۷- نسبت دادن یک عدد قطعي به کمیت برآورد شده: برای به‌دست آوردن مقدار نهایي برآورد شده از روش‌های غیر فازی سازی استفاده می‌شود [۸].

۵- روش انجام کار

در این قسمت پس از معرفي محدوده‌ی مطالعاتي، چگونگي آماده‌سازی داده‌ها و ورود آنها به مدل پیشنهادی تشریح خواهد شد.

۵-۱- محدوده‌ی مطالعاتي

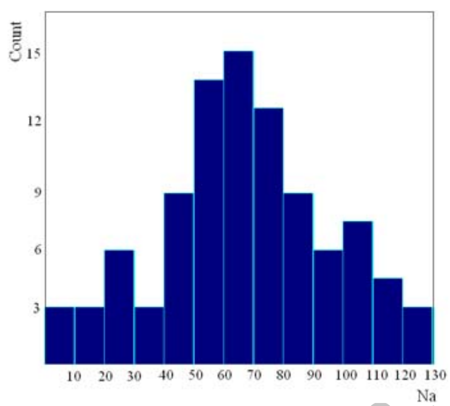
این تحقیق در محدوده‌ی مطالعاتي آبخوان زنجان به کار گرفته شده است. این آبخوان در شمال غرب کشور ایران واقع شده است و شهر زنجان روی این آبخوان قرار دارد. برای بررسي کیفیت شیمیایي آب در این سفره‌ی آب زیرزمیني، سالانه در مقاطع زماني کم‌آبي و پرآبي نمونه‌هایي از چاه‌های موجود در منطقه برداشت مي‌شود. داده‌های به کار رفته در این تحقیق مربوط به فصل کم‌آبي بوده و در سال ۸۸ جمع‌آوری شده اند. شکل (۲) نحوه‌ی پراکندگي نقاط نمونه‌برداری شده و نقاط کنترل و همچنین موقعیت محدوده‌ی مطالعاتي را نشان مي‌دهد.



شکل (۲): محدوده‌ی مطالعاتي و نقاط نمونه‌برداری و کنترل

۵-۲- آماده‌سازی داده‌ها و انجام تحلیل‌های اولیه ا

برای تخمین مقادیر، ابتدا لازم است بررسي بر روی داده‌ها انجام شود. در محاسبات و تخمین‌های مربوط به کریجینگ ابتدا لازم است، شرط نرمال بودن داده‌های ورودی بررسي شود زیرا فرض بر این است که داده‌ها تصادفي هستند [۲۵]. به این علت در مرحله‌ی اول باید نرمال بودن داده‌های ورودی بررسي شود. این کار با استفاده از ترسیم هیستوگرام مربوط به داده‌ها و نیز پلات‌های مربوطه، امکان‌پذیر است. شکل (۳) هیستوگرام داده‌ها را نشان مي‌دهد که نشان‌دهنده‌ی نرمال بودن آنها است. گفتني است که در صورت نرمان نبودن داده‌ها مي‌توان با روش‌هایي مانند تبدیلات لگاریتمي، تبدیل کاکس و باکس (Cox & Box) و غیره آنها را به صورت نرمال درآورد [۴].



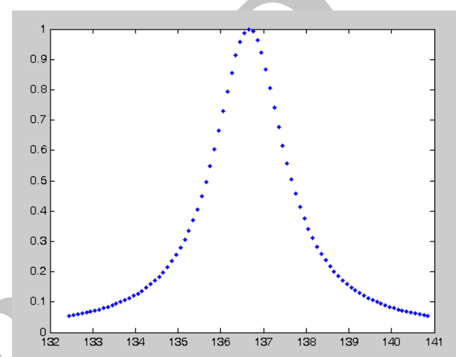
شکل (۳): هیستوگرام مربوط به میزان سدیم محلول در آب

۵-۳- اجرای مدل پیشنهادی

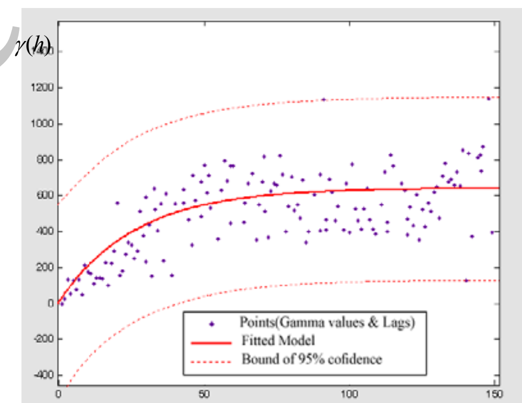
تعداد نقاط نمونه‌برداری از سدیم محلول در آب، در این محدوده ۸۱ نقطه بوده که ۵ نقطه به عنوان نقطه‌ی کنترل در نظر گرفته شده و بقیه به صورت اعداد فازی وارد محاسبات شده‌اند. در حقیقت برای فازی نمودن مشاهدات، از مقدار خطای موجود در آنها استفاده شده است. در مشاهدات مربوط به نمونه‌برداری کمیت‌های شیمیایي آب، در آبخوان‌هایي که ساختار زمین‌شناسي متعادلي دارند، مجموع آنیون‌ها و کاتیون‌ها باید برابر باشند ولي به دلیل وجود خطا در وسایل آزمایشگاهي و یا خطاهای مشاهداتي به طور معمول این دو مقدار با هم برابر نیستند. این اختلاف تا ۱۰ درصد میزان اندازه‌گیری قابل قبول است در غیر اینصورت مشاهده باید تکرار شود. در این تحقیق میزان این اختلاف به عنوان خطا در نظر گرفته شده است. بنابراین در اعداد فازی در نظر گرفته شده، هسته مساوی مقدار مشاهداتي و باندهای چپ و راست با توجه به میزان خطا در مشاهدات، تعریف شده است. اعداد

فازی در دو اجرای متفاوت، یکبار به صورت اعداد فازی مثلثي و بار دیگر به صورت اعداد فازی زنگوله‌ای در نظر گرفته شده‌اند. شکل (٤) یک نمونه از اعداد فازی زنگوله‌ای در نظر گرفته شده را برای ورود به محاسبات نشان می‌دهد.

سپس با توجه به مراحل کاری شرح داده شده، از رابطه‌ی (٩) مقدار $\widehat{\gamma}(h)$ به‌دست آمده است که یک عدد فازی است. در مرحله‌ی بعد پس از غیر فازی‌سازی اعداد به‌دست آمده، واریوگرام مربوطه با استفاده از نرم‌افزار طراحي شده، رسم شده است. شکل (٥) واریوگرام مربوطه و مدل برازش داده شده به آن را نشان می‌دهد. تعداد گام‌ها در این محدوده ١٥٠ گام است که طول هرکدام ١٢٥ در نظر گرفته شده است.



شکل (۴): نمونه‌ای از اعداد فازی وارد شده به محاسبات



شکل (۵): واریوگرام به دست آمده از داده‌ها

در برازش مدل به واریوگرام از روش کمترین مربعات استفاده شده است. به این منظور مدل‌های نمایي، کروی و گوسین به واریوگرام، برازش داده شده است. مدل نمایي دارای کمترین باقیمانده‌ی RMSE[14] و در نتیجه بهترین برازش به داده‌ها بوده است.

با استفاده از مدل برازش داده شده، مشخصات واریوگرام به صورت $\Theta = (a, C_0, C_1)$= (٦٢٠ ، ١٠ ، ٩٠٠٠) به‌دست آمده است. همان‌طور که گفته شد نسبت دادن این مقادیر به صورت اعداد قطعي به المان‌های واریوگرام دقت خوبي ندارد. و اگر بازه‌ای برای تغییر آنها در نظر گرفته شود، نتایج بهتری به‌دست خواهد آمد [٢٠]. در نتیجه C_0 و C_1 به صورت اعداد فازی مثلثي در نظر گرفته شده‌اند. به این ترتیب که عدد به‌دست آمده از روش کمترین مربعات در مرکز عدد فازی قرار داده شده و با توجه به شکل واریوگرام برای آن بازه‌ی تغییر مناسبي در نظر گرفته شده است. به عنوان مثال $\widehat{C}_1$ به صورت رابطه‌ی (١١) تعریف شده است.

$$\widehat{C}_1 = (10000, 9000, 8000) = (\widehat{C}_1^L, \widehat{C}_1^C, \widehat{C}_1^R) \qquad (١١)$$

که در آن $(\widehat{C}_1^L, \widehat{C}_1^C, \widehat{C}_1^R)$ معرف یک عدد فازی مثلثي با بازه‌ی فازیت[15] ١٠٠٠ در چپ و راست و نیز مرکزیت $\widehat{C}_1^C$ است. برای $\widehat{C}_0$ نیز از بازه‌ی فازیت چپ ٢٠ و از راست ١٠ در نظر گرفته شده است. دلیل اینکه بازه‌ی راست، کمتر در نظر شده آن است که از منفي شدن $\widehat{C}_0$ جلوگیری شود. در این حالت شکل عدد فازی غیر متقارن خواهد شد.

در مرحله‌ی بعد، شبکه‌ای رستری[16] به منطقه‌ی مطالعاتي برازش داده شده و مختصات نقاط مرکزی سلول‌ها[17] به‌دست آمده است تا بتوان میزان آلودگي آب را با استفاده از آن پهنه‌بندی نمود. این کار در محیط نرم‌افزارهای سیستم اطلاعات مکاني[18] انجام گرفته است.

سپس با توجه به روابط گفته شده در بخش ٦-٤، وزن‌های $\widehat{\lambda}_i$ و در پایان $\widehat{Z}(p)$ در هر یک از نقاط مرکزی شبکه به‌دست آمده و غیر فازی شده است. در اینجا از روش دو بخشي[19] برای غیر فازی‌سازی استفاده شده است.

گفتني است در این تحقیق برای مقایسه‌ی نتایج، باقیمانده‌های تخمین در دو روش کریجینگ معمولي و کریجینگ فازی، اجرا شده است. شکل (٦)، مقادیر تخمین زده شده را با استفاده از کریجینگ فازی و شکل (٧)، مقادیر تخمین زده شده را با استفاده از روش کریجینگ معمولي نشان می‌دهد.

٦- بحث و بررسي نتایج

در این بخش سعي بر آن است تا اثر پارامترهای مختلف بر روی نتایج مورد بررسي قرار گیرد.

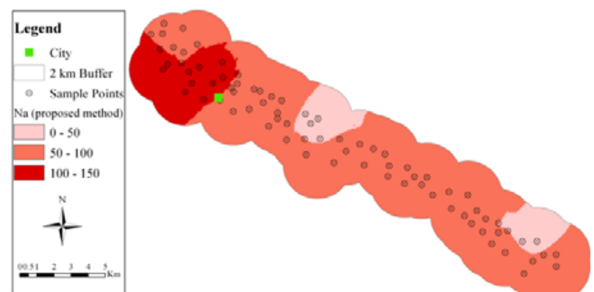
همان‌طور که گفته شد، اعداد در دو مدل فازی مثلثي و فازی زنگوله‌ای وارد محاسبات شده‌اند. در حالت کلي تغییرات معني‌داری در باقیمانده‌ها دیده نمي‌شود ولي نتایج اعداد فازی زنگوله‌ای بهتر است. جدول (١) مقایسه‌ی RMSE در نقاط کنترل، در این دو حالت را نشان می‌دهد.

٦-١- اثر مدل برازش داده شده به واریوگرام بر روی نتایج

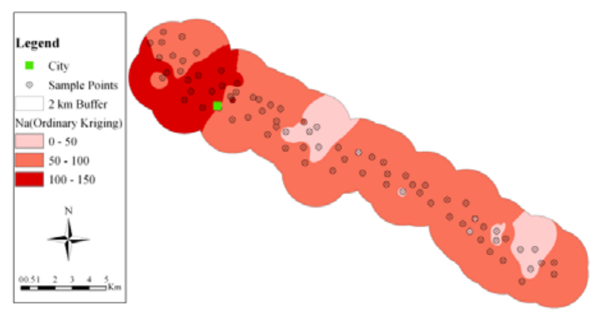
همانطور که گفته شد، در این تحقیق سه مدل نمایي، کروی و گوسین برای برازش به واریوگرام به کار رفته‌اند که جدول (۲) نتایج آن را نشان مي‌دهد. در نتیجه‌ی آن مدل نمایي دارای کمترین باقیمانده در نقاط کنترل است.

٦-٢- بررسي باقیمانده‌های مدل

پس از انجام محاسبات مربوطه و رسم واریوگرام، شکل (۸) نمودار باقیمانده‌های مدل برازش داده شده به واریوگرام را نشان مي‌دهد. منظور از باقیمانده، تفاوت نقاط روی مدل برازش داده شده (مدل‌های نمایي، کروی و گوسین) و نقاط به‌دست آمده در واریوگرام است. در این نمودار توزیع تصادفي باقیمانده‌ها حول صفر نشان‌دهنده‌ی این است که در باقیمانده‌ها مدل خاصي وجود ندارد و آنها حول صفر تصادفي هستند.



شکل (۶): مقادیر تخمین زده شده به روش کریجینگ فازی در محدوده‌ی ۲ کیلومتری نقاط نمونه‌برداری شده



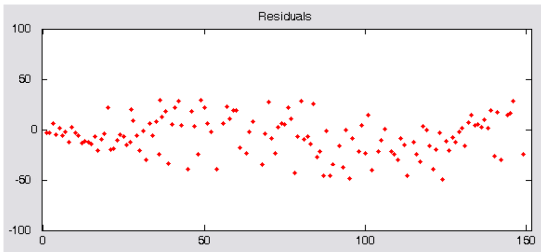
شکل (۷): مقادیر تخمین زده شده به روش کریجینگ معمولي در محدوده‌ی ۲ کیلومتری نقاط نمونه‌برداری شده

جدول ۱: مقایسه‌ی اعداد فازی مثلثي و زنگوله‌ای در محاسبات

روش	مقدار RMSE	مقدار متوسط انحراف معیار تخمین
اعداد فازی مثلثي	۰/۴۹	۰/۰۵۸
اعدادفازی زنگوله‌ای	۰/۴۴	۰/۰۴۹

جدول ۲: نتایج به‌دست آمده از برازش مدل‌های مختلف به واریوگرام

نوع مدل	مدل نمایي	مدل کروی	مدل گوسین
مقدار RMSE	۰/۴۴	۰/۵۸	۰/۶۷



شکل (۸): باقیمانده‌های برازش مدل نمایي به واریوگرام

٦-٣- مقایسه‌ی نتایج مدل پیشنهادی با کریجینگ

نتایج نشان مي‌دهند که باقیمانده‌ی به‌دست آمده از کریجینگ فازی بهتر از باقیمانده‌ی کریجینگ معمولي است. جدول (۳)نتایج به دست آمده را نشان مي‌دهد.

جدول ۳: مقدار **RMSE** به‌دست آمده از دو روش کریجینگ معمولي و کریجینگ فازی برای نقاط کنترل

روش	مقدار RMSE[1]	مقدار متوسط انحراف معیار تخمین
کریجینگ معمولي	۰/۷۵	۰/۱۵
کریجینگ فازی	۰/۴۴	۰/۰۴۹

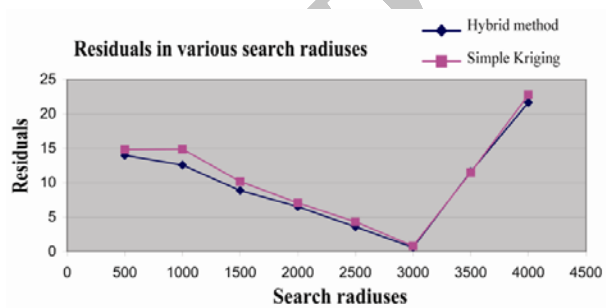
جدول ٤: میزان باقیمانده‌ها در نقاط کنترل و مقادیر براورد شده‌ی انحلال سدیم در دو روش کریجینگ فازی و کریجینگ معمولي

کریجینگ فازی				کریجینگ معمولي			
شماره نقطه کنترل	مقدار واقعي	مقدار برآورد	باقیمانده	شماره نقطه کنترل	مقدار واقعي	مقدار برآورد	باقیمانده
۱	۴۵,۵	۴۵,۲۳	۰,۲۷	۱	۴۵,۵	۴۵,۱۳	۰,۳۶
۲	۷۷,۹۵	۷۸,۰۳	-۰,۰۸	۲	۷۷,۹۵	۷۸,۱۴	-۰,۲۰
۳	۹۱,۹	۹۲,۱۱	-۰,۲۱	۳	۹۱,۹	۹۲,۲۴	-۰,۳۵
۴	۳۷	۳۶,۸۹	۰,۱۱	۴	۳۷	۳۶,۹۲	۰,۰۸
۵	۶۷,۱	۶۶,۸۴	۰,۲۵	۵	۶۷,۱	۶۶,۵۴	۰,۵۶

٦-٤- نقش شعاع جستجو در باقیمانده‌ها

شعاع جستجو نقش بسیار مهمي در تخمین مقدار کمیت‌ها در نقاط مجهول دارد. منظور از شعاع جستجو بیشترین

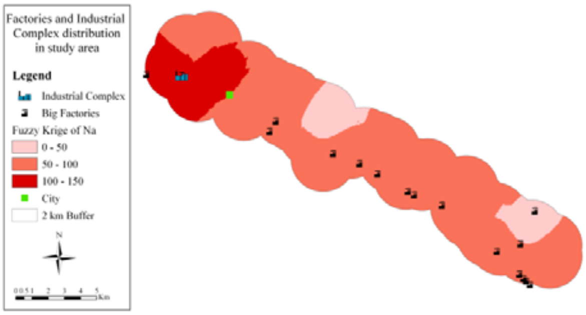
فاصله‌اي است که در آن نقاط معلوم در حول نقطه‌ی مجهول برای تخمین به کار می‌روند. در صورتي‌که شعاع جستجو بیش از حد بزرگ انتخاب شود، باعث هموار شدن[20] سطح پیش‌بیني شده می‌شود و در صورتیکه این شعاع کوچک انتخاب شود، باعث ظاهر شدن تغییرات ناگهاني خواهد شد [۲۲]. در این تحقیق برای یافتن شعاع جستجوی بهینه، مقادیر مختلف برای آن مورد امتحان قرار گرفته و بهینه مقدار آن به دست آمد. شکل (۹) میزان شعاع‌های جستجوی مختلف به همراه RMSE برآورد شده را در دو روش کریجینگ معمولي و کریجینگ فازی نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود، شعاع جستجوی ۳۰۰۰ متر به عنوان شعاع بهینه انتخاب شده است.



شکل (۹): مقدار RMSE به ازای شعاع‌های مختلف جستجو در دو روش فازی و معمولی

٦-٥- پراکندگي مکاني سدیم در آبخوان زنجان و رابطه‌ی آن با صنایع موجود در منطقه

در پایان با استفاده از بهترین نتایج تخمین، مقدار سدیم در آبخوان پهنه‌بندی شده است. در شکل (۱۰) لایه‌ی پهنه‌بندی شده با استفاده از مدل پیشنهادی، لایه‌ی صنایع بزرگ و نیز شهرک صنعتي منطقه نشان داده شده است. شهرک صنعتي و چند صنعت بزرگ در محدوده با آلودگي بالا قرار دارند که نشان از اثر این صنایع بر روی آلودگي آب آبخوان است. از طرفي بیشتر صنایع بزرگ در محدوده‌ی با ریسک متوسط قرار دارند. همچنین بزرگ‌ترین شهر منطقه در محدوده‌ی پرخطر آلودگي قرار دارد.



شکل (۱۰): پهنه‌بندی سدیم در آبخوان به همراه لایه‌ی صنایع بزرگ و شهرک صنعتي منطقه

۷- نتیجه‌گیری

- در صورت استفاده از داده‌های نمونه‌برداری شده به صورت اعداد فازی و تغییر عملیات کریجینگ معمولي به کریجینگ فازی میزان باقیمانده‌ها کاهش می‌یابد.
- نتایج کریجینگ (معمولي و فازی) به پراکندگي نقاط، بستگي دارند.
- در تخمین کمیت‌ها در نقاط مجهول با استفاده از کریجینگ (معمولي و فازی)، میزان برآورد به شدت تحت اثر مدل برآورد شده به واریوگرام است و از آنجاکه برازش مدل تا حد زیادی تجربي است، نتایج تحت اثر نظر کاربر قرار دارند. در کریجینگ فازی این مشکل تا حد زیادی کاهش می‌یابد.
- همانطور که در مورد قبل گفته شد، برآورد در کریجینگ وابستگي زیادی به مدل برازش داده شده به واریوگرام دارد. بنابراین در صورتي‌که بتوان از روش‌هایي استفاده نمود که دقت برازش بالا برود، نتایج بهتری در تخمین به‌دست خواهد آمد.
- همانطور که در سطح برازش داده شده دیده می‌شود، غلظت سدیم در اطراف شهرهای بزرگ و مناطق صنعتي اطراف آنها در محدوده‌ی مطالعاتي، بیشتر از سایر مناطق است. دلیل آن می‌تواند وجود صنایع بزرگ در اطراف این شهرها باشد که باعث بالا رفتن میزان سدیم و در نتیجه آلودگي آب ناشي از این عنصر در این مناطق شده است.

۸- مراجع

[۱] تاج علي پور، زرین؛ مهدیان، محمدحسین؛ پذیرا، ابراهیم؛ حیدري زاده، مجید؛ بندرآبادي رحیمي، سیما؛ کاربرد فازي کریجینگ براي تهیه نقشه فرسایندگي باران در حوزه دریاچه نمك، چهارمین همایش ملي علوم مهندسي و مهندسي آبخیزداري ایران، مدیریت حوزه‌هاي آبخیز، ۱۳۸٦

[۲] حسني، پاک، علي اصغر؛ زمین آمار (ژئواستاتیک)، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ اول، ۱۳۷۷.

[۳] رحیمي بندرآبادي، سیما؛ ثقفیان، بهروز؛ بررسي کاربرد تئوري مجموعه فازي در برآوردتوزیع مکاني بارندگي سالانه و ماهانه، طرح تحقیقاتي، وزارت جهاد کشاورزي، پژوهشکده حفاظت خاك و آبخیزداري صفحه‌ی ۱۳۵، ۱۳۸٤.

[۴] مدني، حسن؛ مباني زمين آمار، انتشارات دانشگاه صنعتي اميركبير (واحد تفرش)، چاپ اول، ۱۳۷۳.

[۵] منهاج، محمدباقر؛ هوش محاسباتی (جلد سوم: محاسبات فازی)، انتشارات دانش نگار، تهران، چاپ اول، ۱۳۸۶.

[۶] Alley, W.M.; Regional Ground-Water Quality, USA, International Thomson publishing, New York, 1993.

[۷] Bardossy, A., Bogardi, I., Kelly, W. E.; "Kriging with Imprecise (Fuzzy) Variograms", Mathematical Geology, Vol. 22, No. 1, p.p.81-94, 1990.

[۸] Bardossy, A., Bogardi, I., Kelly, W. E.; "Imprecise (Fuzzy) Information in Geostatistics", Mathematical Geology, Vol. 20, No. 4, p.p.287-311, 1988.

[۹] Bojadzier, G.; Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications, World Scientific Publication, 2nd Edition, Singapore, 1998.

[۱۰] Dubois, D., Prade, H.; Fundamentals of fuzzy sets, Kluwer Academic Publishers, 1st Edition, USA, Massachusetts, 2000.

[۱۱] Fisher, P.F.; Development in spatial data handling, Springer, Germany, 2005.

[۱۲] Goovaerts P.; Geostatistics for natural resources evaluation, Oxford University Press, 1st Edition, New York, 1997.

[۱۳] Guo, D., Guo, R., Thiart, C.; "Predicting Air Pollutant, Using Fuzzy membership grade Kriging", Computers, Environment and Urban Systems, No 31, p.p.33-51, 2007.

[۱۴] Illian, J., Stoyan, D.; Statistical analysis and modeling of spatial point patterns, Jhon Wiely and sons, Enhland, 2008.

[۱۵] Jones, A., Kaufmann, A., Zimmermann, H.J.; Fuzzy Sets theory and applications, Reidal Publishing Company, Netherlands, 1985.

[۱۶] Kanevski, M., Maignan, M.; Analysis and modeling of spatial environmental data, 1st Edition, EPFL publication, Italy, 2004.

[۱۷] Klir, G. J., Yuan, B.; Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: theory and applications, 1st Edition, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.

[۱۸] Krešić, N.; Quantitative solutions in hydrogeology and groundwater modeling, CRC press, USA, 1998.

[۱۹] Lee, K.H.; First course on Fuzzy theory and applications, Springer, Germany, 2005.

[۲۰] Lodwick, W.; Fuzzy Surfaces in GIS and Geographical Analysis, CRC press, Taylor & Francis, USA, 2008.

[۲۱] Olea, R.A.; Geostatistics for engineers and earth Scientists, Kluwer Academic Publishers, 1st Edition, USA, Massachusetts, 1999.

[۲۲] Pedrycz, W., Gomide, F.; An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis And Design, Massachusetts Institute of technology publication, USA, 1998.

[۲۳] Piotrowski, J. A., Bartels, F., Salski, A., Schmidt, G.; "Geostatistical Regionalization of Glacial Aquitard, Thickness in Northwestern Germany, Based on, Fuzzy Kriging", Mathematical Geology, Vol. 28, No. 4, p.p.437- 452, 1996.

[۲۴] Rouhani, Sh; Geostatistics for environmental and geotechnical applications, ASTM committee, USA, Arizona, 1996.

[۲۵] Stein, M.L.; Interpolation of spatial Data: Theory for Kriging, 1st Edition, Springer, USA, Chicago, 1999.

[۲۶] Wackernagel, H.; Multivariate geostatistics: An Introduction with applications, third Edition, Springer, New York, 2003.

[۲۷] Waller, L.A, Gotway C.A.; Applied Spatial Statistics for public health data, John Wiley and sons, USA, New Jersy, 2004.

[۲۸] Zereini, F., Wolfgang, J.; Water in the Middle East and in North Africa, 1st Edition, Springer, Germany: Berlin, 2004.

[۲۹] Zimmermann, H.J.; Fuzzy sets theory and its applications, 4th Edition, Kluwer academic publishers, London, 2001.

[۳۰] Zimmermann, H.J.; Fuzzy sets, decision making and expert systems, 1st Edition, Kluwer academic publishers, Boston, 1987.

۹- زیرنویس‌ها

1 Fuzzek

2 Crisp

3 Geospatial Information Systems

4 Extension Principle

5 Membership function

6 Left-Right

7 علاقمندان برای مطالعه‌ی بیشتر سایر عملگرها مي‌توانند به رفرنس‌های ۵ و ۱۷ مراجعه نمایند.

8 Spatial arrangement

9 Nugget

10 Sill

11 Range

12 fitted model

13 spatial relationships

14 Root Mean Square Error

15 Fuzziness

16 Raster

17 Cell

18 Geospatial Information Systems

19 Bisector

20 Smoothness