

مطالعه آزمایشگاهی و عددی خرابی در سنگ گرانیتی با استفاده از تانسور ترک مرتبه دوم

کامران پناغی^۱، علی اکبر گلشنی^{۲*}

^۱دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

^۲گروه ژئوتکنیک، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱ آبان ۱۳۹۶

بازنگری: ۲۹ آبان ۱۳۹۶

پذیرش: ۲۶ آذر ۱۳۹۶

ارائه آنلاین: ۲۹ آذر ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

روش المان محدود

آزمایش تعیین سرعت موج طولی

تانسور ترک

سنگ گرانیتی

.Matlab

چکیده: یکی از رویکردهای مورد استفاده در بررسی اثرات ترک بر رفتار محیط ناپیوسته سنگی، مطالعه بر روی محیط پیوسته معادل محیط ترک خورده می باشد. از جمله این روش ها، روش مبتنی بر تانسور ترک است که اثرات هندسی حضور ترک ها شامل اندازه، امتداد، و چگالی عددی آنها را در بر می گیرد. نوشته حاضر به رویکرد جدید تعیین تانسور ترک از مرتبه دوم با استفاده از آزمایشات تعیین سرعت موج طولی در محیط پرداخته و نیز بر نقش آن در تسهیل بررسی ها به عنوان یک رویکرد جایگزین برای برداشت های صحرائی و نیز مدلسازی های عددی کارا تاکید دارد. ماتریس های ساختاری به دست آمده در نوشتار حاضر امکان بررسی رفتار محیط ناپیوسته سنگی را با استفاده از مدل سازی عددی بر پایه روش المان محدود در محیط Matlab فراهم ساختند که نتایج آن از تطابق قابل قبولی با داده های آزمایشگاه برخوردار بود. بدیهی است که بهبود دقت محاسبات از طریق افزایش تعداد نمونه های آزمایشگاهی و به کارگیری نتایج حاصل در برنامه کامپیوتری امکان پذیر می باشد.

۱- مقدمه

راک-بالت معادل [۴] [۷]، مدل محیط پیوسته برپایه میکرومکانیک [۸]، و برنامه تحلیل غیرخطی در برگیرنده نرمی با در نظر گرفتن گسیختگی درزه [۹] از جمله روش های مبتنی بر محیط پیوسته معادل می باشند. در این راستا، روش مبتنی بر تانسور ترک [۱۰] که اثرات هندسی حضور ترک ها شامل اندازه، امتداد، و چگالی عددی آن ها را در بر می گیرد، از اهمیت خاصی به دلیل قابلیت بالای آن برخوردار است. در نظر گرفتن خصوصیات محیط ترک خورده سنگی از طریق تبیین چگالی ترک و ناهمسانی از جمله دستاوردهای به کارگیری این رویکرد می باشد که در مطالعات مربوط به مقاومت مکانیکی محیط و نیز مسائل نفوذپذیری از کارایی خوبی برخوردار است

۲- توسعه روند نظری مقاله

هندسه ترک که ارتباط تنگاتنگی با رفتار ناهمسان مکانیکی در سنگ دارد، بایستی به گونه ای موثر در مسائل مهندسی در نظر گرفته شود. هر چند که توده سنگ در برخی تحلیل های مکانیک سنگی به صورت همسان بررسی می شود، مواد ژئولوژیکی به ندرت دارای خاصیت همسانی بوده و خصوصیات رفتاری متفاوت از حالت همسان از خود نشان می دهند.

بخش مهمی از فعالیت های عمرانی در دنیای مدرن امروزی در ارتباط تنگاتنگ با مهندسی خاک و مکانیک سنگ می باشد. نیاز به توسعه معادن زیرزمینی و روباز، حفرتونل ها در محیط کوهستانی، ایجاد مغارهای نیروگاهی در محیط سنگی، و مخازن ذخیره منابع نفت و گاز زمینی گواه بر این موضوع می باشند. بررسی اثرات ترک بر رفتار محیط ناپیوسته سنگی در دو رویکرد کلی انجام می شود. در یک رویکرد ترک ها به صورت منفرد در نظر گرفته شده و از تکنیک های اجزاء محدودی همچون المان درزه [۱]، روش المان منفصل [۲]، و روش تحلیل تغییر شکل ناپیوستگی ها [۳] استفاده می شود. در رویکرد دیگر، اثرات ناپیوستگی ها در ماتریس رفتاری ماده ظاهر شده و مطالعه بر روی محیط پیوسته معادل محیط دارای نقصان دنبال می شود [۴]. از جمله روش های مرتبط با رویکرد اخیر، مدل تانسور خرابی [۵] است که اطلاعات زمین شناسی محلی را به صورت آماری در مطالعات در نظر می گیرد. علاوه بر این، مدل چندگسیختگی [۶]، مدل

1 Discrete Element Method (DEM)

2 Discontinuous Deformation Analysis method (DDA)

3 Multiple Yield Model (MYM)

4 Equivalent Rock bolt model (EQR)

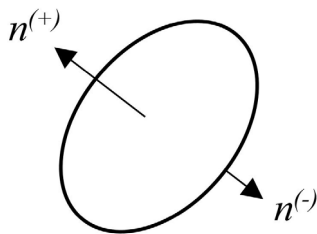
نویسنده عهده دار مکاتبات: golshani@modares.ac.ir

$$F = \frac{\pi}{4V} \sum_{k=1}^{m^{(r)}} \left(r^{(k)} \right)^3 n^{(k)} \otimes n^{(k)} \dots \otimes n^{(k)} \quad (4)$$

در رابطه بالا (k) بیانگر ترک k ام در میان $m^{(r)}$ ترک می باشد. اگر ترک به جای دایره با مربع های دارای ضلع r بیان شوند، عبارت $\pi/4$ از دو معادله اخیر حذف می گردد. می توان مشاهده نمود که تنها ترک های اصلی در محاسبه تانسور ترک مهم می باشند، چرا که هر ترک به تناسب r^3 در رابطه مشارکت می کند. به عبارت دیگر، می توان از ترک های به نسبت کوچک بدون ایجاد خطاهای جدی صرف نظر نمود.

شکل ۱. دو بردار یکه عمود بر سطح ترک

Fig1. Two unit vectors perpendicular to each other



همان گونه که از اطلاعات ارائه شده مشاهده می شود، تعیین تانسور ترک از طریق مشاهدات صحرایی و به گونه ای مستقیم با مشاهده سطح برش خورده سنگ در صحرا امکان پذیر است. این مساله در قالب تهیه دیاگرام امتدادهای نرمال به درزه ها، دیاگرام توزیع طول ترک-ها، و فاصله درزه ها در یک امتداد معلوم خود را نشان می دهد. یک نمونه از این اطلاعات در یک تحقیق در مورد ترک های موجود در تونل تهویه معدن استرپیا در کشور سوئد جمع آوری شد [۱۲]. با استفاده از این اطلاعات، اودا و همکاران در سال ۱۹۸۷ تانسورهای ترک متناظر با این داده ها را تعیین نموده و مسائل نفوذپذیری سنگ در محدوده مورد نظر را بررسی نمودند [۱۳]. علاوه بر این، مطالعات دیگری در زمینه تعیین حجم معرف برای محیط دارای درز و ترک [۱۴] و بررسی رفتار خزشی سنگ [۱۵] با استفاده از این رویکرد انجام شده است. بزرگترین مانع در استفاده از رابطه اخیر برای تانسور ترک صعوبت تعیین طول رد ترک در توده سنگ است، زیرا امکان دسترسی به یک دیواره حفاری بزرگ که بتوان طول ترک روی آن را مشخص نمود همواره امکان پذیر نیست. چنین مشکلاتی منجر به ترغیب محققان برای توسعه ابزارهای جایگزین برای تعیین تانسور ترک گردید که این تحقیقات همچنان ادامه داشته و در صورت موفقیت در حصول نتیجه، مشکلات چنین رویکردی را از میان برخواهد داشت.

علیرغم مطالعات بسیار عددی و آزمایشگاهی برای نشان دادن اثر ترک ها بر خصوصیات مکانیکی سنگ، مشکلات زیادی در بررسی های مربوط به توده سنگ در صحرا وجود دارد که خصوصیات پیچیده ترک ها در محیط به دلیل هندسه آنها از جمله مهمترین این عوامل می باشند. اودا با ارائه تانسور ترک F سعی در تسهیل مدل سازی هندسه واقعی محیط ترک خورده نمود [۱۰ و ۱۱]. در این رویکرد، هندسه ترک معرف چگالی، اندازه و امتداد ترک های مورد نظر به شرح ذیل است:

الف) چگالی ترک: اگر تعداد $m^{(r)}$ ترک در یک محیط همگن از نظر آماری به حجم V وجود داشته باشد، چگالی ترک ρ به صورت $\rho = m^{(r)}/V$ تعریف می شود.

ب) اندازه ترک ها: برای سادگی، یک ترک با سطح S با یک دایره معادل به قطر r جایگزین می شود. این مساله بدان معناست که $r = 2\sqrt{S/\pi}$. اگر شکل ترک از قبل معلوم باشد، می توان از یک بعد مبنا به جای قطر معادل استفاده کرد. سپس توزیع اندازه ترک ها به وسیله تابع چگالی قطرها یعنی $f(r)$ مشخص می گردد. این تابع بایستی رابطه ذیل را ارضا نماید:

$$\int_0^{r_m} f(r) dr = 1 \quad (1)$$

که در آن r_m اندازه بزرگترین قطر موجود در محیط است. ج) امتداد ترک ها: امتداد یک ترک به وسیله دو بردار یکه $n^{(+)}$ و $n^{(-)}$ که عمود بر صفحه اصلی ترک می باشند، مشخص می گردد (شکل ۱). $n^{(+)}$ دارای امتداد موازی اما جهت مخالف با $n^{(-)}$ می باشد. در ادامه، معرف هر دوی $n^{(+)}$ و $n^{(-)}$ خواهد بود. تابع چگالی $E(\mathbf{n}, r)$ برای نمایش توزیع آماری n ها مورد استفاده قرار می گیرد. این تابع نیز رابطه زیر را ارضا می نماید:

$$\int_0^{r_m} \int_{\Omega} E(\mathbf{n}, r) d\Omega dr = 1 \quad (2)$$

که در آن Ω زاویه فضایی متناظر با کل سطح یک کره واحد می باشد. در اینجا $E(\mathbf{n}, r) = E(-\mathbf{n}, r)$ و بنابراین مستقل از هم باشند، می توان آن را به صورت $E(\mathbf{n}) f(r)$ نوشت. در ادامه، تانسور ترک F برای تعریف ریاضی هندسه ترک به صورت زیر معرفی شد [۱۰]:

$$F = \frac{\pi\rho}{4} \int_0^{r_m} \int_{\Omega} r^3 n \otimes n \dots \otimes n E(\mathbf{n}, r) d\Omega dr \quad (3)$$

که در آن \otimes معرف ضرب تانسوری بوده و تعداد n ها مرتبه تانسوری را مشخص می کند. اگر همه اطلاعات مربوط به ترک های منفرد موجود باشد، انتگرال اخیر می تواند به فرم زیر نوشته شود:

موج روی نمونه‌های گچی که دارای توزیع ترک به صورت تصادفی بودند، انجام شد که در نهایت به توسعه رابطه زیر به عنوان تخمینی مناسب برای بیان رفتار الاستیک مواد ترک خورده منجر گردید:

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{33} \\ \bar{\epsilon}_{23} \\ \bar{\epsilon}_{31} \\ \bar{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} F_{11} + \frac{D}{E} & -\frac{D}{E} \nu & -\frac{D}{E} \nu & 0 & \frac{1}{2} F_{13} & \frac{1}{2} F_{12} \\ & F_{22} + \frac{D}{E} & -\frac{D}{E} \nu & \frac{1}{2} F_{23} & 0 & \frac{1}{2} F_{12} \\ & & F_{33} + \frac{D}{E} & \frac{1}{2} F_{23} & \frac{1}{2} F_{31} & 0 \\ & & & \frac{F_{22} + F_{33}}{4} + \frac{D}{4G} & \frac{1}{4} F_{12} & \frac{1}{4} F_{31} \\ & & & & \frac{F_{33} + F_{11}}{4} + \frac{D}{4G} & \frac{1}{4} F_{23} \\ & & & & & \frac{F_{11} + F_{22}}{4} + \frac{D}{4G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ 2\bar{\sigma}_{23} \\ 2\bar{\sigma}_{31} \\ 2\bar{\sigma}_{12} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Sym.

شد (شکل ۲-الف). سنگ گرانیتی مورد استفاده در مطالعات متعددی با استفاده از تانسور ترک مانند [۱۷] و نیز مدل سازی عددی ناحیه اطراف محل حفاری در تونل با استفاده از رویکرد میکرومکانیکی [۱۸] مورد مطالعه قرار داده شده است. علاوه بر این، پناگی و همکاران (۲۰۱۵) بر مبنای رویکرد استفاده از تانسور ترک تغییرات چگالی ترک و ناهمسانی در این سنگ را حین بارگذاری سه محوری مورد بررسی قرار دادند [۱۹]. کانی‌های تشکیل دهنده سنگ به ترتیب طبقه بندی بر اساس حجم عبارت از کوارتز (۳۷٪)، پلاژیوکلاز (۳۳٪)، فلدسپار (۲۴٪)، و بیوتیت و سایر کانی‌ها (۶٪) می‌باشند. دستگاه مورد استفاده برای برش نمونه‌ها قابلیت تولید نمونه‌های سنگی تا دقت ۰/۰۰۲ میلی‌متر را دارا بود (شکل ۲-ب).

اودا و همکاران در سال ۱۹۸۴ نرمی محیط دارای ناپیوستگی را در قالب تئوری الاستیک و با استفاده از تانسور ترک فرمول بندی نمودند [۱۶]. در این راستا، آزمایشات فشاری تکمحوری و اندازه‌گیری سرعت

در رابطه اخیر مقدار پارامتر D برابر با $2E/\pi$ می‌باشد. رابطه تنش کرنش مورد نظر دارای پتانسیل به کارگیری در تحلیل‌های المان محدود بوده و قادر به بیان رفتار الاستیک محیط ترک خورده ناهمسان می‌باشد که در ادامه این مساله با انجام تحلیل‌های مربوطه از طریق مدل سازی عددی به گونه‌ای دقیق تر بررسی می‌شود.

۳- مشخصات سنگ و تعیین تانسور ترک

در این مطالعه از چهار نمونه مکعب مستطیلی گرانیت اینادا با ارتفاع و ابعاد جانبی به ترتیب ۷۰ و ۳۴ سانتیمتر و چگالی متوسط ۲۶۲۸ کیلوگرم بر مترمکعب که از ناحیه ایباراکی در کشور ژاپن به دست آمده بودند، استفاده



(ب)



(الف)

شکل ۲. الف) یک نمونه از گرانیت اینادا و ب) دستگاه برش سنگ مورد استفاده در مطالعه حاضر
Fig2. a) Inada granite sample b) Cutting rock machine used in present research

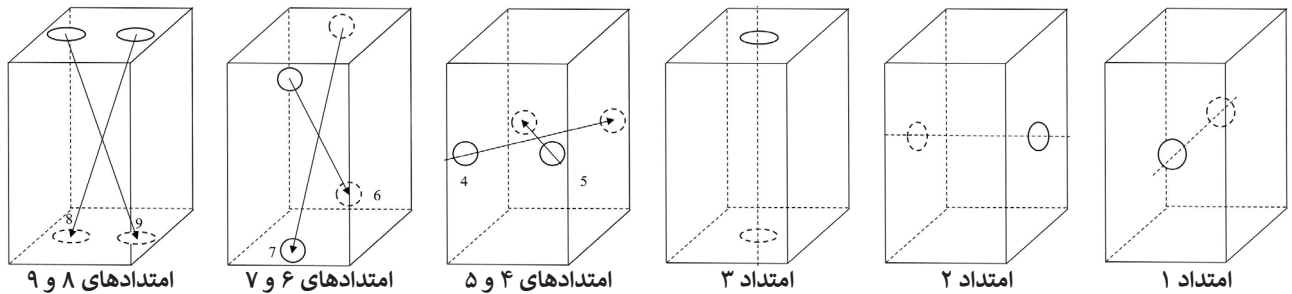
استفاده در شرایط تنش سه محوری واقعی تا مقادیر ۹۰، ۹۵ و ۹۷ درصد مقاومت نهایی قرار گرفته و با استفاده از تکنیک اندازه‌گیری انتشار امواج صوتی در سنگ، سرعت این امواج در نه امتداد تعیین گردید (شکل

علیرغم ظاهر نسبتاً همسان سنگ، سه صفحه متعام در گرانیت قابل تشخیص هستند که بر اساس کاهش مقاومت در برابر شکستگی با نامهای از ریفت، گرین، و هاردوی شناخته می‌شوند. نمونه‌های مورد

مولفه‌های تانسور ترک F_{ij} تعیین گردیدند. در این رابطه k ضریب وابسته به شکل ترک‌ها در نمونه می‌باشد. جدول ۲ مقادیر محاسبه شده آرایه‌های تانسور ترک متناظر با نمونه‌های مورد بررسی برای هر نمونه را نشان می‌دهد. تانسور ترک مرتبه دوم که ابزاری برای بیان وضعیت هندسی و توزیع ترک‌ها در نمونه سنگ است، در معادله ساختاری مورد استفاده برای مدل‌سازی عددی به کار برده شد که در ادامه جزئیات آن از نظر گذرانده می‌شود.

۳ و جدول (۱). شکل ۴ جزئیات سیستم مورد استفاده در آزمایشات اندازه‌گیری سرعت موج صوتی در مطالعه حاضر را به تصویر می‌کشد. داده‌های این مرحله برای استخراج آرایه‌های تانسور سرعت موج V_{ij} مورد استفاده قرار گرفت و در نهایت با استفاده از رابطه ارائه شده توسط تاکمورا و اودا در سال ۲۰۰۵ [۲۰]:

$$F_{ij} = k (V_{ij}^{-1} - \delta_{ij}), i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

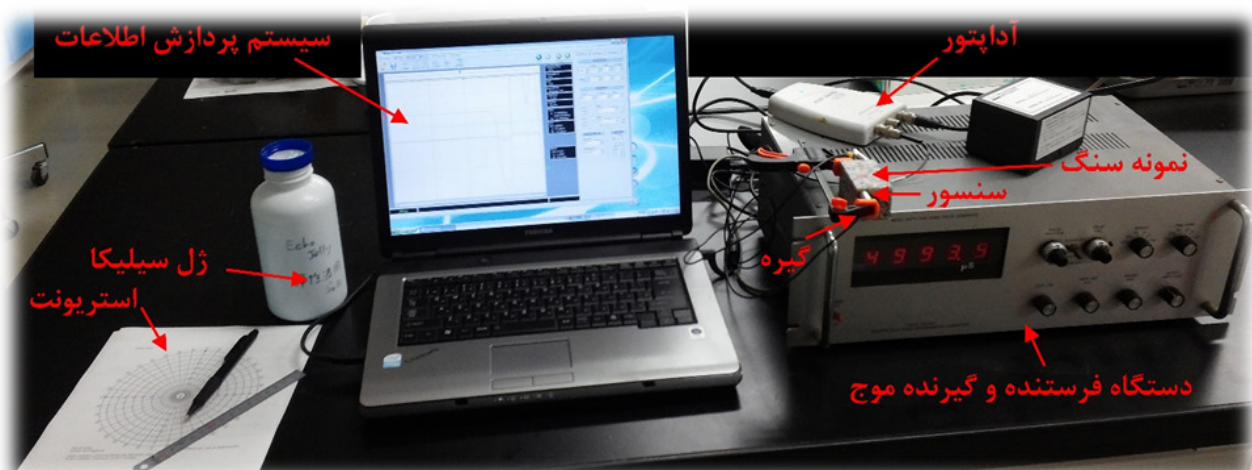


شکل ۳. امتدادهای در نظر گرفته شده برای انتشار امواج صوتی در نمونه‌های سنگ گرانیتی
Fig3. Orientations considered for waves propagation in granitic rocks samples

جدول ۱. مقادیر اندازه‌گیری شده سرعت انتشار موج طولی در نه امتداد گوناگون برای نمونه‌های سنگ مورد بررسی

Table 1. Measured longitudinal wave velocities among nine different orientations for Inada granite sample

امتداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
IGr34	۲/۹۲	۳/۴۲	۳/۷۵	۳/۳۹	۳/۳۳	۳/۱۳	۳/۲۲	۳/۶۸	۳/۷۱
IGr35	۳/۳۸	۳/۹۳	۳/۹۴	۲/۸۴	۳/۰۴	۳/۹۰	۳/۹۱	۳/۸۴	۳/۸۷
IGr39	۲/۷۹	۳/۰۴	۳/۷۵	۲/۶۸	۲/۶۸	۳/۸۰	۳/۹۵	۳/۶۱	۳/۷۱
IGr31	۳/۱۷	۳/۵۹	۴/۱۲	۲/۹۷	۲/۹۷	۳/۸۵	۳/۸۷	۳/۷۷	۳/۹۸



شکل ۴. نمایش تجهیزات مورد استفاده در فرآیند اندازه‌گیری سرعت انتشار موج در نمونه‌های سنگ در آزمایشگاه

Fig4. Second order crack tensors for Inada granite samples

جدول ۲. تانسورهای ترک مرتبه دوم برای نمونه‌های سنگ گرانیت اینادا

Table 2. Second order crack tensors for Inada granite samples

نمونه سنگ	شدت بار (%)	تانسور ترک
IGr34	صفر	1.743853 -0.07429 -0.06943
		1.25923 -0.08242
		Sym. 0.983258
IGr35	۹۰	2.071187 0.095486 0.100752
		1.353073 0.105655
		Sym. 1.313442
IGr39	۹۵	2.754094 0.047463 -0.23765
		1.875305 0.076015
		Sym. 1.044917
IGr31	۹۷	2.196944 0.032098 0.117804
		1.524077 -0.05848
		Sym. 1.144891

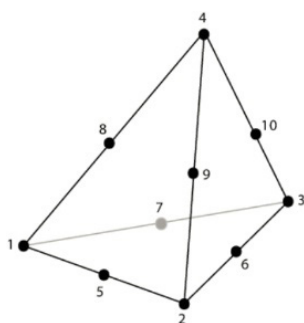
۴- مدل سازی عددی

از میان رویکردهای عددی موجود برای مدل سازی رفتار مصالح دارای ناپیوستگی، روش اجزاء محدود به دلیل متداول تر بودن آن و سرعت نسبی مناسب در مقایسه با روش‌های پیشرفته‌تر عددی از جذابیت خاصی برای مطالعات مکانیک سنگ برخوردار است. با این حال، مساله عدم توانایی ذاتی این روش برای در نظر گرفتن ناپیوستگی‌ها به طور دقیق از چالش‌های موجود برای به کارگیری این روش می‌باشد. این مساله در صورت معادل سازی محیط دارای ترک با یک محیط پیوسته با خصوصیات متفاوت از محیط اولیه و تبیین شایسته اثر ناپیوستگی‌ها در معادله ساختاری تا حد قابل قبولی مرتفع می‌شود. این مساله قبلا برای مطالعه خصوصیات محیط دارای درز و ناپیوستگی با استفاده از تانسور ترک مورد توجه قرار گرفته است [۲۱]. با این حال، تعیین مولفه‌های تانسور ترک برای مدل سازی عددی تاکنون بر مبنای مطالعات صحرایی صورت می‌گرفت. در این نوشتار سعی بر آن شد تا از خاصیت تانسورهای به دست آمده از طریق رویکرد جایگزین مطالعات آزمایشگاهی برای در نظر گرفتن ناپیوستگی‌ها در محیط سنگ با استفاده از معادله ساختاری بر مبنای تانسور ترک (معادله ۵) استفاده شود که در ادامه به تشریح فرآیند مدل سازی پرداخته می‌شود.

۴-۱ المان چهاروجهی ده گرهی

از میان المان‌های مورد استفاده برای مدل سازی عددی محیط سه بعدی، المان‌های چهاروجهی دارای سابقه استفاده طولانی می‌باشند. از جمله دلایل موجود برای این مساله، هندسه ساده‌ترین المان در مقایسه با المانی همچون المان مکعبی و نیز مناسب بودن آن برای مش‌زنی در گوشه‌های گرد اجسام می‌باشد. المان چهاروجهی ده

گره‌ی (شکل ۵) المانی با توابع شکل از نوع چند جمله‌ای مرتبه دوم است. در ضمن، چند جمله‌ای‌های مربوط به توابع شکل این المان کامل بوده و المان از نوع ایزوپارامتریک می‌باشد. چهار گره این المان در گوشه‌ها با اعداد از ۱ تا ۴ شماره گذاری شده و شش گره موجود روی اضلاع آن شماره گذاری ۵ تا ۱۰ را پوشش می‌دهند. گره‌های ۵، ۶ و ۷ به ترتیب روی اضلاع ۱۲، ۲۳ و ۳۱ قرار گرفته و محل قرارگیری گره‌های ۸، ۹ و ۱۰ به ترتیب اضلاع ۱۴، ۲۴ و ۳۴ می‌باشند. لازم به ذکر است که هر چند در مطالعه حاضر گره‌های موجود روی اضلاع در وسط آنها قرار گرفته‌اند، انواع دیگری از خانواده این المان وجود دارند که در آنها گره‌های موجود لزوما در وسط ضلع واقع نمی‌شوند. بدیهی است که هر صفحه از این المان با شش گره تعریف می‌شود.



شکل ۵. المان چهاروجهی ده گرهی
Fig 5. 10-node tetrahedron element

۴-۲ مختصات محلی، توابع شکل، و ژاکوبین

موقعیت یک نقطه از المان می‌تواند توسط مختصات کارتزین (x, y, z) و مختصات محلی مربوط به چهاروجهی $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ تعریف شود که در مورد اخیر شامل یک مجموعه با چهار مولفه بدون

$$\begin{aligned} N_1 &= \zeta_1(2\zeta_1 - 1), N_2 = \zeta_2(2\zeta_2 - 1) \\ N_3 &= \zeta_3(2\zeta_3 - 1), N_4 = \zeta_4(2\zeta_4 - 1) \\ N_5 &= 4\zeta_1\zeta_2, N_6 = 4\zeta_2\zeta_3, N_7 = 4\zeta_3\zeta_1 \\ N_8 &= 4\zeta_1\zeta_4, N_9 = 4\zeta_2\zeta_4, N_{10} = 4\zeta_3\zeta_4 \end{aligned} \quad (9)$$

برای سهولت بیشتر، مشتقات توابع شکل را استخراج می‌کنیم:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{10} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_{10} \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{10} \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & \dots & u_{x10} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & \dots & u_{y10} \\ u_{z1} & u_{z2} & u_{z3} & \dots & u_{z10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ \vdots \\ N_{10} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

که در آن مولفه (i, j) از عبارت $\partial N_j / \partial \zeta_i$ به دست می‌آید. با ضرب داخلی گرادینان تابع شکل در مختصات گرهی المان داریم:

$$\mathbf{J} = 4 \begin{bmatrix} 1/4 & x_1\bar{\zeta}_1 + x_5\bar{\zeta}_2 + x_7\bar{\zeta}_3 + x_8\bar{\zeta}_4 & y_1\bar{\zeta}_1 + y_5\bar{\zeta}_2 + y_7\bar{\zeta}_3 + y_8\bar{\zeta}_4 & z_1\bar{\zeta}_1 + z_5\bar{\zeta}_2 + z_7\bar{\zeta}_3 + z_8\bar{\zeta}_4 \\ 1/4 & x_3\bar{\zeta}_1 + x_2\bar{\zeta}_2 + x_6\bar{\zeta}_3 + x_9\bar{\zeta}_4 & y_3\bar{\zeta}_1 + y_2\bar{\zeta}_2 + y_6\bar{\zeta}_3 + y_9\bar{\zeta}_4 & z_3\bar{\zeta}_1 + z_2\bar{\zeta}_2 + z_6\bar{\zeta}_3 + z_9\bar{\zeta}_4 \\ 1/4 & x_7\bar{\zeta}_1 + x_6\bar{\zeta}_2 + x_3\bar{\zeta}_3 + x_{10}\bar{\zeta}_4 & y_7\bar{\zeta}_1 + y_6\bar{\zeta}_2 + y_3\bar{\zeta}_3 + y_{10}\bar{\zeta}_4 & z_7\bar{\zeta}_1 + z_6\bar{\zeta}_2 + z_3\bar{\zeta}_3 + z_{10}\bar{\zeta}_4 \\ 1/4 & x_8\bar{\zeta}_1 + x_9\bar{\zeta}_2 + x_{10}\bar{\zeta}_3 + x_4\bar{\zeta}_4 & y_8\bar{\zeta}_1 + y_9\bar{\zeta}_2 + y_{10}\bar{\zeta}_3 + y_4\bar{\zeta}_4 & z_8\bar{\zeta}_1 + z_9\bar{\zeta}_2 + z_{10}\bar{\zeta}_3 + z_4\bar{\zeta}_4 \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

که در آن $\bar{\zeta}_i = \zeta_i - 1/4$.

آخرین عبارت در سمت راست معادله ۱۴ شامل تعریف مهندسی کرنش‌های برشی می‌باشد. همان‌گونه که می‌دانیم، رابطه ماتریسی بین کرنشها و تغییر مکان‌های گرهی به صورت زیر است:

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{U}^e \quad (15)$$

ماتریس \mathbf{B} دارای بعد 6×3 بوده و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_{10}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{10}}{\partial y} & \frac{\partial N_{10}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial z} & \frac{\partial N_{10}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{10}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_{10}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (16)$$

میدان تنش نیز با استفاده از تعریف بردار تنش و نیز بهره‌گیری از

بعد می‌شود. مقدار i در گوشه z برابر با واحد و در سایر گوشه‌ها صفر می‌باشد. از آنجا که چهار مولفه مختصاتی در تعریف فضای سه‌بعدی نیاز به وجود یک قید بین i ها را ایجاد می‌کند، همانند حالت موجود برای المان‌های مثلثی در فضای دوبعدی، مجموع توابع شکل مربوط به هر گره بایستی برابر با واحد شود:

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 = 1 \quad (7)$$

با این توصیف، تعریف المان چهاروجهی مرتبه دوم به عنوان المان ایزوپارامتریک به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{10} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_{10} \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{10} \\ u_{x1} & u_{x2} & u_{x3} & \dots & u_{x10} \\ u_{y1} & u_{y2} & u_{y3} & \dots & u_{y10} \\ u_{z1} & u_{z2} & u_{z3} & \dots & u_{z10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ \vdots \\ N_{10} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

بنابراین توابع شکل این المان به صورت زیر تعریف می‌شوند:

۳-۴ محاسبه تغییر مکان‌ها، کرنش‌ها، و تنش‌ها

میدان تغییر مکان المان توسط سه مولفه u_x ، u_y ، و u_z تعریف می‌شود که به صورت مرتبه دوم از مقادیر گرهی متناظر درون یابی می‌گردند. در این حالت بردار تغییر مکان گرهی با بعد 3×1 به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{u}^e = [u_{x1} \ u_{y1} \ u_{z1} \ \dots \ u_{x10} \ u_{y10} \ u_{z10}]^T \quad (12)$$

میدان کرنش المان از طریق معادلات کرنش-تغییر مکان به تغییر مکان‌ها مربوط می‌شود که در قالب اندیسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (13)$$

تعبیر رابطه اخیر در قالب ماتریسی ابتدا با چینش شش مولفه مستقل تانسور کرنش به صورت بردار کرنش شش مولفه‌ای به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\mathbf{e} = [e_{11} \ e_{22} \ e_{33} \ 2e_{12} \ 2e_{23} \ 2e_{31}]^T \quad (14)$$

با توجه به متغیربودن عامل انتگرالگیری در رابطه بالا، از قانون گوس برای انتگرالگیری عددی استفاده می‌کنیم. برای به‌کارگیری این قانون، لازم است تا رابطه اخیر در قالب مختصات محلی بازنویسی شود. با توجه به آنکه \mathbf{B} تابعی از ζ_i است، تنها نیاز به تبیین دیفرانسیل حجمی $d\Omega^e$ و حدود انتگرالگیری در مختصات محلی می‌باشد. در این تبدیل، با توجه به رابطه $d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 d\zeta_4 = 1/6 \det(\mathbf{J}) dx dy dz$ در ترمینان ژاکوبین برای انتقال انتگرالگیری حجمی المان از مختصات کارتزین به مختصات چهاروجهی مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین اگر $F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ یک تابع اسکالر در حالت کلی باشد که از طریق توابع شکل المان $N_k (k = 1, 2, 3, \dots, 10)$ درون‌یابی می‌شود، خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega^e} F(x, y, z) d\Omega^e = \int_{\Omega^e} F(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega^e} F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) 1/6 \det(\mathbf{J}) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 d\zeta_4 \quad (19)$$

ماتریس ساختاری مربوط به رفتار محیط است که هرگونه تغییری در آن به سادگی قابل انجام می‌شود. بدین منظور، ابتدا محاسبات مربوط به برنامه نوشته شده با معرفی ماتریس سختی محیط الاستیک انجام و نتایج آن با روابط مقاومت مصالح مقایسه شد. پس از اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، صحت سنجی مدل تحت بارگذاری پیچیده‌تر با استفاده از ساخت مدل تحت بارگذاری در نرم‌افزار تجاری COMSOL Multiphysics ۵٫۲ و مقایسه نتایج به دست آمده در دو مدل دنبال شد که حاکی از درستی و دقت قابل قبول نتایج به دست آمده از برنامه نوشته شده بود. مدل حاصل از برنامه نویسی در محیط Matlab دارای ۹۱۷ گره و ۴۹۲ المان بود و مدل متناظر با آن در نرم‌افزار تعداد ۵۵۴ المان را در مش‌زنی مشابه مدل مرجع به دست داد. در ضمن، در مدل نرم‌افزاری نیز از المان‌های چهاروجهی ده‌گره‌ای برای انجام مقایسه دقیق‌تر استفاده شد. شکل ۶ هندسه مدل‌های ساخته شده در هر دو نوع بررسی‌ها را در حالت پیش از بارگذاری نشان می‌دهد. شرایط مرزی تغییرمکانی برای نمونه در برنامه المان محدود به صورت وجود قیدهای غلطکی در سه امتداد متناظر با بارگذاری سه‌محوری و در سه وجه مکعب مستطیل تعریف گردید. بارگذاری نمونه‌ها به صورت مرحله‌ای و همچون حالت آزمایشگاهی بر سه وجه آزاد نمونه اعمال شد که مستلزم به روزرسانی مقدار تنش اعمالی و نیز هندسه نمونه تغییرشکل یافته در هر گام از محاسبات بود. بدین ترتیب، حدود ۳۰۰۰ گام بارگذاری برای هر نمونه در آزمایش سه‌محوری شبیه‌سازی شده دنبال شد که زمان مورد نیاز برای آنها بسته به نوع ماتریس ساختاری تعریف شده بین ۴۰ تا ۱۰۰ دقیقه اندازه‌گیری گردید.

رابطه ساختاری به دست می‌آید که در حالت جسم الاستیک خطی فاقد کرنش اولیه، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{o} = \mathbf{E} \mathbf{a} \quad (17)$$

۴-۴ ماتریس سختی

عبارت مورد استفاده برای محاسبه ماتریس سختی المان به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega^e \quad (18)$$

با در نظر گرفتن این رابطه، ماتریس سختی المان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{K}^e = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} / 6 \det(\mathbf{J}) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 d\zeta_4 \quad (20)$$

ماتریس $\mathbf{F}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} / 6 \det(\mathbf{J})$ یک ماتریس 30×30 است. در نهایت، با به‌کارگیری قانون انتگرالگیری گوس در P نقطه با مختصات‌های محلی $(\zeta_{1k}, \zeta_{2k}, \zeta_{3k}, \zeta_{4k})$ و وزن‌های $w_k (k = 1, 2, 3, \dots, p)$ داریم:

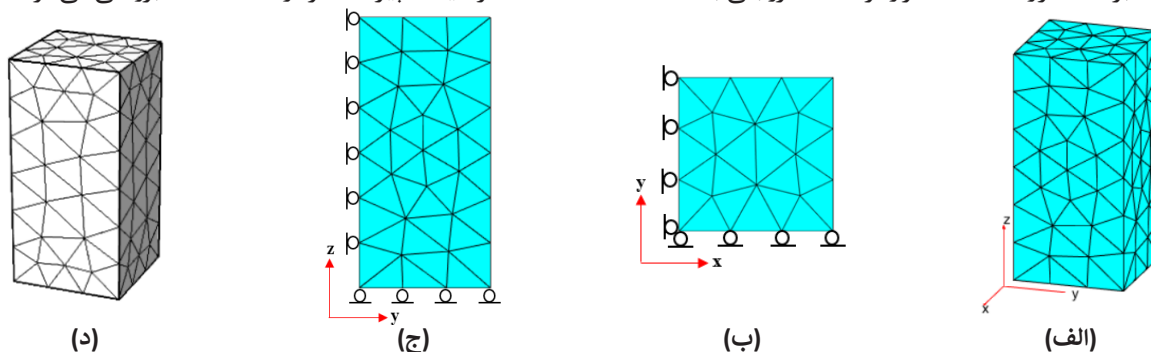
$$\mathbf{K}^e = \sum_{k=1}^p w_k \mathbf{F}(\zeta_{1k}, \zeta_{2k}, \zeta_{3k}, \zeta_{4k}) \quad (21)$$

در بررسی‌های عددی با استفاده از المان‌های چهاروجهی از تعداد ۴، ۸، ۱۴، ۱۵ و یا ۲۴ نقطه گوسی با توجه به نوع مساله و دقت مورد نیاز استفاده می‌شود. در مطالعه حاضر، از چهار نقطه گوسی برای انتگرالگیری عددی در المان‌ها استفاده شد که دقت لازم برای حصول نتیجه مطمئن را به دست می‌دهد.

۴-۵ برنامه نویسی المان محدود و بررسی نتایج

مدل‌سازی عددی نمونه‌های سنگ در قالب روش المان محدود و در سه بعد مرحله دیگری از بررسی حاضر را در بر می‌گرفت که در آن رفتار ماده تحت بارگذاری در محیط Matlab شبیه‌سازی گردید. مزیت نوشتن برنامه المان محدود توسط کاربر دسترس به

ازمدل عددی حاکی از بهبود قابل توجه مقادیر به دست آمده برای نمونه تحت بارگذاری با ماتریس نرمی تغییر یافته و نزدیک شدن نتایج عددی به داده های آزمایشگاه بود (شکل ۷). خاطر نشان می سازد که اختلاف بین منحنی های به دست آمده از تحلیل عددی با نتایج آزمایشگاهی با افزایش تعداد نمونه های آزمایشگاهی و در نتیجه تعداد ماتریس الاستیسیته بیشتر قابل کاهش است. با این حال، همان گونه که مشاهده می شود، این اختلاف با وجود محدود بودن تعداد نمونه های موجود در این مطالعه از دقت قابل قبولی برای تخمین اولیه از رفتار محیط ترک خورده در صحرای به دست می دهد. مقدار کرنش های کوچکتر در مدل سازی عددی نمونه ها را نیز می توان به در نظر گرفتن ماتریس الاستیک مربوط به یک مرحله قبلتر برای هر محدوده شدت بارگذاری نسبت داد که منجر به نمایان شدن خصوصیات پیوسته تر در ماده تحت بررسی می گردد.

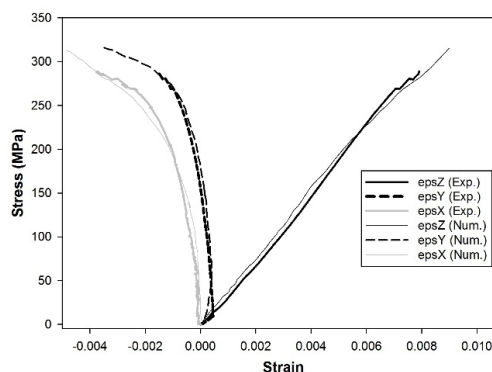


شکل ۶. مدل سازی عددی نمونه سنگی (الف) مش بندی مدل در محیط Matlab (ب) پلان مدل در صفحه xy (ج) نمای مدل در صفحه yz (د) مش مورد استفاده در مدل سازی با نرم افزار COMSOL Multiphysics
 Fig6. Rock sample numerical modeling a) The mesh in Matlab b) The model plan in xy plane c) The model plan in yz plane d) The mesh used in numerical modeling with COMSOL software

۵- نتیجه گیری

در این مطالعه مدل سازی المان محدود سنگ گرانیت با استفاده از محیط پیوسته معادل و با رویکرد استفاده از معادله ساختاری بر پایه تانسور ترک که اثر ناپیوستگی ها در محیط را در بر می گیرد، مورد بررسی قرار گرفت. آرایه های تانسور ترک برای چهار نمونه سنگ که هر کدام با توجه به شدت بارگذاری تجربه شده در درجات مختلفی از خرابی قرار داشتند، به دست آمده و برای معرفی به معادله ساختاری بر حسب شدت بارگذاری در مدل سازی عددی مورد استفاده قرار گرفتند. ماحصل این فرآیند، یک معادله ساختاری با چهار ماتریس نرمی برای یک نمونه سنگ بود که رفتار غیرخطی محیط ناشی از وجود ترک ها در نمونه را تبیین می نمود. ماتریس های نرمی به دست آمده در برنامه المان محدود نوشته شده در محیط Matlab مورد استفاده قرار گرفت و نتایج به دست آمده در قالب نمودارهای مربوط به کرنش های امتداد محوری و دو امتداد جانبی حاکی از دقت قابل قبول پاسخ ها در این بررسی بود. در این ارتباط نکات زیر قابل توجه می باشند:

به منظور بررسی داده ها، ابتدا نتایج به دست آمده از مدل الاستیک با نتایج آزمایشگاهی مقایسه گردید تا به عنوان مبنای تفاوت موجود بین داده های آزمایشگاهی و مدل الاستیک فاقد ترک و ناپیوستگی مدنظر قرار گیرد. پس از آن ماتریس نرمی محیط دارای ناپیوستگی که برای شدت های مختلف بارگذاری به دست آمد، با توجه به مراحل مختلف بارگذاری برای نمونه در مدل سازی عددی تعریف شد. بدین منظور، ماتریس نرمی نمونه بارگذاری نشده برای شدت بارگذاری بین صفر تا ۹۰ درصد، ماتریس الاستیک نمونه با شدت بارگذاری ۹۰ تا ۹۵ درصد، ماتریس الاستیک نمونه با شدت بارگذاری ۹۵ درصد برای حد بارگذاری ۹۵ تا ۹۷ درصد، و ماتریس نرمی متناظر با شدت بارگذاری ۹۷ درصد برای بقیه مرحله بارگذاری تا مقدار مقاومت نهایی نمونه تنظیم و در محاسبات برنامه مورد استفاده قرار گرفتند. خروجی به دست آمده



شکل ۷. مقایسه نتایج آزمایشگاهی نمونه با شدت بارگذاری ۹۷ درصد با خروجی برنامه پس از معرفی ماتریس سختی متغیر در چهار مرحله بارگذاری (صفر تا ۹۰٪، ۹۰ تا ۹۵٪، ۹۵ تا ۹۷٪، و ۹۷ تا ۱۰۰٪)
 Fig7. Experimental data comparison with numerical results for ratiion loading of 97% for four different loading conditions i.e., 0 to 90%, 90% to 95%, 95% to 97% and 97% to 100%

- [6] T. Sasaki, R. Yoshinaka, F. Nagai, A study of the multiple yield models on jointed rock mass by finite element method, in: Proceedings-Japan Society of Civil Engineers, pp. 59-59, 1994.
- [7] A. Hojo, M. Nakamura, Y. Uchita, S. Sakurai, A design method of rock bolts in jointed rock masses, in: Proceedings-Japan Society of Civil Engineers, pp. 143-154, 1996.
- [8] H. Yoshida, H. Horii, Micromechanics-based continuum model for rock masses and analysis of the excavation of underground power cavern, in: Proceedings-Japan Society of Civil Engineers, pp. 23-42, 1996.
- [9] Y. Tasaka, H. Uno, T. Omori, K. Kudoh, Numerical analysis of underground powerhouse excavation considering strain softening and failure of joints, in: Proceedings of the 10th Japan Symposium on Rock Mechanics, pp. 575-580, 1998.
- [10] M. Oda, Fabric tensor for discontinuous geological materials, *Soil Found.*, 22(4), pp. 96-108, 1982.
- [11] M. Oda, Permeability tensor for discontinuous rock masses, *Geotechnique*, 35(4), pp. 483-495, 1985.
- [12] A. Rouleau, J. Gale, Statistical characterization of the fracture system in the Stripa granite, Sweden, in: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, Elsevier, pp. 353-367, 1985.
- [13] M. Oda, Y. Hatsuyama, Y. Ohnishi, Numerical experiments on permeability tensor and its application to jointed granite at Stripa mine, Sweden, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 92(B8), pp. 8037-8048, 1987.
- [14] T. Takemura, M. Oda, Stereology-based fabric analysis of microcracks in damaged granite, *Tectonophysics*, 387(1), pp. 131-150, 2004.
- [15] T. Takemura, M. Oda, H. Kirai, A. Golshani, Microstructural based time-dependent failure mechanism and its relation to geological background, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 53, pp. 76-85, 2012.
- [16] M. Oda, K. Suzuki, T. Maeshibu, Elastic compliance for rock-like materials with random cracks, *Soil Found.*, 24(3), pp. 27-40, 1984.
- [17] T. Takemura, A. Golshani, M. Oda, K. Suzuki, Preferred orientations of open microcracks in granite and their relation with anisotropic elasticity, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 40(4), pp. 443-454, 2003.
- [18] A. Golshani, M. Oda, Y. Okui, T. Takemura, E. Munkhtogoo, Numerical simulation of the excavation damaged zone around an opening in brittle rock, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 44(6), pp. 835-845, 2007.
- [19] K. Panaghi, A. Golshani, T. Takemura, Rock failure assessment based on crack density and anisotropy index variations dur-

با توجه به دقت مناسب نتایج به دست آمده با وجود محدود بودن تعداد نمونه‌ها در این مطالعه، رابطه ساختاری مورد استفاده از پتانسیل مناسبی برای به کارگیری در تحلیل‌های عددی برخوردار است. تنها نقطه ضعف این رویکرد، صعوبت تعیین تانسور ترک با توجه به لزوم انجام برداشت‌های صحرائی است که این مساله در مطالعه حاضر با استفاده از تانسورهای مرتبه دوم به دست آمده از رویکردی جایگزین که استفاده از سرعت انتشار امواج صوتی در محیط می باشد، مرتفع گردید. عوامل خطای موجود در این بررسی علاوه بر تعداد کم نمونه‌ها عبارت از خطای اندازه‌گیری، یکسان در نظر گرفتن شکل ترک‌ها، و نیز صرف نظر از مرتبه بالاتر تانسور ترک برای بررسی دقیق تر رابطه تنش کرنش در معادله ساختاری می باشد. استفاده از مرتبه بالاتر این تانسور در تعیین ماتریس نرمی علاوه بر فراهم آوردن امکان در نظر گرفتن ناهمسانی ماده در بررسی‌ها، به تدقیق رابطه ساختاری از طریق وارد نمودن اثرات پارامترهای سختی نرمال و برشی درزه‌ها منجر خواهد گردید. با این حال، تعیین مرتبه بالاتر تانسور ترک با پیچیدگی‌های خاص خود همراه است که در ادامه بررسی‌ها این امکان توسط نویسندگان دنبال خواهد شد.

۶- تشکر و قدردانی

بدینوسیله نویسندگان از پشتیبانی‌ها و راهنمایی‌های ارزنده Prof. Takato Takemura استاد گراندردر دانشگاه نیهون ژاپن کمال قدردانی و تشکر را دارند. از همکاری‌های مهم و موثر Dr. Manabu Takahashi و Dr. Minoru Sato از موسسه زمین‌شناسی ژاپن نیز در انجام این مطالعه سپاسگزاری می‌شود.

مراجع

- [1] R.E. Goodman, R.L. Taylor, T.L. Brekke, A model for the mechanics of jointed rock, *Journal of Soil Mechanics & Foundations Div*, 1968.
- [2] P. Cundall, A computer model for simulating systems, in: Proc. Symp. On Rock Fracture (ISRM), Nancy:[sn], 1971.
- [3] G.H. Shi, R.E. Goodman, Two dimensional discontinuous deformation analysis, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 9(6), pp. 541-556, 1985.
- [4] B. Singh, Continuum characterization of jointed rock masses: Part I—The constitutive equations, in: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, Elsevier, pp. 311-335, 1973.
- [5] T. Kyoya, Y. Ichikawa, T. Kawamoto, An application of damage tensor for estimating mechanical properties of rock mass, *Journal of the Japan Society of Civil Engineers*, pp. 27-35, 1985.

Archive of SID

granite, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 110(B5), 2005.

[21] H. TADA, Prediction of deformation behavior of jointed rock mass around cavern considering stress dependency of joint stiffness, International Journal of the JCRM, 8(1), pp. 1-10, 2012.

ing triaxial loading tests, Geomechanics and Engineering, 9(6), pp. 793-813, 2015.

[20] T. Takemura, M. Oda, Changes in crack density and wave velocity in association with crack growth in triaxial tests of Inada

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

K. Panaghi, A. A. Golshani ,Experimental and FEM Study on Damaged Granitic Rock Using Second Rank Crack Tensor, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 51(3)(2019)415-424.

DOI: 10.22060/ceej.2017.13575.5441

