

ارائه تابع تخمین حداقل مربعات متحرک نگاشتی برای روش عددی بدون شبکه حداقل مربعات گسسته

مرتضی کلاهدوزان^{۱*}، احسان امانی^۲، صائب فرجی^۱

^۱ دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک)، تهران، ایران
^۲ دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک)، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۲ دی ۱۳۹۶
بازنگری: ۲۹ خرداد ۱۳۹۷
پذیرش: ۱۴ مرداد ۱۳۹۷
ارائه آنلاین: ۲۳ مرداد ۱۳۹۷

کلمات کلیدی:

حداقل مربعات متحرک نگاشتی
حداقل مربعات متحرک
معادلات دیفرانسیلی مشتقات جزئی
روش عددی بدون شبکه
روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته

چکیده: روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته کارایی مناسب خود را برای حل معادلات دیفرانسیلی مشتقات جزئی حاکم بر مسائل مهندسی نشان داده است. این روش بر پایه کمینه کردن تابع حداقل مربعاتی استوار است. تابع حداقل مربعاتی به صورت مجموع وزن‌داری از باقیمانده‌ی معادله دیفرانسیلی و شرایط مرزی حاکم تعریف شده است. معمولاً از تابع تخمین حداقل مربعات متحرک (MLS)، برای ساختن توابع شکل در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته استفاده می‌شود. هرچند با استفاده از این نوع تابع تخمین سازگاری مورد نیاز توابع تخمین ارضا می‌شود، اما روش در صورت تجمع و نزدیکی بیش از اندازه گره‌ها کارایی مناسب خود را از دست می‌دهد. در این مطالعه مشکل مطرح شده، با استفاده از تابع تخمین نوینی که حداقل مربعات متحرک نگاشتی (MMLS) نامیده شده است، برطرف شده است. در این روش خوشه‌های گرهی مجتمع به یک آرایش گرهی استاندارد نگاشت می‌یابند؛ سپس تابع تخمین و مشتقات آن با در نظر گرفتن ملاحظاتی محاسبه می‌شوند. کارایی روش تخمین پیشنهادی MMLS برای برطرف کردن مشکل تابع تخمین MLS با تخمین توابع ریاضیاتی مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده قابلیت روش پیشنهادی MMLS را جهت رفع مشکل نشان داده‌اند. تابع تخمین پیشنهادی در روش بدون حداقل مربعات گسسته مختلط استفاده شده و برای حل معادلات غیرخطی برگز به کار گرفته شده است. نتایج به دست آمده کارایی و دقت بالای روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

۱- مقدمه

روش‌های عددی مبتنی بر المان، مانند روش حجم محدود و المان محدود، کارایی مناسب خود را در حل معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسائل مهندسی نشان داده‌اند، با این وجود، به کارگیری این روش‌ها در مسائلی با مرزهای متحرک و تغییر شکل‌های زیاد، به علت بدشکل شدن المان‌ها، با دشواری‌هایی همراه است؛ این درحالی است که، روش‌های بدون شبکه^۱ با چنین مشکلاتی مواجه نیستند. علاوه بر این، به کارگیری فرآیندهای تطریف نیز، که به منظور افزایش دقت روش‌های عددی توسعه یافته‌اند، در روش‌های بدون شبکه نسبت به روش‌های مبتنی بر المان با سهولت بیشتری قابل اجرا است. از این‌رو، در سالیان اخیر روش‌های بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیلی حاکم بر پدیده‌های مهندسی مورد توجه محققان قرار گرفته‌اند. از جمله روش‌های بدون شبکه معروف می‌توان به روش هیدرودینامیک ذره هموار^۲ [۲ و ۱]، روش بدون جز گالرکین^۳ [۴ و

[۳]، روش بدون شبکه محلی پترف-گالرکین^۴ [۵]، روش ابر بدون شبکه^۵ [۶]، روش نقطه محدود^۶ [۷]، روش دوباره‌سازی هسته ذره^۷ [۸-۱۰]، روش معادله انتگرالی مرزی محلی^۸ [۱۱] اشاره کرد. فرآیند روش‌های بدون شبکه را میتوان در سه مرحله اصلی گسسته‌سازی ناحیه مساله، تولید توابع تخمینی (توابع شکل یا توابع کرنل) و حل دستگاه معادله جبری به دست آمده از کمینه کردن باقیمانده‌ها^۹، خلاصه کرد. روش‌های بدون شبکه، برای گسسته‌سازی ناحیه مساله، از آرایش گره‌ها به جای جزءبندی (المان‌بندی)، که در روش‌های مبتنی بر المان مرسوم است، استفاده میکنند. در روش‌های بدون شبکه، برای تولید توابع تخمین از دو روش عمده استفاده می‌شود: روش‌های مبتنی بر توابع چند جمله‌ای (تابع پایه^{۱۰}) و روش‌های مبتنی بر توابع انتگرالی (تابع کرنل). روش‌های مبتنی بر تابع کرنل معمولاً به طور

4 Local Petrov-Galerkin (MLPG)

5 Hp-Meshless cloud

6 Finite Point Method (FPM)

7 Reproducing Kernel Particle Methods (RKPM)

8 Local Boundary Integral Equation (LBIE)

9 Residuals

10 Basic Functions

*نویسنده عهده‌دار مکاتبات: mklhdzan@aut.ac.ir

1 Meshfree Methods

2 Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

3 Element free Galerkin (EFG)

معادلات مشتقات جزئی مرتبه دوم گسترش داده‌اند و کارایی مناسب آن را در حل معادلات دیفرانسیلی خطی [۲۳] نشان داده‌اند. همچنین اخیراً این روش برای حل مسایل تعادلی [۲۴]، مسایل انتشاری خطی و غیر خطی [۲۵] و نیز حل معادلات ناویر-استوکس تک فاز [۲۶] و چند فاز [۲۷] توسعه داده شده است. در روش بدون شبکه حداقل مربعات، ناحیه مسأله با استفاده از گره‌هایی گسسته‌سازی شده و سپس جواب مسأله با استفاده از تابع تخمین حداقل مربعات متحرک^۵ تخمین زده می‌شود، با کمینه کردن تابعک باقیمانده‌های نسبت به مقادیر مجهول گرهی، مقدار جواب در گره‌ها محاسبه می‌شود. تابعک باقیمانده‌های از مجموع باقیمانده حاصل از قرارگیری تابع تخمین در شرط معادله دیفرانسیلی حاکم بر مسأله و باقیمانده حاصل از قرارگیری آن در شرایط مرزی به دست می‌آید. در فرمولبندی مختلط مرتبه مشتقات مورد نیاز یک مرتبه کاهش می‌یابد به این ترتیب یک معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم تنها با استفاده از مشتقات مرتبه اول توابع تخمین گسسته می‌شود و دیگر نیازی به محاسبه مشتقات مرتبه دوم توابع تخمین - که از لحاظ محاسباتی بسیار هزینه‌بر هستند - نیست. علاوه بر این، با توجه به دقت بالاتر مشتقات مرتبه اول توابع تخمین، دقت روش نیز افزایش می‌یابد.

همان‌طور که اشاره شد، معمولاً در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته -مانند بسیاری دیگر از روش‌های بدون شبکه که از توابع چند جمله‌ای استفاده می‌کنند- از تابع تخمین حداقل مربعات متحرک برای تولید توابع شکل بهره برده می‌شود. این نوع از تابع تخمین با وجود مزایایی که برای آن بیان شد، در صورت نزدیکی و تجمع بیش از اندازه گره‌ها به دلیل بد وضع^۶ شدن ماتریس تخمین آن، کارایی خود را از دست خواهد داد. این موضوع ممکن است به ناپایداری از جنس خوشه شدن گره‌ها^۷ منجر شود. در این مطالعه با ارائه روش نوینی که تابع تخمین حداقل مربعات متحرک نگاشتی^۸ نامیده شده است، علاوه بر برطرف کردن مشکل مطرح شده، هزینه محاسباتی تولید تابع تخمین نیز برای آرایش گرهی منظم کاهش داده شده است. تابع تخمین پیشنهادی در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط استفاده شده و برای حل معادلات غیر خطی برگرز^۹ به کار گرفته شده است. قابلیت روش با حل چند مثال عددی ارزیابی شده است. نتایج به دست آمده کارایی و دقت بالای روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

۲- تابع تخمین حداقل مربعات متحرک

در روش‌های بدون شبکه از روش‌های مختلفی برای تولید توابع تخمینی استفاده می‌شود که از جمله آن‌ها می‌توان به روش تابع پایه شعاعی^{۱۰} [۲۸]،

مستقیم از خود توابع وزن برای تولید تابع تخمین استفاده می‌کنند و از این لحاظ هزینه محاسباتی تولید توابع تخمین در آنها بسیار پایین است، در مقابل، مرتبه پایین سازگاری^۱ توابع تخمینی آن‌ها باعث میشود تا قابلیت این روش‌ها تا میزان زیادی نسبت به قابلیت روش‌هایی که از تابع چند جمله‌ای استفاده می‌کنند، پایین‌تر باشد [۱۲]. از جمله روش‌هایی که از توابع انتگرالی استفاده می‌کنند، می‌توان به روش بدون شبکه هیدرودینامیک ذره هموار و روش نیمه ضمنی ذرات متحرک^۲ [۱۳] اشاره کرد. همان‌طور که اشاره شد چون روش‌های کرتلی به طور مستقیم از خود تابع وزن به عنوان تابع کرنل جهت تخمین استفاده می‌کنند، گروهی از محققان تأثیر استفاده از توابع وزن مختلف را مطالعه و با هم مقایسه کرده‌اند [۱۴]. روش‌هایی که از تابع چند جمله‌ای استفاده می‌کنند هزینه محاسباتی زیادی برای تولید توابع تخمین (توابع شکل) صرف می‌کنند، ولی خلاف روش‌های کرنلی، این روش‌ها قابلیت تولید مراتب بالاتر پیوستگی توابع تخمین را، با افزایش مرتبه تابع پایه، دارا هستند؛ قابلیتی که می‌تواند منجر به جواب‌هایی با دقت بیشتر نسبت به روش‌های مبتنی بر تابع کرنل شود [۱۰]. از جمله این روش‌ها میتوان به روش گالرکین بدون جزء و روش پتروف-گالرکین موضعی بدون شبکه اشاره کرد. مزیت این روش‌ها این است که قدرت تخمین تابع شکل در آن‌ها افزایش یافته است. روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته^۳ [۱۵] که اولین بار توسط افشار و ارزانی ارائه شد نیز از جمله روش‌های بدون شبکه است که از روش توابع چند جمله‌ای برای تولید تابع تخمین استفاده می‌کند. این روش کارایی خود را در حل مسائل جامداتی [۱۶] و سیالاتی [۱۷] به خوبی نشان داده است. به علت اینکه در این روش از شکل قوی معادلات دیفرانسیلی برای گسسته‌سازی استفاده می‌شود، فرآیند انتگرال‌گیری عددی حذف می‌شود، بنابراین هزینه محاسباتی آن از روش‌های بدون شبکه دیگر، مثل روش بدون جزء گالرکین، که از شکل ضعیف معادلات استفاده می‌کنند، کم‌تر است. علاوه بر این، در این روش به دلیل عدم نیاز به انتگرال‌گیری عددی نیازی به هیچ‌گونه المان‌بندی زمینه‌ای نیست. بنابراین روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته - خلاف روش‌های بدون شبکه مبتنی بر فرم ضعیف - کاملاً مستقل از المان‌بندی است. روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته هم‌مکان^۴ توسط فیروزجایی و افشار [۱۸] برای حل معادلاتی از نوع بیضوی ارائه شد و تأثیر نقاط هم‌مکان در بالا بردن دقت و نرخ همگرایی مورد مطالعه قرار گرفت. این روش بعدها توسط نیسیپور و همکاران [۱۹] در حل مسایل الاستیسیته خطی مسطح به کار رفت. افشار و همکاران [۲۰] از این روش برای شبیه‌سازی تطبیقی معادلاتی از نوع هذلولی استفاده کردند. اخیراً، فرمول‌بندی مختلط در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته به کار گرفته شده و از آن برای حل مسایل الاستیسیته خطی مسطح استفاده شده است [۲۱-۲۳]. [۲۲، ۲۱]. فرجی و همکاران این روش را برای حل

5 Moving Least Squares (MLS)

6 Ill-posed

7 Clustering instability

8 Mapped Moving Least Squares (MMLS)

9 Burgers equation

10 Radial Basis Function (RBF)

1 Consistency

2 Moving Particle Semi-implicit (MPS)

3 Discrete Least Squares Meshless (DLSM)

4 Collocated Discrete Least Square Meshless (CDLSM)

که در آن $d = \|X - X_j\| / d_{inf}$ است. با کمینه کردن رابطه (۴) تابع تخمینی به صورت رابطه (۶) به دست می‌آید.

$$\varphi(X) = P^T(X) F^{-1}(X) M(X) \varphi \quad (6)$$

در رابطه (۶)، φ بردار جواب‌های گرهی است. ضرایب F و M در روابط عبارتند از:

$$F(X) = \sum_{j=1}^{num_s} w_j (X - X_j) P(X_j) P^T(X_j) \quad (7)$$

$$M(X) = [w_1(X - X_1)P(X_1), \dots, w_{num_s}(X - X_{num_s})P(X_{num_s})]$$

با جمع بندی رابطه (۶)، داریم:

$$\varphi(X) = N^T(X) \varphi \quad (8)$$

(N)، نشان دهنده تابع تخمین (تابع شکل) است که از رابطه (۹) محاسبه

می‌شود.

$$N^T = P^T(X) F^{-1}(X) M(X) \quad (9)$$

با مشتق گیری نسبی از تابع تخمین، مشتقات نسبی به دست می‌آیند، در رابطه (۱۰) مشتقات نسبی توابع شکا در جهت X ارائه شده است. به همین ترتیب مشتقات در جهت Y نیز قابل محاسبه است.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial P^T}{\partial x} F^{-1} M + P^T \frac{\partial F^{-1}}{\partial x} M + P^T F^{-1} \frac{\partial M}{\partial x} \quad (10)$$

همان‌طور که مشخص است، دقت توابع تخمین در این روش به معکوس پذیری^۷ ماتریس وابسته است. در صورت نزدیکی و تجمع بیش از اندازه گره‌ها، این ماتریس بد وضع شده (میل ماتریس به طرف تکینی) و کارایی روش تخمین از بین می‌رود. در ادامه ضمن بحث مختصری در مورد بد وضعی ماتریس‌ها، روش نوین تابع تخمین حداقل مربعات متحرک نگاشتی جهت برطرف کردن مشکل بیان شده، ارائه شده است.

۳- معکوس پذیری و برآورد خطای حل دستگاه معادله جبری خطی

فرض کنید دستگاه معادله جبری خطی به صورت زیر در اختیار داشته باشیم.

$$AX = B \quad (11)$$

با توجه به حافظه محدود ماشین‌های پردازشگر معادله‌ای که در واقع توسط پردازشگر حل می‌شود عبارت است از:

$$A(X + \delta X) = (B + \delta B) \quad (12)$$

که در آن δB ناشی از خطای محاسباتی ماشین پردازشگر به دلیل محدودیت حافظه در ذخیره قسمت اعشاری پارامترها (خطای ناشی از گرد کردن) است و δX میزان خطایی است که در نتیجه آن به جواب‌ها (X) تحمیل می‌شود. کرانه خطای δX به این صورت محاسبه شده است [۲۸]:

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq K \frac{\|\delta B\|}{\|B\|} \quad (13)$$

7 Invertibility

روش بیشینه انتروپی^۱ [۲۹ و ۳۰]، روش جزء بندی واحد^۲ [۳۱]، روش کریجینگ متحرک^۳ [۳۲]، تابع تخمین حداقل مربعات متحرک [۳۳] و نیز تابع تخمین حداقل مربعات متحرک تعمیم یافته^۴ [۳۴ و ۳۵] اشاره کرد. روش تابع تخمین حداقل مربعات متحرک، یکی از معمول ترین روش‌های تخمین جواب در روش‌های بدون شبکه است که کارایی خود را به خوبی نشان داده است. در این مقاله از این روش برای تولید توابع تخمینی استفاده شده است. در این روش با در نظر گرفتن یک زیر ناحیه تأثیر^۵ برای هر گره معین d ، یک تابع تخمین جواب، نسبت به پارامترهای مجهول گره‌هایی که داخل زیر ناحیه تأثیر قرار دارند، تقریب زده میشود. ناحیه زیر تأثیر شامل تعدادی از گره‌های همسایه‌ی گره λ است، که در ناحیه‌ای به فاصله‌ی شعاع تأثیر از گره λ قرار دارند. در این مطالعه از رابطه (۱) برای محاسبه‌ی شعاع تأثیر گره λ استفاده شده است.

$$d_{inf} = \beta \|X_i - X_{sth}\|_2 \quad (1)$$

در رابطه بالا، β ضریب ثابتی است که برابر دو اختیار شده است و X_{sth} مختصات گرهی است که از نظر نزدیکی به گره λ در مرتبه λ م قرار دارد؛ تا به این ترتیب حداقل تعداد گره لازم برای قرارگیری در هر ناحیه تأثیر، که برابر S است، تضمین شود (مراجعه به رابطه (۳) برای مقدار S). تابع تخمینی در هر زیر ناحیه تأثیر از رابطه (۲) محاسبه می‌شود.

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^s p_i(X) c_i(X) = P^T(X) c(X) \quad (2)$$

رابطه (۳) تابع پایه (P) را معرفی کرده است.

$$P^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^n, \dots, y^n]_{1 \times s} \quad (3)$$

در رابطه (۳)، C بردار ضرایب تابع پایه است و n و S به ترتیب درجه تابع پایه و تعداد مؤلفه‌های آن را نشان می‌دهند. در این مقاله از تابع پایه مرتبه دوم ($n=2, S=6$)، استفاده شده است. در رابطه (۴) تابع نرم دوم وزن داری معرفی شده است که برای تولید تابع تخمین باید کمینه شود.

$$J = \sum_{j=1}^{num_s} w_j (X - X_j) \left(P^T(X_j) c(X) - \varphi_j \right)^2 \quad (4)$$

در رابطه (۴)، num_s تعداد کل گره‌های موجود در هر ناحیه تأثیر است. φ_j و w_j به ترتیب نمایان گر جواب مطلوب و تابع وزن در گره λ م هستند. در این مقاله از تابع وزن اسپلاین مرتبه سوم^۶ استفاده شده است که در رابطه (۵) ارائه شده است.

$$w_j(d) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3 & d \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3 & \frac{1}{2} \leq d < 1 \\ 0 & d > 1 \end{cases} \quad (5)$$

- 1 Maximum Entropy
- 2 Partition of Unity (PU)
- 3 Moving Kriging (MK)
- 4 Generalized Moving Least Squares (GMLS)
- 5 Support domain
- 6 Cubic spline Weight Function

از رابطه (۱) استفاده شده است $(r=d_{int})$. r' باید به اندازه‌ای بزرگ انتخاب شود تا جلوگیری از بد وضعی را تضمین کند. مقدار آن با توجه به صحت ماشین پردازشگر تعیین می‌شود. در نتیجه در این نگاشت توابع شکل به همان صورت باقی خواهند ماند اما لازم است اصلاحاتی در محاسبه مشتقات توابع شکل صورت پذیرد.

$$N(x, y) = N(\xi, \eta) \quad (17)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dx} \quad (18)$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dy} + \frac{\partial N}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dy} \quad (19)$$

بنابراین، با توجه به روابط (۱۵) و (۱۶) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial \xi} r' \quad (20)$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial \eta} r' \quad (21)$$

۵- روش حداقل مربعات گسسته مختلط برای حل معادله برگرز

روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط از فرمول‌بندی مختلط برای گسسته‌سازی معادلات استفاده می‌کند که قبلاً کارایی بالای این روش فرمول‌بندی در روش‌های عددی دیگر نشان داده شده است. با استفاده از فرمول‌بندی مختلط، مشتقات مرتبه دوم با مشتقات مرتبه اول تابع شکل جایگزین می‌شوند. از مزایای فرمول‌بندی مختلط می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف- محاسبات مشتق دوم توابع شکل لازم نبوده و می‌توان از همان مشتقات اول توابع شکل که دارای خطای کمتری هستند استفاده کرد.
 ب- به علت عدم نیاز به محاسبه مشتقات مرتبه بالاتر توابع شکل که از نظر محاسباتی بسیار پرهزینه هستند، هزینه محاسباتی روش کاهش می‌یابد. در این بخش، این روش برای حل معادلات غیرخطی برگرز تشریح شده است. در این مطالعه، توابع شکل و مشتقات مرتبه اول آن‌ها با استفاده از روش حداقل مربعات متحرک نگاشتی محاسبه شده‌اند. روند حل به این صورت است که ابتدا با جاگذاری توابع شکل و مشتقات به دست آمده، در معادله دیفرانسیلی حاکم و شرایط مرزی مساله، مقدار باقیمانده‌های معادله دیفرانسیلی و شرایط مرزی به دست می‌آیند. سپس، مقدار باقیمانده کل، با جمع جبری باقیمانده معادله دیفرانسیلی و باقیمانده شرایط مرزی، به دست می‌آید. با به حداقل رساندن مقدار باقیمانده کل، نسبت به متغیرهای مجهول گرهی، یک دستگاه معادله جبری حاصل می‌شود که با حل آن، مجهولات گرهی محاسبه می‌شوند.

معادله برگرز را به صورت رابطه (۲۲) در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (22)$$

که در آن $\| \cdot \|$ معرف یک نرم دلخواه است. $\| \delta B \| / \| B \|$ میزان خطایی است که به صحت ماشین پردازشگر وابسته است. K عدد حالت ماتریس ضرایب است که عبارت است از [۳۶]:

$$K = \| A \| \| A^{-1} \| \quad (14)$$

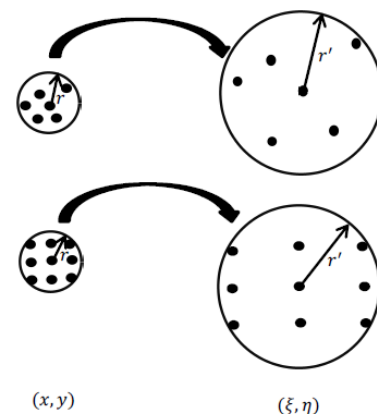
بدیهی است هرچقدر عدد حالت بزرگتر باشد کرانه خطا نیز افزایش خواهد یافت بنابراین انتظار می‌رود که خطای نسبی جواب‌ها $(\| \delta X \| / \| X \|)$ بیشتر شود.

۴- تابع تخمین حداقل مربعات متحرک نگاشتی

همان‌طور که اشاره شد، در صورت تجمع و نزدیکی بیش از اندازه گره‌ها عدد حالت ماتریس F افزایش می‌یابد (ماتریس بد حالت می‌شود)، بنابراین کارایی مناسب تابع تخمین از بین می‌رود. برای برطرف کردن این مشکل، روش پیشنهادی ناحیه تأثیر گره‌ها در فضای مساله را به یک ناحیه معین نگاشت می‌کند. فاصله گره‌ها در ناحیه معین نگاشت یافته طوری تنظیم شده است تا از بروز بد وضعی اجتناب شود. در شکل ۱ جزئیات نگاشت برای آرایش فرضی منظم و نامنظم، از یک ناحیه تأثیر با خوشه‌های مجتمع گرهی به یک ناحیه تأثیر با آرایش استاندارد نشان داده شده است. در این صورت خواهیم داشت:

$$\xi = \frac{r'}{r} x \quad (15)$$

$$\eta = \frac{r'}{r} y \quad (16)$$



شکل ۱. طرح شماتیک نگاشت از یک ناحیه تأثیر مجتمع به یک ناحیه تأثیر استاندارد

Fig. 1. Schematic mapping strategy used in the MMLS

در این روابط r' و r به ترتیب شعاع ناحیه تأثیر در ناحیه اصلی و ناحیه نگاشت شده استاندارد هستند. برای محاسبه شعاع ناحیه تأثیر در ناحیه اصلی

- 1 Precision
- 2 Condition number

در رابطه (۳۱) مقدار شرایط مرزی و I عمل گر مربوط به شرایط مرزی هستند. با جمع دو باقیمانده معادله دیفرانسیلی و باقیمانده شرایط مرزی، باقیمانده کلی به صورت رابطه (۳۲) به دست می آید.

$$\sum_{i=1}^n (R_{\Omega}^T R_{\Omega})_i + \sum_{j=1}^{nb} \alpha (R_{\Gamma}^T R_{\Gamma})_j \quad (32)$$

در رابطه (۳۲) n و nb به ترتیب تعداد نقاط مورد استفاده در کل ناحیه و تعداد نقاط در مرزها هستند. α ضریب پناهی است که باید مقداری به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود. در این مطالعه از مقدار 10^8 برای آن استفاده شده است. با کمینه کردن رابطه (۳۲) نسبت به مجهولات گرهی مقدار این مجهولات در گرهها محاسبه می شوند.

۶- ارزیابی کارایی تابع تخمین پیشنهادی حداقل مربعات متحرک نگاشتی

در این بخش با تخمین چند تابع ریاضیاتی، کارایی تابع تخمین پیشنهادی حداقل مربعات متحرک نگاشتی و تابع تخمین حداقل مربعات متحرک مقایسه شده اند.

در جدول ۱ عدد حالت ماتریس F، که در تابع تخمین حداقل مربعات متحرک استفاده می شود، با فرض فاصله های گرهی یکنواخت متفاوت و برای یک مساله یک بعدی ارائه شده است.

جدول ۱. مقایسه عدد حالت ماتریس F برای فاصله های گرهی متفاوت (آرایش یک بعدی یکنواخت)

Table 1. The condition number of F matrix calculated in different nodal spaces (uniform nodal distribution in one dimensional problem)

فاصله گرهها	عدد حالت ماتریس F
10^{-1}	$3/2453 \times 10^5$
10^{-2}	$4/3329 \times 10^9$
10^{-3}	$4/4768 \times 10^{13}$
10^{-4}	$2/4887 \times 10^{16}$
10^{-5}	$2/4912 \times 10^{20}$
10^{-6}	$2/4798 \times 10^{24}$

همان طور که از نتایج جدول ۱ مشخص است، با کاهش فاصله بین گرهی، عدد حالت افزایش می یابد که می تواند به از دست رفتن کارایی تابع تخمین منجر شود با استفاده از تابع تخمین حداقل مربعات متحرک نگاشتی این مشکل برطرف خواهد شد. از دو تابع تخمین حداقل مربعات متحرک و نوع پیشنهادی نگاشتی آن برای تخمین تابع $f(x)=\sin(4\pi x/L)$ استفاده

که در آن بردار سرعت و v مقدار ویسکوزیته را نشان می دهند. در رابطه (۲۳) گسسته سازی زمانی معادله برگرز ارایه شده است.

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = c \left(-U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^{n+1} + (1-c) \left(-U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^n \quad (23)$$

در رابطه (۲۳) c ضریب تخفیف است که در این مطالعه مقدار آن 0.5 انتخاب شده است. رابطه (۲۳) در ادامه بازنویسی شده است:

$$U^{n+1} - c \Delta t \left(-U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^{n+1} = f; \quad f = (1-c) \Delta t \left(-U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^n + U^n \quad (24)$$

در فرمول بندی مختلط مشتقات مرتبه اول با پارامتر دیگری جاگذاری می شوند. رابطه (۲۵) ارتباط بین پارامتر انتخابی و مشتق مرتبه اول را نشان می دهد.

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (25)$$

با جمع بندی روابط (۲۴) و (۲۵) داریم:

$$\begin{cases} U^{n+1} - c \Delta t \left(-U U_x + v \frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^{n+1} = f \\ U_x = \frac{\partial U}{\partial x} \end{cases} \quad (26)$$

همان طور که ملاحظه می شود، مشتقات نسبی درگیر، از مرتبه دوم در معادله (۲۴) به مرتبه اول در دستگاه معادله (۲۶) کاهش پیدا کرده اند. با خطی سازی دستگاه معادله (۲۶) می توان نوشت:

$$\begin{cases} U^{n+1} - c \Delta t \left(-U^n U_x^{n+1} + v \frac{\partial U_x^{n+1}}{\partial x} \right) = f \\ U_x^{n+1} = \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} \end{cases} \quad (27)$$

جمع بندی ماتریس روابط (۲۷) در رابطه (۲۸) ارائه شده است.

$$D(\varphi) = A \varphi_x + B \varphi \quad (28)$$

که در آن D یک عمل گر دیفرانسیلی است و φ_x بیانگر مشتقات جزئی بردار φ در جهت x است. همچنین ماتریس های A، B در رابطه (۲۹) معرفی شده اند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -cv\Delta t \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & c\Delta t U^n \end{bmatrix} \quad (29)$$

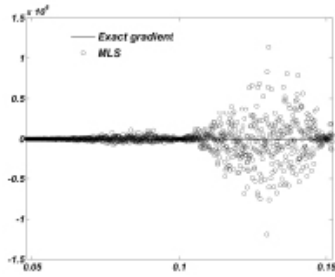
بردار U در رابطه (۳۰) نشان داده شده است.

$$\varphi^T = [U \quad U_x] \quad (30)$$

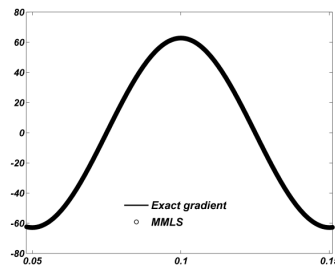
با جاگذاری روابط به دست آمده، مقدار باقیمانده معادله دیفرانسیلی (R_{Ω}) و باقیمانده شرایط مرزی (R_{Γ}) به صورت رابطه (۳۱) به دست می آیند.

$$\begin{cases} R_{\Omega} = D(\varphi) \\ R_{\Gamma} = I(\varphi) - \varphi \end{cases} \quad (31)$$

معادله $\partial U/\partial x=2\pi\cos(2\pi x)$ نیز با استفاده از دو تابع تخمین MLS و MMLS حل شده و نتایج در شکل ۴ با هم مقایسه شده‌اند. همانطور که از نتایج به دست آمده مشخص است، هرچند روش MLS از قابلیت بالایی در تخمین برخوردار است ولی با کاهش فاصله بین گرهی با مشکلات جدی مواجه می‌شود. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که این مشکلات با استفاده از تابع تخمین پیشنهادی MMLS برطرف شده است.



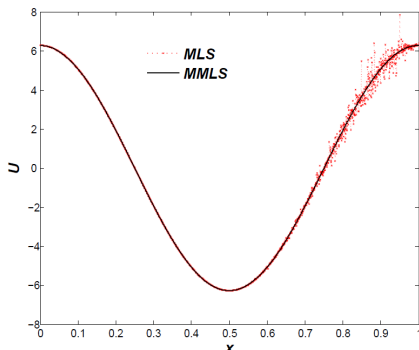
MLS



MMLS

شکل ۳. مقایسه گرادیان تخمین زده شده (MMLS) با جواب دقیق برای $dx=0/0001$

Fig. 3. Comparing the approximated gradient and analytical one for $dx=0.0001$



شکل ۴. مقایسه گرادیان تخمین زده شده (MMLS) با جواب دقیق برای $dx=0/0005$

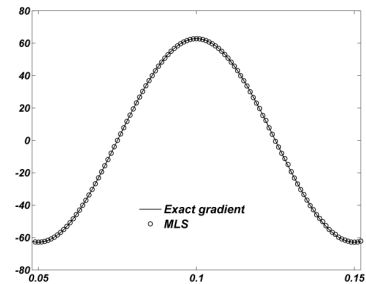
Fig. 4. Comparing the approximated gradient and analytical one for $dx=0.0005$

شده است. در شکل‌های ۲ و ۳ مشتقات به دست آمده از دو تابع تخمین، به ازای فاصله‌ی گرهی (dx) متفاوت و در یک دوره تناوب از تابع $(L/2)$ ، با هم مقایسه شده‌اند.

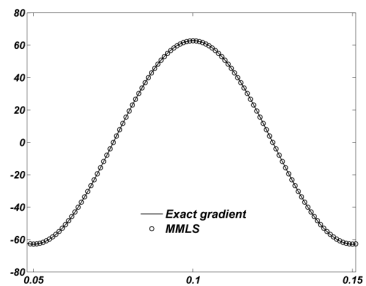
جدول ۲. مقایسه عدد حالت ماتریس F برای فاصله‌های گرهی متفاوت (آرایش دو بعدی یکنواخت)

Table 2. The condition number of F matrix calculated in different nodal spaces (uniform nodal distribution in two dimensional problem)

فاصله گره‌ها	عدد حالت ماتریس F
10^{-1}	$8/7687 \times 10^7$
10^{-2}	$7/940.1 \times 10^{11}$
10^{-3}	$7/2680 \times 10^{17}$
10^{-4}	$7/2614 \times 10^{23}$



MLS



MMLS

شکل ۲. مقایسه گرادیان تخمین زده شده با جواب دقیق برای $dx=0/001$

Fig. 2. Comparing the approximated gradient and analytical one for $dx=0.001$

۷-۲- معادله برگرز غیر ویسکوز با شرط مرزی دریچله

در این مثال معادله برگرز با شرایط مرزی که در رابطه (۳۵) معرفی شده است، در یک ناحیه به طول واحد و به ازای ویسکوزیته برابر صفر (غیر ویسکوز) حل شده است.

$$\begin{cases} U(0,t) = 1 \\ U(1,t) = -1 \end{cases} \quad (35)$$

برای حل این مثال از شرط آغازینی که در رابطه (۳۶) ارائه شده است، استفاده شده است.

$$U(x, 0) = 1 - 2x \quad (36)$$

جواب تحلیلی این مثال ارائه شده است [۳۷]. در اشکال ۶ و ۷ نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی، به ترتیب برای یک گسسته‌سازی با ۵۰ و ۱۰۰ گره در زمان‌های مختلف، نشان داده شده‌اند. در این مثال زمان بحرانی، که در آن جواب‌ها در $x=0.5$ یک شوک کامل را تشکیل می‌دهند برابر است با $t_{critical} = 0.5$ [۳۷]. از این جهت جواب‌ها تا آستانه زمان بحرانی ارائه شده‌اند. ارزیابی جواب‌های ارائه شده، کارایی و دقت بالای روش پیشنهادی بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط با تابع تخمین MMLS را برای حل معادلات دیفرانسیلی برگرز نشان می‌دهد.

۷-۳- معادله برگرز ویسکوز با شرط مرزی متناوب

در این مثال معادله برگرز با شرایط مرزی متناوب حل شده است. تابع تخمین پیشنهادی MMLS برای تولید توابع تخمین استفاده شده است. برای این منظور تابع پایه مرتبه اول به کار گرفته شده است. در ابتدا برای صحت‌سنجی نتایج روش پیشنهادی جهت حل معادله برگرز، از یک مثال عددی که جواب تحلیلی آن در دسترس است، استفاده شده است [۳۸ و ۳۹]. در این حالت، ویسکوزیته برابر یک اختیار شده است. شکل ۸-الف، نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی را با نتایج دقیق مقایسه کرده است. همین مثال دوباره با ویسکوزیته‌ای برابر ۰/۱ حل شده است. شکل ۸-ب نتایج واگرا شده را که با استفاده از ۵۰ گره به دست آمده‌اند، نشان داده است. این رفتار با توجه به کاهش ویسکوزیته که به افزایش عدد پکلت و در نتیجه افزایش آشوب^۳ منجر می‌شود، قابل توجیه است. برای برطرف کردن این مشکل تعداد گره‌ها افزایش داده شده است. شکل ۸-ج جواب‌های همگرا را که با استفاده از ۱۰۰ گره به دست آمده‌اند برای ویسکوزیته ۰/۱، نشان می‌دهد.

۷-۴- ارزیابی کارایی روش حداقل مربعات گسسته مختلط با تابع تخمین حداقل مربعات متحرک نگاشتی جهت حل معادله برگرز

در این بخش از روش حداقل مربعات گسسته مختلط با تابع تخمین حداقل مربعات متحرک نگاشتی (MMLS) برای حل چند معادله انتشاری با ضرایب و شرایط مرزی مختلف استفاده شده است. برای حل مثال‌های عددی از اندازه گام زمانی برابر با 0.01 (s) استفاده شده است. اندازه شعاع ناحیه تأثیر، در ناحیه اصلی، با توجه به رابطه (۱) تعیین شده است، همانطور که قبلاً اشاره شد، در این رابطه $\beta=2$ اختیار شده است. اندازه ناحیه تأثیر، در ناحیه نگاشت شده استاندارد، $r^*=5$ انتخاب شده است.

۷-۴-۱- معادله خطی انتقال-پخش^۱ با شرط مرزی متناوب

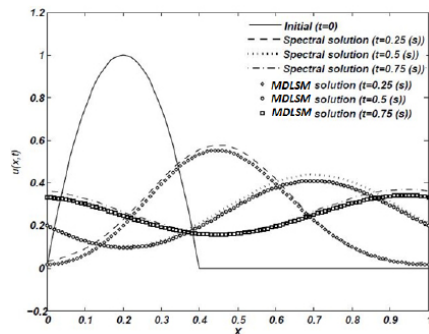
در این مثال معادله خطی انتقال-پخش با شرایط مرزی متناوب با استفاده از روش حداقل مربعات گسسته مختلط و با تابع تخمین حداقل مربعات متحرک نگاشتی حل شده است. معادله حاکم عبارت است از:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0.05 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (33)$$

شرط اولیه عبارت است از:

$$U = \begin{cases} 1 - 25(x - 0.2)^2 & 0 \leq x \leq 0.4 \\ 0 & elsewhere \end{cases} \quad (34)$$

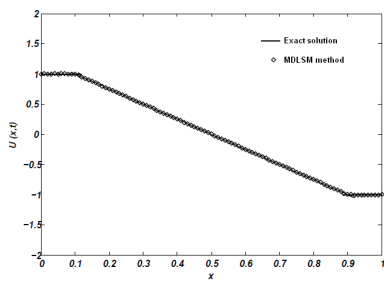
شکل ۵ نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی را با نتایج روش عددی طیفی^۲ مقایسه کرده است.



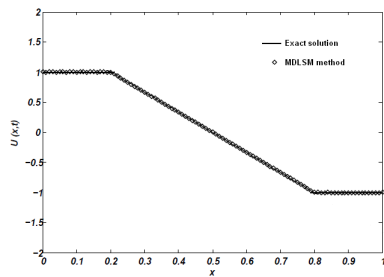
شکل ۵: مقایسه نتایج روش پیشنهادی با نتایج روش طیفی برای مثال اول

Fig. 5. Comparing the results of suggested method with spectral method for the first numerical example

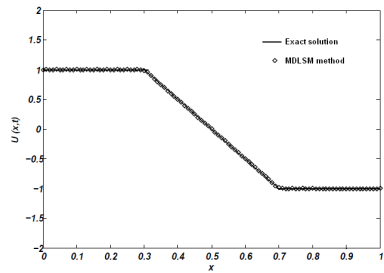
نتایج به دست آمده قابلیت و دقت مناسب روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.



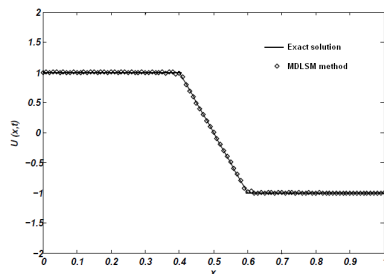
t=0.1 (s)



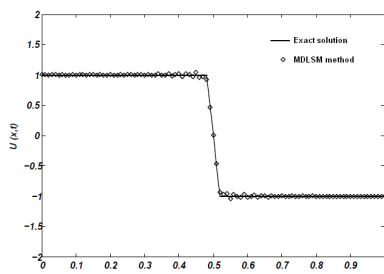
t=0.2 (s)



t=0.3 (s)



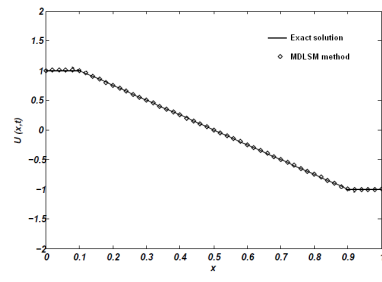
t=0.4 (s)



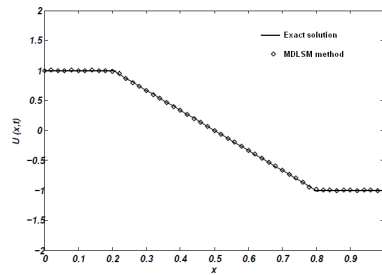
t=0.48 (s)

شکل ۷. نتایج مثال دوم با استفاده از ۱۰۰ گره

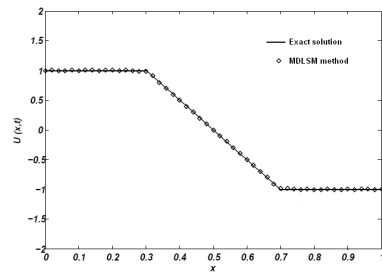
Fig.7. the results of suggested method for the second numerical example using 100 nodes



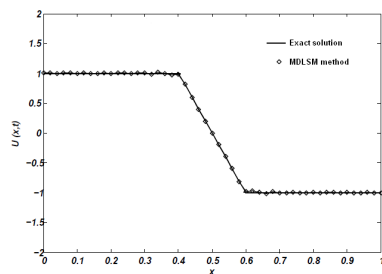
t=0.1 (s)



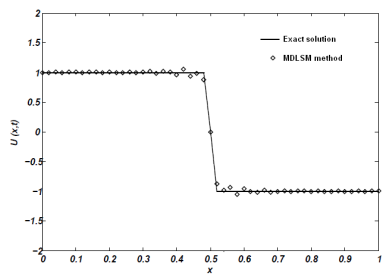
t=0.2 (s)



t=0.3 (s)



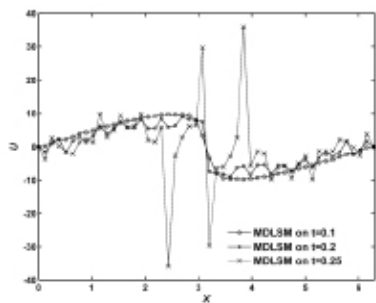
t=0.4 (s)



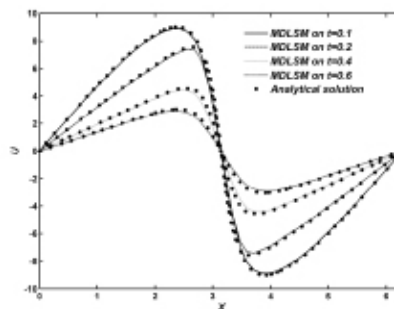
t=0.48 (s)

شکل ۶. نتایج مثال دوم با استفاده از ۵۰ گره

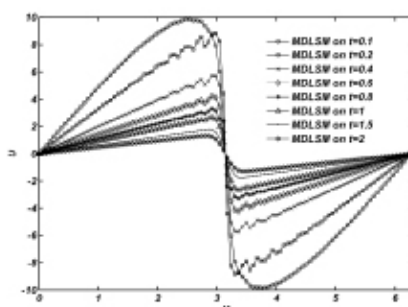
Fig.6. the results of suggested method for the second numerical example using 50 nodes



(ب) گسسته‌سازی ۵۰ گرهی برای $v=0.1$
b) 50 nodes and $v=0.1$



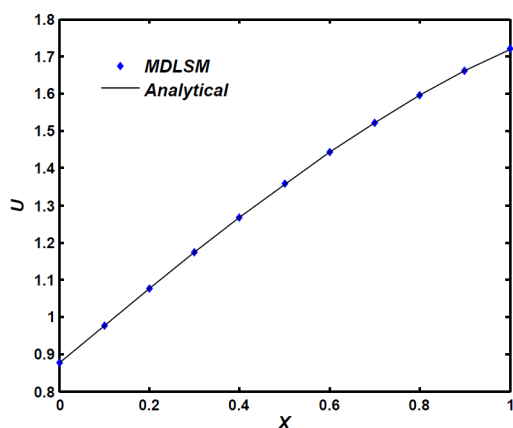
(الف) گسسته‌سازی ۵۰ گرهی برای $v=1$
a) 50 nodes and $v=1$



c) 100 nodes and $v=0.1$

شکل ۸. نتایج روش پیشنهادی برای مثال سوم

Fig.8. the results of suggested method for the third numerical example



شکل ۹. مقایسه جواب تحلیلی با MDLSM در $y=0.5$

Fig.9. comparing the results of MDLSM method and analytical one at $y=0.5$

۷-۴ حل معادله پواسون دوبعدی

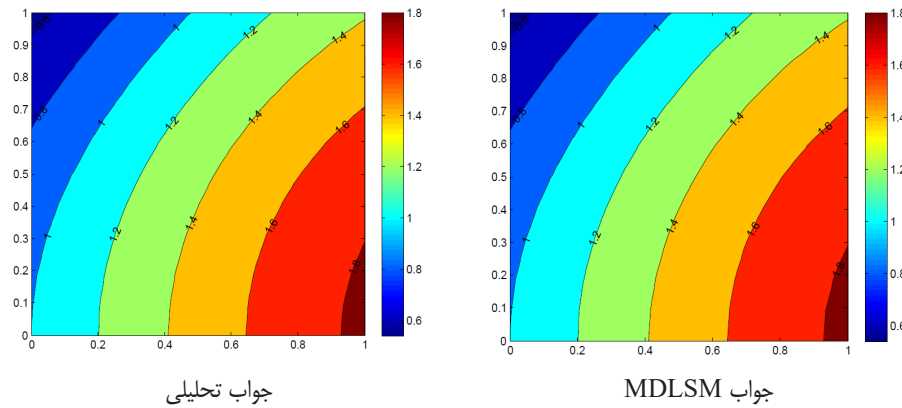
در این بخش معادله پواسونی مطابق رابطه زیر در یک ناحیه مربع واحد حل شده است. از شرایط مرزی دریاچه در مرز پایین و چپ و نیز از شرایط مرزی نیومن در مرز بالا و راست استفاده شده است.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\sin(x) - \cos(y) \quad (37)$$

جواب دقیق مساله عبارت است از:

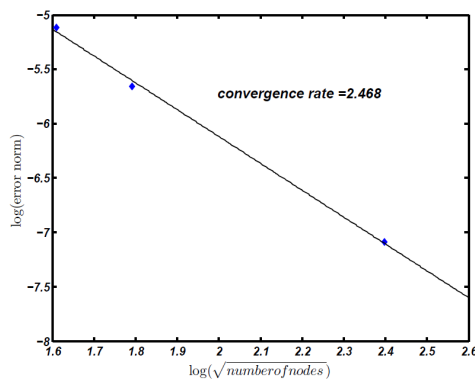
$$U = \sin(x) + \cos(y) \quad (38)$$

در اشکال ۹ و ۱۰ جواب دقیق و جواب به دست آمده از روش MDLSM با استفاده از آرایش گرهی یکنواخت 11×11 مقایسه شده‌اند. همچنین نمودار نرخ همگرایی با استفاده از معیار خطایی به صورت $\|U^{\text{exact}} - U^{\text{numerical}}\| / \|U^{\text{exact}}\|$ محاسبه و در شکل ۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۱۰. مقایسه کانتورهای جواب تحلیلی با MDLSM

Fig.10. comparing the contours calculated by the MDLSM method and analytical one



شکل ۱۱. نمودار نرخ همگرایی روش MDLSM برای معادله پواسون دوبعدی

Fig.11. the convergence rate of MDLSM method for solving the Poisson's equation

قرار گرفت. نتایج به دست آمده قابلیت روش پیشنهادی MMLS را جهت رفع مشکل نشان داده‌اند.

همچنین با حل چند مثال عددی، کارایی روش حداقل مربعات گسسته مختلط با تابع تخمین پیشنهادی MMLS مورد ارزیابی قرار گرفت. با مقایسه جواب‌های به دست آمده از روش پیشنهادی و جواب‌های تحلیلی، صحت نتایج روش پیشنهادی تأیید شد. نتایج به دست آمده کارایی و دقت بالای روش پیشنهادی را در حل معادله دیفرانسیلی برگرز نشان داد.

مراجع

[1] R.A. Gingold, J.J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, Monthly notices of the royal astronomical society, 181(3) (1977) 375-389.

۸- نتیجه گیری

روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته مختلط که از فرمول بندی مختلط برای گسسته کردن معادلات دیفرانسیلی حاکم استفاده می‌کند کارایی بالای خود را در حل معادلات دیفرانسیلی نشان داده است. در این روش معمولاً از تابع تخمین حداقل مربعات متحرک (MLS) برای تولید توابع تخمین استفاده می‌شود. تابع تخمین MLS با وجود برخورداری از کارایی مناسب، در صورت تجمع و نزدیکی بیش از اندازه گره‌ها، با مشکلاتی جدی مواجه می‌شود. در این مطالعه این مشکل با استفاده از تابع تخمین حداقل مربعات متحرک نگاهی (MMLS) برطرف شد. در این روش خوشه‌های گرهی مجتمع به یک آرایش گرهی استاندارد نگاشت می‌یابند و سپس توابع تخمین و مشتقات آن‌ها با در نظر گرفتن ملاحظاتی محاسبه می‌شوند. کارایی روش تخمین پیشنهادی MMLS برای برطرف کردن مشکل تابع تخمین MLS با استفاده از تخمین تابع ریاضیاتی مورد ارزیابی

- [15] H. Arzani, M. Afshar, Solving Poisson's equations by the discrete least square meshless method, *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 42 (2006) 23-31.
- [16] M. Afshar, M. Naisipour, J. Amani, Node moving adaptive refinement strategy for planar elasticity problems using discrete least squares meshless method, *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(12) (2011) 1315-1325.
- [17] G. Shobeyri, M. Afshar, Simulating free surface problems using discrete least squares meshless method, *Computers & Fluids*, 39(3) (2010) 461-470.
- [18] A.R. Firoozjaee, M.H. Afshar, Discrete least squares meshless method with sampling points for the solution of elliptic partial differential equations, *Engineering analysis with boundary elements*, 33(1) (2009) 83-92.
- [19] M. Naisipour, M.H. Afshar, B. Hassani, A.R. Firoozjaee, Collocation discrete least square (CDLS) method for elasticity problems, *International Journal of Civil Engineering*, v7, (2009) 9-18.
- [20] M. Afshar, M. Lashckarbolok, G. Shobeyri, Collocated discrete least squares meshless (CDLSM) method for the solution of transient and steady-state hyperbolic problems, *International journal for numerical methods in fluids*, 60(10) (2009) 1055-1078.
- [21] S. Faraji, M. Afshar, Node enrichment-moving error estimate and adaptive refinement in Mixed Discrete Least Squares Meshless method for solution of elasticity problems, *Modares Mechanical Engineering*, 14(3) (2014) 194-202. (In persian).
- [22] S.N. Kazeroni, M. Afshar, An adaptive node regeneration technique for the efficient solution of elasticity problems using MDLSM method, *Engineering analysis with boundary elements*, 50 (2015) 198-211.
- [23] S. Faraji, M.H. Afshar, J. Amani, Mixed discrete least square meshless method for solution of quadratic partial differential equations, *Scientia Iranica*, 21(3) (2014) 492-504.
- [24] S. Faraji, M. Kolahdoozan, M.H. Afshar, Collocated Mixed Discrete Least Squares Meshless (CMDLSM) method for solving quadratic partial differential equations, *Scientia Iranica*, 25(4) (2018) 2000-2011.
- [25] S. Faraji, M. Kolahdoozan, M.H. Afshar, Mixed discrete least squares meshless method for solving the linear and non-linear propagation problems, *Scientia Iranica*, 25(2) (2018) 565-578.
- [2] E. Daly, S. Grimaldi, H.H. Bui, Explicit incompressible SPH algorithm for free-surface flow modelling: A comparison with weakly compressible schemes, *Advances in water resources*, 97 (2016) 156-167.
- [3] M. Fleming, Y. Chu, B. Moran, T. Belytschko, Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *International journal for numerical methods in engineering*, 40(8) (1997) 1483-1504.
- [4] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *International journal for numerical methods in engineering*, 37(2) (1994) 229-256.
- [5] S.N. Atluri, T. Zhu, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational Mechanics*, 22(2) (1998) 117-127.
- [6] C.A. Duarte, J.T. Oden, An hp adaptive method using clouds, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4) (1996) 237-262.
- [7] E. Onate, S. Idelsohn, O. Zienkiewicz, R. Taylor, C. Sacco, A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4) (1996) 315-346.
- [8] W.K. Liu, S. Jun, Y.F. Zhang, Reproducing kernel particle methods, *International journal for numerical methods in fluids*, 20(8-9) (1995) 1081-1106.
- [9] K. Kiani, A nonlocal meshless solution for flexural vibrations of double-walled carbon nanotubes, *Applied Mathematics and Computation*, 234 (2014) 557-578.
- [10] K. Kiani, A meshless approach for free transverse vibration of embedded single-walled nanotubes with arbitrary boundary conditions accounting for nonlocal effect, *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(10) (2010) 1343-1356.
- [11] T. Zhu, J.-D. Zhang, S. Atluri, A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach, *Computational Mechanics*, 21(3) (1998) 223-235.
- [12] G.-R. Liu, *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*, CRC press, 2009.
- [13] S. Koshizuka, Y. Oka, Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nuclear science and engineering*, 123(3) (1996) 421-434.
- [14] B. Ataie-Ashtiani, L. Farhadi, A stable moving-particle semi-implicit method for free surface flows, *Fluid dynamics research*, 38(4) (2006) 241.

- [32] L. Gu, Moving kriging interpolation and elementfree Galerkin method, *International journal for numerical methods in engineering*, 56(1) (2003) 1-11.
- [33] P. Lancaster, K. Salkauskas, Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of computation*, 37(155) (1981) 141-158.
- [34] S. Atluri, J. Cho, H.-G. Kim, Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov–Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations, *Computational Mechanics*, 24(5) (1999) 334-347.
- [35] K. Kiani, A. Nikkhoo, B. Mehri, Assessing dynamic response of multispan viscoelastic thin beams under a moving mass via generalized moving least square method, *Acta Mechanica Sinica*, 26(5) (2010) 721-733.
- [36] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical mathematics*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [37] P. Oliver, *Nonlinear Partial Differential Equations*, chapter 22, (http://www.math.umn.edu/~olver/am/_npd.pdf).
- [38] P. Moin, *Fundamentals of engineering numerical analysis*, Cambridge University Press, 2010.
- [39] E.R. Benton, G.W. Platzman, A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation, *Quarterly of Applied Mathematics*, 30(2) (1972) 195-212.
- [26] S.F. Gargari, M. Kolahdoozan, M. Afshar, Mixed Discrete Least Squares Meshfree method for solving the incompressible Navier–Stokes equations, *Engineering analysis with boundary elements*, 88 (2018) 64-79.
- [27] S.F. Gargari, M. Kolahdoozan, M. Afshar, S. Dabiri, An Eulerian-Lagrangian Mixed Discrete Least Squares Meshfree method for incompressible multiphase flow problems, *Applied Mathematical Modelling*, (2019).
- [28] G.-R. Liu, Y.-T. Gu, *An introduction to meshfree methods and their programming*, Springer Science & Business Media, 2005.
- [29] N. Sukumar, Construction of polygonal interpolants: a maximum entropy approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(12) (2004) 2159-2181.
- [30] M. Arroyo, M. Ortiz, Local maximum-entropy approximation schemes: a seamless bridge between finite elements and meshfree methods, *International journal for numerical methods in engineering*, 65(13) (2006) 2167-2202.
- [31] N. Sukumar, Z. Huang, J.H. Prévost, Z. Suo, Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks, *International journal for numerical methods in engineering*, 59(8) (2004) 1075-1102.

Please cite this article using:

M. Kolahdoozan, E. Amani, S. Faraji Gargari, Mapped Moving Least Squares Approximation Used in Mixed Discrete Least Squares Meshfree Method, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 51(4) (2019) 805-816.

DOI: 10.22060/ceej.2018.13861.5505

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

