استفاده از مدل برنامه‌ریزی آرمانی غیر خطی برای بهینه‌سازی مسائل دارای چند سطح پاسخ

دکتر علیرضا رشیدی کمیجانی

عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه

چکیده

هر فرآیند دارای یک یا چند ورودی و خروجی است. در طراحی آزمایش‌های (DOE) عبارت است از اعمال تغییر آگاهانه در متغیرهای ورودی یک فرآیند و سنجش و ارزیابی تغییرات حاصل در متغیر خروجی (پاسخ). یکی از مهم‌ترین مسائلی که در حوزه طراحی آزمایش‌های مطرح است تعیین متغیرهای ورودی به منظور بهینه سازی متغیر پاسخ می‌باشد. این مقاله از روش برنامه‌ریزی آرمانی غیرخطی برای بهینه سازی مسائلی که دارای بیش از یک پاسخ هستند، استفاده می‌کند.

واژه‌های کلیدی: طراحی آزمایش‌های، برنامه‌ریزی آرمانی، مسائل دارای چند سطح پاسخ

مقدمه

در نگاه اول، هدف از طراحی آزمایش‌های پاسخ به سه پرسش زیر است:

۱) کدامیک از متغیرهای ورودی بیشترین اثر را بر متغیر پاسخ دارند؛

۲) متغیرهای ورودی که بیشترین اثر را بر متغیر پاسخ دارند، در چه مقداری باید قرار گیرند تا متغیر پاسخ حتی الامکان به مقدار اسمی خود نزدیک شود،

۳) متغیرهای ورودی که بیشترین اثر را بر متغیر پاسخ دارند، در چه مقداری باید قرار گیرند تا متغیر پاسخ در دامنه کوچک و غیر حساسی تغییر نماید.

در نگاهی دقیق‌تر، می‌توان از طراحی آزمایش‌ها این انتظار را داشت که مقادیر ورودی را بگونه‌ای تعیین کند که متغیر پاسخ بهینه گردد. این بحث و روش‌های مربوط به آن تحت نام متدولوژی سطح پاسخ[1] (RSM) مطرح هستند. حتی می‌توان حالتی را در نظر گرفت که شامل چند متغیر پاسخ (به‌جای تنها یک متغیر) باشد. به طور طبیعی هر یک از این متغیرهای پاسخ می‌توانند همانند یک تابع هدف تلقی شوند که بهینه سازی آن مد نظر است. لذا مسئله‌ای که با آن سروکار داریم با یک مسئله چند تابع هدفه[2] (MODM) مشابه سازی می‌شود، که یافتن یک جواب موثر برای آن مورد نظر است.

در این مقاله، ابتدا مروری بر ادبیات بحث انجام خواهد شد و سه دسته از روش‌های مطرح در این زمینه مورد نقد و بررسی قرار خواهند گرفت. سپس روش برنامه‌ریزی آرمانی غیر خطی برای حل مسئله‌ای که توسط

[1] Response Surface Methodology
[2] Multi-Objective Decision Making

Montgomery در فصل یازدهم مرجع [۱] عنوان گردیده و به روش توابع مطلوبیت حل شده، به کار گرفته می‌شود. در انتها، نتایج مدل برنامه‌ریزی آرمانی غیرخطی بـا نتـایج حاصل از روش توابع مطلوبیت مقایسه خواهد شد.

ادبیات تحقیق

به طور کلی، روش‌های حل مسائل دارای چند سطح پاسخ را می‌توان در سه سطح کلان طبقه بندی کرد. شایان ذکر است که هر دسته می‌تواند شامل روش‌های مختلفی باشـد که بنا به تشابهی که در منطق کار دارند در یک دسته قرار گرفته اند.

روش‌های مبتنی بر اولویت: همان‌طـور کـه ذکـر شـد، مسائل بهینه سازی چند پاسخ عبارت است از بهینه سازی n تابع هدف (پاسخ) در فضای جواب متغیرهای تاثیرگـذار. فرم ریاضی مسئله به صورت زیر است:

$$\text{Optimize } Y=\{y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)\} \quad (1)$$
$$\text{S.t.: } x \in S$$

یکی از روش‌هایی که می‌تواند برای حـل ایـن مـسائل مورد استفاده قرار گیرد، روش لکسیکوگراف اسـت [3]. در این روش ابتدا اهـداف بـر اسـاس اهمیـت اولویـت بنـدی می‌شوند؛ سپس تابع هدف که شامل مهم‌ترین هدف است تـشکیل شـده و در فـضای جـواب مـسئله اصـلی بهینـه می‌گردد. اگر فرض شود مهم‌ترین هدف $y_1(x)$ باشد، یـک مدل ریاضی به صورت زیر تشکیل و حل می‌گردد:

$$\text{Optimize } y_1(x) \quad (2)$$
$$\text{S.t.: } x \in S$$

اگر جواب مدل فوق یگانه باشد، همان جواب به عنوان یک جواب موثر برای مدل (۱) مورد استفاده قرار می‌گیرد. در غیر این صورت، مدل جدیدی تعریف می‌شود کـه تـابع هدف آن متشکل از هدفی است که در اولویت بعـدی قـرار دارد و محدودیت‌های آن شامل محدودیت‌هـای مـدل (۱) به انضمام محـدودیتی بـرای نگهداشـتن هـدف $y_1(x)$ در مقدار بهینه خود می‌باشد. اگر فرض کنـیم هـدفی کـه در اولویت دوم قرار دارد $y_2(x)$ باشد مدل ریاضی بـه صـورت زیر خواهد بود:

$$\text{Optimize } y_2(x) \quad (3)$$
$$\text{S.t.: } x \in S$$
$$y_1(x) = y_1^*$$

روال فوق ادامه می‌یابد تا جـواب بهینـه یگانـه حاصـل شود یا تمام اهداف بهینه شوند. روش دیگری کـه در ایـن خانواده قرار می‌گیرد عبارت است از نوشتن تابع هـدف بـر اسـاس مهـم‌تـرین هـدف و قـرار دادن سـایر اهـداف در محدودیتها. به عبارت دیگر، مهم‌تـرین هـدف بـه گونـه‌ای بهینه می‌شود که سایر اهداف به حداقل میـزان تـشخیص داده شده توسط تصمیم گیرنده برسند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، این روش‌ها هر چند به جواب موثر منجر می‌شوند؛ اما هیچ تضمینی وجـود نـدارد که جواب ارائه شده، از نظـر تـصمیم گیرنـده یـک جـواب رضایت بخش باشد چرا که صرفا بهینگی یک هـدف مـورد توجه قرار می‌گیرد.

روش دیگری که در این خانواده مطرح می‌شود عبارت است از تعیین وزن هر هدف و تبـدیل توابـع چندگانـه بـه یک تابع هدف با استفاده از ترکیب خطی جمع پـذیر [3]. بـه طـور مثـال اگـر بـردار اوزان اهـداف بـه صـورت $W=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ باشد مدل چند تابع هدفـه بـه فـرم زیر تبدیل خواهد شد:

$$\text{Optimize} \sum_{i=1}^{n} w_i y_i(x) \quad (4)$$
$$\text{S.t.: } x \in S$$

مشکل بزرگ این روش در آن است که هیچ تـضمینی بر برقرار بودن پیش شرط‌های لازم برای استفاده از ترکیب خطی جمع پذیر وجود ندارد.

روش تابع مطلوبیت: در این روش، مطلوبیت هر هدف مشخص شده و سپس با استفاده از روشی نظیر میـانگین هندسی مطلوبیت کل محاسبه می‌شود. اگر مطلوبیت تـابع $y_i(x)$ به صورت یکنواخت افزایشی باشد میـزان مطلوبیـت مطابق زیر محاسبه می‌شود[3]:

$$d_i=\begin{cases} 0 & \hat{y}_i(x)\le Y_i^{\min} \\ \left[\dfrac{\hat{y}_i(x)-Y_i^{\min}}{Y_i^{\max}-Y_i^{\min}}\right]^t & Y_i^{\min}\le \hat{y}_i(x)\le Y_i^{\max} \\ 1 & \hat{y}_i(x)\ge Y_i^{\max} \end{cases} \quad (5)$$

که در آن $\hat{y}_i(x)$ تخمینی از $y_i(x)$ ، Y_i^{min} حداقل مقدار قابل قبول $y_i(x)$ از نظر تصمیم گیرنده، Y_i^{max} مقداری از $y_i(x)$ که حداکثر مطلوبیت را برای تصمیم گیرنده دارد و از آن به بعد مطلوبیت افزایش نمی‌یابد و t نیز پارامتر تعیین کننده شکل تابع مطلوبیت می‌باشد.

استفاده از توابع مطلوبیت هر چند روش کارآمدی محسوب می‌شود، ولی مشکلات خاص خود را داراست. یکی از مشکلات این روش، دشوار بودن رسم منحنی‌های بی تفاوتی و تعیین مطلوبیت است. تعیین مطلوبیت نسبت به قضاوت‌های تصمیم گیرنده بسیار حساس است. از سوی دیگر، تکنیک فوق زمانی کاربرد دارد که مطلوبیت مربوط به متغیرهای وابسته به‌طور یکنواخت کاهشی یا افزایشی باشد یا به بیان دیگر، هر چه میزان متغیر پاسخ بیشتر (یا کمتر) باشد مطلوب‌تر باشد. اما همواره این احتمال وجود دارد که تابع مطلوبیت از توان دوم باشد. در این صورت مناسب‌ترین ارزش یک پاسخ ممکن است در وسط دامنه تغییرات آن قرار گیرد.

روش تابع هزینه: این دسته از روشها بر اساس کمینه کردن تفاوت اهداف از میزان بهینه خود عمل می‌کنند؛ بدین صورت که برای فاصله گرفتن هر هدف از میزان بهینه خود جریمه یا هزینه‌ای در نظر گرفته می‌شود و سعی می‌گردد این تابع هزینه کمینه شود. در ابتدا تابع هزینه به صورت زیر تعریف گردید[3]:

$$L(y(x)) = (y(x) - \theta)'C(y(x) - \theta) \quad (6)$$

که در آن، θ بردار مقادیر بهینه اهداف و C ماتریس هزینه است که مبین اهمیت نسبی اهداف می‌باشد.

روش برنامه‌ریزی آرمانی غیرخطی

در طراحی آزمایش‌های و مسائل RSM وقتی می‌خواهیم به جواب بهینه برسیم از یک نقطه اولیه کار خود را آغاز می‌کنیم و یک مدل درجه اول[1] به صورت زیر تشکیل می‌دهیم[1] :

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^{k} \hat{\beta}_i x_i$$

سپس به ارزیابی کفایت مدل فوق می‌پردازیم. می‌توان سه مورد زیر را به کمک طراحی آزمایش‌های انجام داد:

۱) تخمینی از خطا به دست آورد؛
۲) اثر متقابل را بررسی کرد؛
۳) وجود انحنا را بررسی کرد.

معمولا هنگامی که مقادیر فعلی متغیرهای تاثیرگذار در خروجی به گونه‌ای باشند که متغیر پاسخ از مقدار بهینه فوق دور شود، مدل درجه اول مناسب به نظر می‌رسد؛ چرا که در این حالت انتظار نداریم انحنای چندانی وجود داشته باشد. در این حالت و با فرض بیشینه کردن تابع هدف به روش steepest ascend به سمت جواب بهینه حرکت می‌کنیم (در صورتی که هدف کمینه کردن باشد از روش steepest descend استفاده می‌شود). وقتی که به جواب بهینه نزدیک شدیم یک مدل دقیق‌تر نظیر مدل درجه دوم[2] به شکل کلی زیر می‌تواند به کار گرفته شود [1]:

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^{k} \hat{\beta}_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \hat{\beta}_{ii} x_i^2 + \sum\sum \hat{\beta}_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

لذا بیشترین انتظار ما آن است که توابع هدف یا همان متغیرهای پاسخ توابعی از درجه دوم باشند. به همین دلیل بهتر است برای حل این مسائل از روش‌هایی که قادر به حل مسائل غیرخطی هستند استفاده شود. از سوی دیگر، در مسائل چند هدفه به دلیل وجود تعارض بین اهداف، دست یافتن به جواب بهینه (جوابی که به طور هم‌زمان کلیه اهداف را بهینه نماید) تقریبا غیرممکن است و لذا باید در جستجوی جواب موثر[3] باشیم. به همین دلیل تصمیم گیرنده به جای بهینه کردن اهداف به دنبال راه حلی خواهد بود که برای هر هدف یک سطح خاصی را تامین نماید. این شرایط دقیقا با زمینه کاربرد برنامه‌ریزی آرمانی غیر خطی سازگار است. علاوه بر این مدل، برنامه‌ریزی آرمانی غیر خطی از منطق ریاضی محکمی برخوردار است و قضاوت‌های سلیقه‌ای تصمیم گیرنده در آن به حداقل می‌رسد بطوری که تصمیم گیرنده تنها اولویت اهداف یا مقاصدی را که باید تامین شوند مشخص می‌کند. در بخش بعدی مثال ارائه شده در فصل یازدهم مرجع [1] را که بروش توابع مطلوبیت حل شده، مطرح و به کمک مدل برنامه‌ریزی آرمانی غیر خطی حل و سپس به مقایسه نتایج می‌پردازیم.

1. First order

2. Second order
3. Efficient solution

مثال عددی

یک مهندس شیمی، اثر زمان (x_1) و درجه حرارت (x_2) یک واکنش شیمیایی را بر سه پاسخ بازده (y_1)، ویسکوزیته (y_2) و وزن مولکولی (y_3) بررسی می‌نماید. آزمایش‌های مربوطه انجام و نتایج حاصل در جدول ۱ ارائه شده است:

(جدول شمارهٔ ۱): نتایج آزمایشات انجام شده

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
80	170	76.5	۶۲	۲۹۴۰
80	180	77	۶۰	۳۴۷۰
90	170	78	۶۶	۳۶۸۰
90	180	79.5	۵۹	۳۸۹۰
85	175	79.9	۷۲	۳۴۸۰
85	175	80.3	۶۹	۳۲۰۰
85	175	80	۶۸	۳۴۱۰
85	175	79.7	۷۰	۳۲۹۰
85	175	79.8	۷۱	۳۵۰۰
92.07	175	78.4	۶۸	۳۳۶۰
77.93	175	75.6	۷۱	۳۰۲۰
85	182.07	78.5	۵۸	۳۶۳۰
85	167.93	77	۵۷	۳۱۵۰

پس از برازش یک مدل مناسب برای سه متغیر پاسخ، توابع مربوطه به شکل زیر خواهند بود:

$$y_1(x)= -1430.52285 + 7.80749x_1 + 13.27053x_2 - 0.05505x_1^2 - 0.04005x_2^2 + 0.01x_1x_2$$

$$y_2(x)= -9030.74 + 13.393x_1 + 97.708x_2 - 0.0275x_1^2 - 0.26757x_2^2 - 0.05x_1x_2$$

$$y_3(x)= -6308.8 + 41.025x_1 + 35.473x_2$$

فرض کنید تصمیم گیرنده مایل است هدف اول بیش از 78.5، هدف دوم بین ۶۲ و ۶۸ و هدف سوم نیز کمتر از ۳۴۰۰ باشد. به عبارت دیگر تصمیم گیرنده خواهان تامین مقاصد زیر است:

$$y_1(x) \geq 78.5$$

$$62 \leq y_2(x) \leq 68$$

$$y_3(x) \leq 3400$$

همچنین تصمیم گیرنده اولویت بالاتر را به تامین هدف اول می‌دهد و پس از آن به ترتیب اهداف دوم و سوم برای وی مهم هستند. لذا مدل کلی برنامه‌ریزی آرمانی غیرخطی را به شکل زیر تشکیل داده و به روش انتقالات متوالی حل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Min \quad \{w_1(d_1+d_2), w_2d_3, w_3(d'_4+d_5), w_4d'_6\}\\
&st:\\
&\left.\begin{aligned} &x_1+d_1-d'_1=0\\ &x_2+d_2-d'_2=0 \end{aligned}\right\} \to w_1\\
&y_1(x)+d_3-d'_3=78.5 \qquad \to w_2\\
&\left.\begin{aligned} &y_2(x)+d_4-d'_4=68\\ &y_2(x)+d_5-d'_5=62 \end{aligned}\right\} \to w_3\\
&y_3(x)+d_6-d'_6=3400 \qquad \to w_4\\
&d_id'_i=0 \qquad \forall_i\\
&x,d,d' \geq 0
\end{aligned}$$

در مدل فوق w_i مقدار عددی مشخصی نیست، بلکه ترتیب تشکیل مسائل فرعی را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است، بالاترین اولویت به تامین محدودیت‌های اصلی مسئله داده می‌شود تا تهی نبودن فضای جواب مسئله تضمین شود. اولویت‌های بعدی به‌ترتیب به اهداف اول، دوم و سوم داده می‌شود. بر این اساس، مسئله فرعی اول را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
&Min \quad h_1 = d_1 + d_2\\
&st: \quad x_1+d_1-d'_1=0\\
&\qquad x_2+d_2-d'_2=0\\
&\qquad d_id'_i=0 \qquad i=1,2\\
&\qquad d_id'_i \geq 0
\end{aligned}$$

جواب بهینه مسئله فوق عبارتست از $h_1^* = 0$ و بنابراین فضای جواب تهی نخواهد بود. حال به تامین هدف اول یعنی $y_1(x)$ می‌پردازیم. برای این منظور مسئله فرعی دوم بصورت زیر تشکیل می‌یابد:

$$
\begin{array}{lll}
Min & h_2 = d_3 & \\
st: & x_1 + d_1 - d_1' = 0 & \\
 & x_2 + d_2 - d_2' = 0 & \\
 & y_1(x) + d_3 - d_3' = 78.5 & \\
 & d_1 + d_2 \le h_1^* & \\
 & d_i d_i' = 0 & i = 1,2,3 \\
 & d_i d_i' \ge 0 &
\end{array}
$$

جواب بهینه مدل فوق نیز $h_2^* = 0$ است که نشان از تامین هدف اول دارد. برای تامین هدف دوم مسئله فرعی سوم را تشکیل می‌دهیم:

$$
\begin{array}{lll}
Min & h_3 = d_4' + d_5 & \\
st: & x_1 + d_1 - d_1' = 0 & \\
 & x_2 + d_2 - d_2' = 0 & \\
 & y_1(x) + d_3 - d_3' = 78.5 & \\
 & y_2(x) + d_4 - d_4' = 68 & \\
 & y_2(x) + d_5 - d_5' = 62 & \\
 & d_1 + d_2 \le h_1^* & \\
 & d_3 \le h_2^* & \\
 & d_i d_i' = 0 & i = 1,2,3,4,5 \\
 & d_i d_i' \ge 0 &
\end{array}
$$

جواب بهینه مدل فوق نیز $h_3^* = 0$ است. در مرحله آخر با وارد کردن محدودیت‌های مربوط به هدف سوم، مسئله فرعی چهارم تشکیل داده می‌شود:

$$
\begin{array}{lll}
Min & h_4 = d_6' & \\
st: & x_1 + d_1 - d_1' = 0 & \\
 & x_2 + d_2 - d_2' = 0 & \\
 & y_1(x) + d_3 - d_3' = 78.5 & \\
 & y_2(x) + d_4 - d_4' = 68 & \\
 & y_2(x) + d_5 - d_5' = 62 & \\
 & y_3(x) + d_6 - d_6' = 3400 & \\
 & d_1 + d_2 \le h_1^* & \\
 & d_3 \le h_2^* & \\
 & d_4' + d_5 \le h_3^* & \\
 & d_i d_i' = 0 & i = 1,2,3,4,5,6 \\
 & d_i d_i' \ge 0 &
\end{array}
$$

جواب بهینه مدل فوق $h_4^* = 0$ است که طی آن $x_1=88.36097$ و $x_2=171.5048$ است و مقادیر اهداف بصورت زیر می‌باشند:

$y_2(x) = 67.36606$ $y_1(x) = 79.01916$
$y_3(x) = 3400$

این در حالی است که دو جواب بدست آمده از روش توابع مطلوبیت [1] عبارتند از:

$x_1=86.5$ $x_2=170.5$ $y_1(x)=78.8$
$y_2(x)=65$ $y_3(x)=3287$

$x_1=82$ $x_2=178.8$
$y_1(x)=78.5$ $y_2(x)=65$ $y_3(x)=3400$

نتیجه گیری

تاکنون بهینه سازی مسائل دارای چند سطح پاسخ توسط سه روش عمده اولویت، توابع مطلوبیت و تابع هزینه مورد توجه قرار گرفته است. این روش‌ها از یک سو مشکلات خاص خود را دارند و از سوی دیگر با طبیعت این مسائل نیز سازگار نیستند. طبیعت این مسائل بدین گونه است که به دلیل تعارض موجود بین اهداف، تصمیم گیرنده انتظار ندارد جواب بهینه را بدست آورد و لذا مقاصدی را تامین می‌کند و سعی در تامین آن دارد. مدل برنامه‌ریزی آرمانی سازگاری بیشتری با طبیعت این مسائل دارد. همچنین به دلیل اینکه عمده توابع هدف در نزدیکی جواب بهینه حالت انحنا به خود می‌گیرند و مدل درجه دوم برای آنها مناسب است، استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی غیرخطی برای بهینه سازی این مسائل پیشنهاد می‌شود.

مراجع

1. Montgomery, D., (2001), Design and Analysis of Experiments, John Wiley & Sons.
2. Pignatiello, J., (1993), Strategies for robust multi-response quality engineering, IIE Transactions, 25, 5-15.
۳. آریانژاد، میربهادر قلی، (۱۳۸۱) ، تحقیق در عملیات ۲، انتشارات دانشگاه علم و صنعت.
۴. اصغرپور، محمد جواد، (۱۳۸۱) ، تصمیم گیریهای چند معیاره، انتشارات دانشگاه تهران.