تخصیص منابع به گروه بهینه با استفاده از تحلیل پوششی داده ها

رضا فلاح نژاد[a و 1]، علیرضا داوودی[b و c و 2]

a) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خرم آباد، خرم آباد، ایران

b) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نیشابور، نیشابور، ایران

c) عضو باشگاه پژوهشگران جوان دانشگاه آزاد اسلامی- واحد نیشابور

تاریخ دریافت مقاله : ۱۳۸۸/08/05

تاریخ پذیرش مقاله : 1388/11/25

چکیده

مدیریت منابع بخصوص تخصیص مناسب منابع یکی از نکات قابل توجه سازمانها است. در این مقاله ما به یک مسأله واقعی می پردازیم که در آن تصمیم گیرنده می خواهد از بین واحدهای تصمیم گیرنده (DMU) یک گروه را بگونه ای انتخاب کند که به دو هدف مورد نظرش برسد: اول اینکه به دلیل در برداشتن هزینه اضافی به علت نگهداری، تصمیم گیرنده مایل است که از منابعی که در اختیار دارد بیشتر استفاده کند، و دوم اینکه او مایل است که واحدها را بگونه ای انتخاب کند که گروه تشکیل شونده دارای بیشترین کارایی مجموع باشد. در این مقاله یک مدل برنامه ریزی صحیح بر مبنای تحلیل پوششی داده ها به منظور انتخاب گروهی با حداکثر کارایی مجموع که در شرایط مورد نظر تصمیم گیرنده صدق کند معرفی می شود.

لغات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، تخصیص منابع، گروه بندی

۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده ها (DEA) یک روش غیر پارامتری شناخته شده برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای مشابه است. DEA تنها با استفاده از ورودی ها و خروجی هایی که DMU ها مصرف یا تولید می کنند چنین کاری را انجام می دهد. DEA نه تنها برای ارزیابی عملکرد واحدها بکار می رود، بلکه برای حل بسیاری از مسائلی که مدیران با آن مواجه هستند نیز بکار می رود. یک از این مسائل، تخصیص منابع است. سازمانها همواره به دنبال استفاده مطلوب از منابع در اختیار می باشند و با مصرف منابع موجود اهدافی را دنبال می کنند. در مسائل حقیقی مواردی اتفاق می افتد که در آن یک سازمان و یا فرد مایل است که گروهی را بر اساس ملاک هایی انتخاب کند تا منابع خود را برای انجام کار به خصوصی در اختیار آنها قرار می دهد. برخی اوقات تصمیم گیرنده پیشنهادهای داده شده توسط کاندیداها را مطالعه کرده و کاندیدا و یا دسته ای را انتخاب می کند که با کمترین هزینه، و یا با بیشترین سود، خواسته تصمیم گیرنده را برآورده سازد. در واقع تصمیم گیرنده مایل است که از منابع موجود که برای آنها هزینه پرداخت کرده است و یا نگهداری بیشتر آنها مستلزم تحمیل شدن هزینه های دیگری از جمله هزینه های انبارداری و حتی فرسوده شدن و از بین رفتن آنها می باشد استفاده کند. به طریق دیگر می توان کاندیدا ها را واحدهای تصمیم گیرنده ای در نظر گرفت که فعالیتی مشابه به هم دارند و قرار است تحت نظر یک تصمیم گیرنده با صرف منابعی که تصمیم گیرنده در اختیار آنها قرار می دهد فعالیت کنند. به هر حال نکته ای که در مورد آن واحدها برقرار است این است که واحدها همگن هستند، بدین معنی که فعالیت مشابهی را انجام می دهند. برای انتخاب چنین گروهی، تصمیم گیران از معیارهایی استفاده می کنند. علاوه بر معیار سود و هزینه، تصمیم گیرنده می تواند برای انتخاب گروه مورد نظر از معیار

[1] عهده دار مکاتبات: r.fallahnejad@gmail.com :(Email)- تلفن: ۰۹۱۶۳۶۷۲۱۳۷

[2] adavoodi@iau-neyshabur.ac.ir :(Email) – تلفن ۰۹۱۵۳۰۰۰۴۳۷

کارایی استفاده کند، به این ترتیب که تصمیم گیرنده از قبل با عملکرد واحدها آشنایی دارد و می تواند که آنها در قبال استفاده از مقدار خاصی از ورودی ها چه مقدار از خروجی ها را تولید می کند. لذا مسأله ای که در این مقاله به آن می پردازیم به این صورت است که:

سازمان (تصمیم گیرنده) منابعی در اختیار دارد که می خواهد با توجه به آمادگی و پیشنهاد واحدهای کاندیدا یا واحدهای تصمیم گیرنده (DMUs) دسته ای از آنها را انتخاب کند که اولاً تا حد ممکن از منابعی که بابت تهیه آنها هزینه شده و یا نگهداری آنها مستلزم هزینه ی بیشتری است استفاده کنند و ثانیاً مجموع کارایی DMU های موجود در دسته انتخابی که در حقیقت از این به بعد به نوعی تحت نظر تصمیم گیرنده فعالیت خواهند کرد ماکسیمم شود. به عبارت دیگر انتخاب واحدها برای اینکه منابع به آنها تخصیص داده شود بایستی که بر اساس دو معیار انجام گیرد: ماکسیمم بودن کارایی گروه و می نیمم کردن هزینه غیرمستقیم ناشی از عدم استفاده از منابع. ما سعی می کنیم که با اضافه کردن قیدی به مدل پیشنهادی خود به هدف دوم برسیم، و لذا تنها به معیار کارایی برای انتخاب گروه مورد نظر توجه خواهیم کرد. بدیهی است که دسته های مختلفی از واحدها می تواند به وجود آید که در شرایط مورد نظر تصمیم گیرنده صدق کنند. این دسته ها می توانند شامل یک DMU و یا تعداد بیشتری باشد. همچنین ممکن است دسته ای انتخاب شود که شامل تمام DMU ها باشد. به هر حال آنچه معلوم است این است که تعداد چنین دسته هایی متناهی است و اگر تعداد تمام DMU ها n باشد، کران بالای تعداد اینچنین دسته هایی 2^n خواهد بود که محاسبه مجموع کارایی هر دسته کار طاقت فرسایی است.

در متون ادبی، مقالات زیادی در مورد تخصیص منابع دیده می شود. Golany و Tamir [۱] یک مدل تخصیص منابع با ماهیت خروجی را ارائه دادند که در آن بر روی مقدار کل ورودی مصرفی کرانهایی وجود داشت. Athanassopoulos [۲] یک مدل برنامه ریزی هدف بر مبنای فرم مضربی پیشنهاد دادند که در آن مضارب قبلاً بوسیله یک مدل محدودیت وزنی محاسبه می شدند. Fare و همکاران [۳] یک روش دو مرحله ای را ارائه دادند که در آن فرض شده بود که میزان ورودی ای که برای تولید هر واحد از خروجی مورد نیاز بود از قبل مشخص است. Korhonen و همکاران [۴] یک روش چند هدفی عمومی را برای تخصیص منابع پیشنهاد دادند با این فرض که یک واحد مرکزی به طور همزمان تمام واحدها را کنترل می کند. این روش به صورت MOLP فرموله شده بود. با استفاده از MOLP تصمیم گیرنده می تواند با استفاده از ماکسیمم کردن مقدار چندین تابع هدف به صورت همزمان بهترین تخصیص منابع را انتخاب کند. Lozano و همکاران [۵] دو مدل DEA شعاعی و غیر شعاعی که در آن تصمیم گیرنده به طور همزمان هم به می نیمم کردن کل ورودی مصرفی و یا ماکسیمم کردن کل خروجی تولیدی توسط تمام واحدها توجه دارد و هم به ماکسیمم کردن کارایی تک تک واحدها. Asmild و همکاران [۶] به مقاله فوق الذکر ارائه شده توسط Lozano و همکارانش توجه کردند و پیشنهاد دادند که روش ایشان بگونه ای اصلاح شود که تنها اصلاح در تخصیص منابع واحدهای ناکارا انجام گیرد. آنها همچنین فرآیندی را توصیه کردند که می توانست به منظور تولید جوابهای بهینه دگرین مورد استفاده قرار بگیرد. این مطلب تصمیم گیرنده ها را قادر می سازد که از بین استراتژیهای مختلف جستجو انجام داده و مناسب ترین را انتخاب کنند. موضوع دیگری که در تخصیص منابع دیده می شود، بحث تخصیص منصفانه منابع است. در این زمینه تصمیم گیرنده تمایل دارد که منابع و یا هزینه ثابتی را بین واحدهای تحت اختیار خود به طریقی منصفانه تخصیص دهد. Cook و Kress [۷] یک روش DEA برای تخصیص منصفانه هزینه ثابت ارائه دادند. روش آنها مبتنی بر دو اصل "عدم تغییر" و "بهینگی پاراتو" بود. روش آنها به دلایل برخی مشکلات محاسباتی نمی تواند به طور مستقیم برای تخصیص هزینه بین واحدها بکار رود. Cook و Zhu [۸] روش Cook و Kress را توسعه دادند و یک روش عملی برای مسأله تخصیص منابع یافتند. Jahanshahloo و همکاران [۹] یک روش ارائه دادند که بدون حل هیچگونه مسأله برنامه ریزی ای و تنها با یک محاسبه ساده، جوابی برای مسأله تخصیص ارائه می داد. روش ایشان نیز بر اساس اصل "تغییر ناپذیری" ارائه شده توسط Cook و Kress بود.

در خصوص حالت مورد نظر در این مقاله، نکته ای که باید به آن توجه داشت این است که اگر چه واحدهای موجود در یک گروه در صورت انتخاب تحت نظر یک تصمیم گیرنده هستند و از این نظر با هم در ارتباط اند ولی عملکرد آنها در مستقل از سایر واحدها است. در واقع هدف تصمیم گیرنده بهبود میزان کارایی سیستم نهایی متشکل از DMU های موجود در دسته انتخاب شده نیست (هدف این است که گروهی انتخاب شود که کارایی اش بیشتر از بقیه باشد، نه اینکه استراتژی ای را تعیین

کنیم که یک گروه مورد نظر کارایی اش افزایش یابد). همچنین هدف تخصیص دوباره ی منابع در اختیار هـم نیسـت. در واقـع این مطلب می تواند به این صورت مطرح گردد که واحدها را همانطور که هستند بایستی که انتخاب کنیم. زیرا ممکن است که یک واحد، در مصرف یک منبع و یا به عبارت دیگر یک ورودی و یا تولید یک خروجی بسیار خوب عمل کرده باشد در حالیکـه در مورد ورودی و خروجی های دیگر وضع اینگونه نباشند. یعنی واحدها از ایـن بابـت مسـتقل انـد کـه امکـان تغییـر ورودی و خروجی های آنها توسط تصمیم گیرنده بدون موافقت هر کدام از آنها وجود ندارد. هچنین امکـان رد و بـدل کـردن منـابع نیـز وجود ندارد. لذا بایستی که یک واحد را با تمام ضعف ها و قوت هایی که دارد انتخاب کنیم. به نـوعی مـی تـوان ایـن مسـأله را نوعی واگذاری تلقی کرد که واحدها را می توان به عنوان متقاضی تلقی کـرد. اخیـراً Chen و همکـاران [۱۰] بـه یـک مسـأله واگذاری با در نظر گرفتن ورودی ها و خروجی های چند گانه پرداختند. ایشان از کارایی نسبی هر تخصیص نسبت به تخصیص دیگر به جای سود یا هزینه ی هر تخصیص استفاده کردند. نکته ای که قابل ذکر است این است که در مسأله طرح شده در این مقاله اولاً دسته ها از قبل مشخص نیستند و ثانیاً منابعی که می خواهند واگذار شوند لزوماً برای همه دسته ها یکی نیست. زیرا میزان تقاضای هر دسته با دسته دیگر ممکن است برابر نباشد. در ضمن واحد ها در داخل دسته ها کاملاً از هم مستقل بـوده و هیچ گونه تبادلی بین آنها صورت نمی گیرد. در واقع امکان تجمیع ورودی ها و خروجی های آنها نیز وجود ندارد. همانطور کـه گفته شد حداکثر تعداد گروههایی که می توانند مورد ارزیابی قرار بگیرند 2^n است. اگر تمام چنین گروه هایی را داشته باشـیم که در شرایط مورد نظر تصمیم گیرنده صدق کند، چیزی برای جستجو باقی نمی ماند. با جمع کردن کارایی تک تک واحدهای موجود در آنها می توانیم کارایی گروه را تشخیص داده و گروه ها را با انـدیس هـای بدسـت آمـده اینچنینـی مقایسـه کنـیم و مناسب ترین گروه را انتخاب کنیم. اگرچه ممکن است در مثالهای سـاده ماننـد حـالتی کـه واحـدها دارای یـک ورودی و یـک خروجی هستند بتوانیم چنین کاری را انجام دهیم، اما در حالت کلی و در مسایل واقعی که معمولاً عوامل تأثیرگذار در فرآینـد تصمیم گیری کم نیستند، عملاً چنین کاری غیر ممکن به نظر می رسد. از منظر دیگری می توان به مسـأله مطـرح شـده نیـز نگریست و آن دسته بندی DMU هاست. در واقع تصمیم گیرنده به دنبال انتخاب دسته ای از DMU هاست که تـوان انجـام کار مشخصی را دارند. همچنین تصمیم گیرنده با یافتن دسته های بهین دیگر و یـا نزدیـک بـه دسـته ی بهـین، دسـته هـای جایگزین را نیز مشخص نماید. بدیهی است که می توان به همین ترتیب تمام دسته ها را رتبـه بنـدی کـرد و تصـمیم گیرنـده حتی می تواند با در نظر گرفتن معیارهای دیگر، دسته ی دیگری را انتخاب نماید.

ساختاراین مقاله به شرح ذیل است. در بخش دوم مدل پیشنهادی ما برای مسأله مطرح شده آمده است. در بخـش سـوم، علائه بر یک مثال عددی، روش پیشنهادی برای انتخاب یک گروه از کاندیداهای نمایندگی برای یک کمپانی فرضی بکار گرفتـه شده است. بخش ۴ نتیجه گیری را شامل می شود.

۲. مدل پیشنهادی

فرض کنید که n واحد داریم که هر کدام از m ورودی برای تولید s خروجی استفاده مـی کنـد. همچنـین فـرض کنیـد که X_p و Y_p بردارهای ورودی و خروجی DMU_p باشند کـه $X_p \neq 0 \;,\; X_p \geq 0$ و $Y_p \neq 0 \;,\; Y_p \geq 0$. مـی دانـیم کـه برای به دست آوردن کارایی واحد p ام از مدل زیر استفاده می کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\max \ \frac{U^P Y_P}{V^P X_P} \\
&s.t. \quad \frac{U^P Y_j}{V^P X_j} \leq 1, \quad \forall j \qquad\qquad (۱) \\
&\qquad U^P, V^P \geq \varepsilon
\end{aligned}
$$

که در آن $\varepsilon > 0$ یک عدد غیر ارشمیدسی است که به صورت کوچکتر از هر عدد حقیقی مثبت تعریف مـی شـود. ایـن بـدان معنی است که ε یـک عـدد حقیقـی نیسـت. انـدیس بـالای P بیـانگر ایـن مطلـب اسـت کـه وزن هـای U^P, V^P متنـاظر

ارزیابی $DMUp$ می باشند. برای تمام واحدها بایستی که چینی مسأله ای حل شود. وزنهای U,V متناظر هر مسأله با مسأله دیگر کاملاً متفاوت است لذا می توانیم تمام این n مسأله را در یک مسأله جمع آوری کرد، به صورت زیر:

$$\begin{aligned} &\max \left\{\frac{U^1Y_1}{V^1X_1},\ldots,\frac{U^jY_j}{V^jX_j},\ldots,\frac{U^nY_n}{V^nX_n}\right\} \\ &s.t. \quad \frac{U^kY_j}{V^kX_j}\leq 1, \quad \forall k,j \qquad\qquad (۲) \\ &\qquad U^k,V^k \geq \varepsilon\vec{1} \quad \forall k \end{aligned}$$

تابع هدف مسأله فوق برداری است شامل کارایی تمام واحدها به صورت $\left\{\frac{U^1Y_1}{V^1X_1},\ldots,\frac{U^jY_j}{V^jX_j},\ldots,\frac{U^nY_n}{V^nX_n}\right\}$ که از این به بعد آنرا ***بردار کارایی*** می نامیم. بدیهی است که هدف تصمیم گیرنده ماکسیمم کردن این بردار کارایی با وجود محدودیتهای حاکم بر مسأله می باشد. همانطور که قبلاً اشاره شد، مسأله این است که تصمیم گیرنده منابع محدود $\bar{X}$ را در اختیار دارد و می خواهد که گروهی از DMU ها را انتخاب کند به طریقی که بتواند به مقدار بیشتری از منابع استفاده کنند و بردار کارایی مربوط به دسته ی انتخاب شده نیز ماکسیمم شود. ما این گروه را ***گروه بهینه*** می نامیم. توجه شود که بردار منابع به گونه ای است که $\bar{X} \lneq \sum_{j=1}^{n} X_j$ و همچنین حداقل یک اندیس j موجود است به طوریکه $\bar{X} \gneq X_j$. در غیر این صورت چیزی برای حل باقی نمی ماند، زیرا عدم برقرای شرط اول باعث می شود که گروه تشکیل دهنده تمام DMU ها را انتخاب کنیم، و عدم برقراری شرط دوم باعث می شود که گروهی برای انتخاب وجود نداشته باشد. با این مقدمات، ما به دنبال حل مدل زیر هستیم:

$$\begin{aligned} &\max \left\{a_1.\frac{U^1Y_1}{V^1X_1},\ldots,a_j.\frac{U^jY_j}{V^jX_j},\ldots,a_K.\frac{U^nY_n}{V^nX_n}\right\} \\ &s.t. \quad \frac{U^kY_j}{V^kX_j}\leq 1, \quad \forall k,j \\ &\qquad 0 \leq \bar{X}-\sum_j a_jX_j \qquad\qquad (a) \qquad\qquad (۳) \\ &\qquad \bar{X}-\sum_j a_jX_j \lneq (1-a_t)X_t+Ma_t \quad \forall t \qquad (b) \\ &\qquad a_j \in \{0,1\} \\ &\qquad U^k,V^k \geq \varepsilon\vec{1} \quad \forall k \end{aligned}$$

که در آن $k,j,t=1,..,n$ در خصوص تابع هدف مدل (۳) باید گفت که ضرایب a_j باعث می شوند که واحدی که انتخاب نمی شود در محاسبه کارایی لحاظ نگردد و در واقع در بردار کارایی مقدار صفر برای آنها در نظر گرفته شود. قید (a) در واقع به صورت $\sum_j a_jX_j \leq \bar{X}$ می باشد که این قید، مربوط به محدود بودن منابع می باشد. n دسته قید (b) در واقع شامل nm قید می باشد. این دسته قیود ایجاب می کنند که زمانی که بردار منابع $\bar{X}$ بهDMU هایی که انتخاب می شوند تخصیص داده می شود، بردار مانده ی منابع یعنی $\bar{X}-\sum_j a_jX_j$ از بردار ورودی تمام DMU ها کمتر باشد و این کمتری لااقل در یک نامساوی اکید باشد. این قید در واقع برای برآورده ساختن این هدف است که هیچ منبع اضافی باقی نمانده باشد که بتوان آن را تخصیص داد و این تخصیص انجام نگرفته باشد. این چنین مسأله ای به خصوص برای تخصیص منابعی که فاسد شدنی هستند و یا باقی ماندن آنها باعث در بر داشتن هزینه ای می باشد مفید است. در نتیجه هدف تصمیم گیرنده

استفاده از حداکثر منابع موجود است. حال دسته قید (b) متناظر با X_l یعنی قید $\bar{X}-\sum_j a_j X_j \underset{\neq}{\leq} X_l$ را در نظر بگیرید. در این دسته قید، $\underset{\neq}{\leq}$ بیانگر این مطلب است که نامساوی بایستی که لا اقل در یک قید از این m قید به صورت اکید باشد. برای این منظور می توانیم به جای دسته قید $\bar{X}-\sum_j a_j X_j \underset{\neq}{\leq} X_l$، قیود زیر را جایگزین کنیم:

$$\begin{aligned}
&\bar{X}-\sum_j a_j X_j + S_t \underset{\neq}{\leq} (1-a_t)X_t + Ma_t \quad \forall t\\
&1.S_t \geq \varepsilon \qquad\qquad (۴)\\
&S_t \geq 0
\end{aligned}$$

با اعمال تغییرات بیان شده، مدل (۳) تبدیل به مدل زیر می شود:

$$\begin{aligned}
\max\ & \left\{a_1.\frac{U^1Y_1}{V^1X_1},\dots,a_j.\frac{U^jY_j}{V^jX_j},\dots,a_K.\frac{U^nY_n}{V^nX_n}\right\}\\
s.t.\ & \frac{U^kY_j}{V^kX_j} \leq 1, \quad \forall k, j\\
& 0 \leq \bar{X}-\sum_j a_j X_j\\
& \bar{X}-\sum_j a_j X_j + S_t \underset{\neq}{\leq} (1-a_t)X_t + Ma_t \quad \forall t \qquad\qquad (۵)\\
& 1.S_t \geq \varepsilon \quad \forall t\\
& S_t \geq 0 \quad \forall t\\
& a_j \in \{0,1\}\\
& U^k, V^k \geq \varepsilon\vec{1} \quad \forall k
\end{aligned}$$

مسأله (۵) یک مسأله برنامه ریزی چند معیاره و در عین حال غیر خطی- صحیح است که می توان آنرا به وسیله ی هر کدام از روش های موجود حل کرد. ولی برای تعبیر بهتر مدیریت در مقایسه بین گروه انتخابی و سایر گروه ها از مجموع کارایی اعضای گروه استفاده می کنیم. می توان از میانگین هم استفاده نمود. اما در مسأله مطرح شده در این مقاله چون در آغاز تعداد اعضای گروه مشخص نیست استفاده از میانگین منجر به پیچیدگی بیشتر مدل می شود. استفاده از کارایی مجموع منجر به مدل زیر می شود:

$$\begin{aligned}
\max\ & \sum_j a_j \frac{U^jY_j}{V^jX_j}\\
s.t.\ & \frac{U^kY_j}{V^kX_j} \leq 1, \quad \forall k, j\\
& 0 \leq \bar{X}-\sum_j a_j X_j\\
& \bar{X}-\sum_j a_j X_j + S_t \underset{\neq}{\leq} (1-a_t)X_t + Ma_t \quad \forall t \qquad\qquad (٦)\\
& 1.S_t \geq \varepsilon \quad \forall t\\
& S_t \geq 0 \quad \forall t\\
& a_j \in \{0,1\}\\
& U^k, V^k \geq \varepsilon\vec{1} \quad \forall k
\end{aligned}$$

به جای حل مدل(۶)، مدل زیر را حل می کنیم:

$$
\begin{aligned}
\max\ & \sum_j \frac{U^j Y_j}{V^j X_j} \\
s.t.\ & \frac{U^k Y_j}{V^k X_j} \le 1, \ \ \forall k, j \\
& \varepsilon a_j \le U^j \le M a_j \ \ \ \forall j \\
& 0 \le \bar{X} - \sum_j a_j X_j \\
& \bar{X} - \sum_j a_j X_j + S_t \underset{\neq}{\le} (1 - a_t) X_t + M a_t \ \ \ \forall t \\
& 1.S_t \ge \varepsilon \ \ \ \forall t \\
& S_t \ge 0 \ \ \ \forall t \\
& a_j \in \{0,1\} \\
& V^k \ge \varepsilon \vec{1} \ \ \ \forall k
\end{aligned}
\qquad (۷)
$$

دلیل این تغییرات این است که حضور ضرایب a_j در تابع هدف به خاطر این بود که کارایی متناظر واحدی را که انتخاب نمی شود از مجموع کارایی ها حذف کند. برای حذف کردن کارایی واحدها از مجموع موجود در تابع هدف، کافیست که صورت کسری را که تعریف کننده ی کارایی است صفر کنیم. برای این منظور کافیست به جای قیود $U^k \ge \varepsilon \quad \forall k$، قید زیر را اضافه کنیم:

$$\varepsilon a_j \le U^j \le M a_j \ \ \ \forall j$$

مدل (۶) را با تبدیلات $\frac{1}{V^i X_j} = t_j$ خطی می کنیم. مدل زیر حاصل می شود:

$$
\begin{aligned}
\max\ & \sum_j U^j Y_j \\
s.t.\ & V^j X_j = 1 \ \ \ \forall j \\
& U^k Y_j - V^k X_j \le 0, \ \ \forall k, j \\
& \varepsilon a_j \le U^j \le M a_j \ \ \ \forall j \\
& 0 \le \bar{X} - \sum_j a_j X_j \\
& \bar{X} - \sum_j a_j X_j + S_t \underset{\neq}{\le} (1 - a_t) X_t + M a_t \ \ \ \forall t \\
& 1.S_t \ge \varepsilon \ \ \ \forall t \\
& S_t \ge 0 \ \ \ \forall t \\
& a_j \in \{0,1\} \\
& V^k \ge \varepsilon \vec{1} \ \ \ \forall k
\end{aligned}
\qquad (۸)
$$

مدل (۸) یک مدل برنامه ریزی صحیح می باشد که برای حل آن از نرم افزارهای موجود که قادر به حل مسائل برنامه ریزی صحیح می باشند مانند نرم افزار GAMS استفاده می شود.

۳. مثال عددی و مثال کاربردی

۱,۳ مثال عددی

۵ واحد تصمیم گیرنده با ۲ ورودی و ۲ خروجی را در نظر بگیرید. داده ها در جدول ۱ داده شده اند. فرض کنید که بردار منابع $(20,18)^T$ داده شده است و ما می خواهیم این بردار را به یک گروه انتخابی تخصیص دهیم که در آن نه تنها بیشترین مقدار تخصیص صورت گیرد، بلکه گروه انتخاب شده بیشترین کارایی مجموع را داشته باشند.

جدول ۱: داده های مثال عددی

DMUs	Input1	Input2	Output1	Output2
1	8	4	2	8
2	6	8	7	9
3	5	6	4	3
4	7	3	4	7
5	3	10	3	8

اگر برای مثال فوق مدل (۸) را به کار ببریم خواهیم داشت: $a_1^* = a_4^* = a_5^* = 1$ و $a_2^* = a_3^* = 0$. مقدار تابع هدف برای این انتخاب یعنی انتخاب واحدهای ۱، ۴ و ۵ به عنوان اعضای گروه انتخابی ۲/۹۶۰۳۸ می باشد.

۲,۳ مثال کاربردی

یک کمپانی تولید کننده مایل است که چندین نمایندگی در نقاط مختلف کشور راه اندازی کند. این نمایندگی ها هر کدام به ۳ ورودی شامل نیروی آموزش دیده، بودجه و فضا نیاز دارند. منابع توسط کمپانی در اختیار شرکت ها قرار خواهند گرفت. هدف از انتخاب چنین شرکتهایی، فروش تولیدات کمپانی می باشد. ۱۳ شرکت تقاضای خود را به کارخانه داده اند. هر کدام از شرکتها بیان کرده اند که با توجه به میزان خاصی از ورودی قادر به فروش حدوداً چه میزان از تولیدات کارخانه می باشد. جدول ۲ داده ها را نشان می دهد. به علت محدودیت در منابع، این که تمام گزینه ها انتخاب شوند امکان پذیر نیست. کمپانی حداکثر ۴۰ نیروی آموزش دیده می تواند در اختیار تمام شرکتها قرار دهد، همچنین ۱۰۰۰۰واحد از پول و ۲۵۰۰ واحد از فضا برای تمام شرکتها (واحدهای اندازه گیری مقیاس شده اند). مدیر کمپانی در نظر دارد که برخی از این منابع را به منظور ماکسیمم کردن مجموع کارایی گروه انتخابی اش در اختیار قرار دهد. مدل ۸ را برای داده های جدول ۲ به کار گرفتیم. با استفاده از روش ما، شرکتهای ۱، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۱۲ و ۱۳ انتخاب شده اند و مجموع کارایی هایش برابر ۷/۰۵۶۰۵۰ شده است. به منظور معرفی یک اندیس به عنوان کارایی گروه که مقداری بین صفر و یک باشد، ما می توانیم مقدار بهین تابع هدف مدل (۸) را بر $\sum a_j^*$ که در آن $a_j^* = 1$ تقسیم کنیم. با تقسیم ۷/۰۵۶۰۵۰ بر $\sum_{j=1}^{13} a_j^* = 8$ عدد حاصل شده یعنی ۰/۸۸۲۰۰۶۲۵ را به عنوان کارایی انتخاب می کنیم. لذا این گروه نه تنها در شرایط مورد نظر تصمیم گیرنده صدق می کند، بلکه دارای بیشترین کارایی مجموع نیز می باشد.

جدول ۲: داده های مثال کاربردی

DMUs	نیروی آموزش دیده	بودجه سالانه	فضا	فروش
1	5	1000	300	3000
2	3	1200	280	2500
3	4	1100	310	2500
4	4	1400	250	3000
5	3	1300	340	2800
6	2	1100	400	2600
7	6	1250	330	2400
8	7	1000	200	2800
9	5	1200	240	3000
10	4	1400	380	2500
11	3	1600	190	3000
12	6	1000	200	3500

13	4	1350	330	3000

۴. نتیجه گیری

در این مقاله به این مسأله پرداختیم که در آن تصمیم گیرنده بردار محدودی از منابع را در اختیار دارد و می خواهد یک گروه از DMU ها را که از منابع بیشتر استفاده کنند و در عین حال بردار کارایی را ماکسیمم کند انتخاب کند. ما یک مدل برنامه ریزی صحیح برای مواجهه با این مسأله پیشنهاد کردیم. ذکر چند نکته در مورد روش پیشنهادی ضروری به نظر می رسد:

۱. همانطور که می دانیم، یکی از نقاط قوت DEA این است که برای ارزیابی، به جزء به ورودی ها و خروجی ها ،به هیچ گونه اطلاعاتی از قبیل اطلاعات ترجیحی نیاز ندارد، به عبارت دیگر وزنها اجازه دارند که به صورت کاملاً آزاد باشند. اما موقعیتهایی وجود دارند که برخی اطلاعات اولیه موجودند که در نظر نگرفتن آنها غیر منطقی به نظر می رسد. محدودیتهای وزنی یکی از ساده ترین روشها برای بکار گرفتن چنین اطلاعاتی است. در مدل پسشنهادی وزنها به صورت آزادانه انتخاب شده اند. یعنی هیچ گونه کنترل وزنی بر روی آنها اعمال نشده است. بنا به نظر مدیریت در تعیین اولویت های خاصی بر روی ورودی ها و خروجی ها، می توان با اعمال کنترل وزن های مناسب بر روی مدل اصلی به این خواسته نزدیک شد.

۲. بایستی خاطر نشان گردد که مدل پیشنهادی در این مقاله ممکن است در چندین حالت نشدنی شود. همانطور که قبلاً اشاره شد، $\overline{X}$ بایستی به گونه ای باشد که $\overline{X} \underset{\neq}{\leq} \sum_{j=1}^{n} X_j$ و حداقل j ای باشد که $\overline{X} \underset{\neq}{\geq} X_j$ ، در غیر این صورت مدلهای ۶ و ۸ نشدنی خواهند شد که چنین حالتهایی را با محاسبات ساده ای می توانیم تشخیص دهیم. حالت دیگر زمانی اتفاق می افتد که حداقل یک اندیس i از $\overline{X}$ موجود باشد به طوریکه $\overline{X}_i < \min\{X_{ij},\, j=1,\ldots,n\}$ ، هر چند که در مسائل واقعی چنین مطلبی به ندرت اتفاق می افتد که بردار منابع از تقاضای تمام واحدها کمتر باشد.

۳. در این مقاله ما حالتی را در نظر گرفتیم که انتخاب گروه بهین بر مبنای استفاده بیشتر از منابع بود. تصمیم گیرنده می تواند گروه را در حالتی انتخاب کند که استفاده آن از بردار منابع به دو بردار X_L و X_U محدود شده باشد.

References

1- B. Golany and E. Tamir. “Evaluating efficiency-effectiveness-equality trade-offs: a data envelopment analysis approach”, management science, 41 (1995) 1172–1184.

2- A.D. Athanassopoulos, “Decision support for target-based resource allocation of public services in multiunit and multilevel systems”, management science 44 (1998) 173–187.

3- R. Fare, R. Grabowski, S. Grosskopf and S. Kraft, “Efficiency of a fixed but allocate able input: a non-parametric approach”, Economic Letters, 56 (1997) 187–193.

4- P. korhonen, M. syrjanen, “Resource allocation based on efficiency analysis”, management science, 50 (2004) 1134-1144.

5- S. Lozano, G. Villa, “Centralized resource allocation using Data Envelopment Analysis”, Journal of Productivity Analysis, 22 (2004) 143–161.

6- M. Asmild, J. C. Paradi, J. T. Pastor, “Centralized resource allocation BCC models”, Omega 36 (2009) 549-564.

7- W. D. Cook, M. Kress, "Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach", European Journal of Operational Research, 119 (1999) 652-661.

8- W. D. Cook, Joe Zhu, "Allocation of shared costs among decision making units: a DEA approach", Computers & Operations Research, 32 (2005) 2171–2178.

9- G.R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, N. Shoja, M. Sanei, "An alternative approach for equitable allocation of shared costs by using DEA, Applied Mathematics and Computation, 153 (2004) 267–274.

10- L. H. Chen, H. W. Lu, "An extended assignment problem considering multiple inputs and outputs", Applied Mathematical Modeling, 31 (2007) 2239–2248.