

## مدل سازی سیستم‌های احتمالی صف با بهره‌گیری از زنجیره مارکوف با محدودیت چیدمان

صادق عابدی\*، ناصر حمیدی\*\*، مصطفی پرخوان\*\*\*

\* عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، گروه مدیریت، قزوین، ایران (sadegh.abedi@yahoo.com)

\*\* عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، گروه مدیریت، قزوین، ایران (nhamidi1341@gmail.com)

\*\*\* دانش آموخته دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۸/۰۴/۲۰

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۸۹/۰۱/۲۰

### چکیده

موسسات تولیدی و خدماتی برای تصمیم‌گیری بهینه در جهت کاهش زمان انتظار مشتریان خود می‌بایست از نظریه‌های صف بهره‌گیری نمایند، تا نه تنها سطح منابع لازم برای سرمایه‌گذاری را مشخص نمایند، بلکه تا آنجا که امکان دارد رضایت مشتری را تامین نمایند. این موضوع بویژه برای ادامه حیات اقتصادی شرکت‌ها در شرایط کاملاً رقابتی اهمیت ویژه‌ای دارد. لذا تحقیق در زمینه توصیف عملکرد سیستم‌های صف در شرایط محیطی مختلف امری ضروری محسوب می‌گردد.

در این مقاله با تحلیل سیستم‌های صف واقعی با محدودیت‌های استقرار چیدمان در شرایط خاص و با استفاده از مفاهیم و اصول زنجیره مارکوف در تئوری صف مدل ترکیبی معرفی گردیده است. این مدل می‌تواند اساس و پایه ارزیابی سیستم‌های صف با پارامترهای احتمالی خدمت رسانی محسوب گردد. در این مقاله سعی شده است با ارائه یک مطالعه موردی به تشریح کامل مدل پیشنهادی پرداخته شود. برای این منظور جایگاه‌های سوخت رسانی که یکی از بزرگ‌ترین سیستم‌های صف در کشور می‌باشد مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: تئوری صف، زنجیره مارکوف، چیدمان، جایگاه‌های سوخت رسانی

### ۱. مقدمه

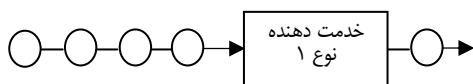
کاهش زمان انتظار مشتریان خود از نظریه‌های صف بهره‌گیری نمایند تا نه تنها سطح منابع لازم برای سرمایه‌گذاری را مشخص نمایند، بلکه تا آنجا که امکان دارد رضایت مشتری را تامین نمایند [4]. این موضوع بویژه برای ادامه حیات اقتصادی شرکت‌ها در شرایط کاملاً رقابتی اهمیت ویژه‌ای دارد. لذا تحقیق در زمینه توصیف عملکرد سیستم‌های صف در شرایط محیطی مختلف امری ضروری محسوب می‌گردد. در مجموع می‌توان گفت جانمایی فیزیکی سیستم‌های صف [5]، نوع چیدمان خدمت

تئوری صف یکی از قدیمی‌ترین و توسعه یافته‌ترین تکنیک‌های تجزیه و تحلیل می‌باشد که همه روزه در خطوط انتظار مورد استفاده قرار می‌گیرد [1]. تلاش عمده تمامی موسسات تولیدی و خدماتی کسب رضایت مشتری است [2]. این رضایت در ویژگی‌های موردنظر مشترک منعکس می‌شود. یکی از این ویژگی‌ها، دسترسی به کالا یا خدمات در کمترین زمان ممکن است [3]. عرضه کنندگان کالا و خدمات ناچارند برای تصمیم‌گیری بهینه در جهت

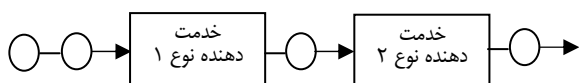
قدیمی ترین و توسعه یافته ترین تکنیک های تجزیه و تحلیل که در خطوط انتظار که همه روزه با آن روبرو هستیم مورد استفاده قرار می گیرد [11].

## ۲-۱. انواع سیستم های صف بر حسب چیدمان فیزیکی

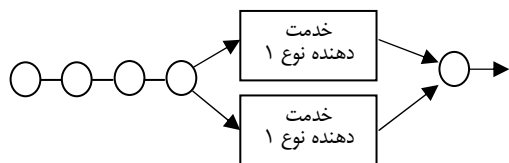
در این تقسیم بندی سیستم های صف بر اساس دو عامل نوع کانال ورودی<sup>۳</sup> و خدمت دهنده مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرد [4]. اگر در ساده ترین سیستم صف یک کانال ورودی برای ورود مشتریان و یک خدمت دهنده سرویس دهد اصطلاحاً به این سیستم، سیستم تک کاناله و تک خدمته می گویند. و در پیچیده ترین حالت سیستم صف ما داریم چندین کانال ورودی به سیستم و چندین خدمه (که سرویس های متفاوتی را عرضه می کنند) که اصطلاحاً به سیستم چند کاناله و خدمت دهنده چندگانه<sup>۴</sup> معروف می باشد. در شکل زیر انواع عمومی سیستم های صف بر حسب چیدمان فیزیکی نشان داده شده است:



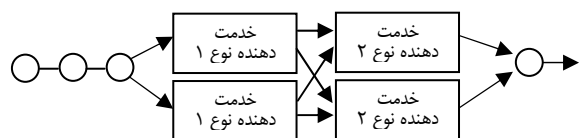
الف - سیستم تک کاناله و تک خدمت دهنده



ب - سیستم تک کاناله و خدمت دهنده چندگانه



ج - سیستم چندگانه و تک خدمت دهنده



د - سیستم چند کاناله و خدمت دهنده چندگانه

(شکل شماره ۱). انواع سیستم های صف

دهنده ها [6]، میزان فضای تخصیصی به مشتریان در استفاده بهینه از تمامی خدمت دهنده ها [7] و در نهایت نوع ارائه خدمت [8] می تواند از جمله عوامل موثر در تحلیل سیستم های صف در شرایط واقعی با توجه به محدودیت های موجود می باشد. عدم بهینه سازی طرح استقرار می تواند در بوجود آمدن صف های طولانی و به تبع آن افزایش مدت زمان انتظار افراد جهت دریافت خدمت، را به همراه داشته باشد.

ارتباط تنگاتنگ زنجیره های مارکوف پیوسته با زمان از یک سو و همبستگی کامل آن با توزیع نمائی از سوی دیگر باعث گردیده است که مدل های احتمالی دارای کاربرد زیادی در مسایل واقعی گردند [9]. چرا که توزیع نمائی اکثراً تقریب خوبی از واقعیت های موجود بوده و روند حرکت فرایندها در زمان را بخوبی با زنجیره های مارکوف پیوند می دهد [10].

در ادامه ابتدا به بررسی انواع سیستم های صف بر حسب چیدمان فیزیکی معیارهای ارزیابی عملکرد سیستم های صف و زنجیره مارکوف در توصیف سیستم های خدمت رسانی پرداخته می شود. سپس جهت تحلیل شرایط سیستم صف پیشنهادی با توجه به پیچیده بودن و محدودیت های مدل در شرایط موجود، ابتدا با بهره گیری از زنجیره های مارکوف مدل ترکیبی با فرض دو خدمت دهنده ارائه، و در نهایت با توسعه نتایج بدست آمده، مدل ترکیبی با فرض C خدمت دهنده ارائه گردیده است.

## ۲. مبانی نظری

تئوری صف با کار تحقیقاتی آقای ای. کی. ارلنگ<sup>۱</sup> در سال ۱۹۰۹ آغاز گردید [11]. در آن سال ها او مطالعات و انجام آزمایشات بر روی میزان افزایش و کاهش تقاضا در سیستم تلفن به بررسی عوامل و روابط موجود در سیستم مورد مطالعه پرداخت. هشت سال بعد او از جزئیات مطالعات صورت پذیرفته اتوماتیک کردن سیستم تلفن و نتایج حاصل از روابط موجود، که پایه و اساس تئوری های صف قرار گرفت منتشر ساخت. در پایان جنگ جهانی دوم او کاربرد استفاده از مدل های صف را در حوزه های عمومی و تجاری به سرعت گسترش داد [12]. تئوری صف یکی از

2. Physical layout  
3. Terms Channel  
4. Multi-Server

1. A. K. Erlang

## ۲-۲. نرخ کارکردی سیستم

در یک سیستم تک خدمته G/G/1 با نرخ ورود  $\lambda$  و میانگین زمان خدمت  $\frac{1}{\mu}$ ، میزان کار وارد شده در واحد زمان برابر با  $\lambda E(B)$  می باشد. اگر نرخ ورود مشتری به سیستم برابر یا بزرگتر از نرخ خدمت دهی به مشتریان باشد یعنی  $\lambda E(B) \geq 1$  آنگاه ظرفیت سیستم جوابگوی کل تقاضا برای دریافت خدمت نبوده و لذا صف رفته رفته طولانی تر گردیده و در نهایت طول صف به سمت بی نهایت میل می نماید. به همین دلیل شرط  $\lambda E(B) < 1$  شرط پایداری جهت اکثر سیستم های صف است. به جز سیستم D/D/1، سیستم های که با حالت های غیر تصادفی و سیستم بصورت ارائه غیر گروهی رابطه زیر بصورت معمول مورد استفاده قرار می گیرد [13]:

$$\rho = \lambda E(B)$$

اگر  $\rho < 1$  برقرار باشد آنگاه  $\rho$  نرخ کارکردی<sup>۱</sup> یا ضریب بهره وری<sup>۲</sup> نامیده می شود [12]. این نسبت برابر نرخ ورود کار به داخل سیستم نسبت به ماکزیمم ظرفیتی که سیستم می تواند کار انجام دهد.

## ۲-۳. معیارهای ارزیابی عملکرد سیستم های صف

جهت ارزیابی نحوه عملکرد<sup>۳</sup> سیستم های صف از معیارهای زیر بهره گرفته می شود [13]:

- توزیع مدت زمان ورود افراد به سیستم صف و مدت زمان انتظار<sup>۴</sup> مشتری در سیستم. مدت زمان انتظار مشتری  $n$ ام در سیستم برابر با مدت زمان انتظار جهت دریافت خدمت بعلاوه مدت زمان خدمت دهی می باشد.

$$T_s^{(n)} = T_l^{(n)} + S_n$$

- توزیع تعداد مشتریان موجود در سیستم (به انضمام تعداد افراد در سیستم خدمت دهی)

- تخمین توزیع مدت زمان خدمت دهی، که شامل جمع زمان سرویس در هنگامی که مشتریان در حال دریافت خدمت هستند و زمان سرویس دهی باقیمانده سایر مشتریان در صف انتظار می باشد.

در نهایت با توجه به پارامترهای فوق با استفاده از

میانگین زمان انتظار<sup>۵</sup> و میانگین زمان خدمت دهی<sup>۶</sup> می توانیم عملکرد سیستم را اندازه گیری کنیم. حال با توجه به مدل صف G/G/C چنانچه متغیر تصادفی  $L(t)$  بیانگر تعداد مشتریان موجود در سیستم در زمان  $t$  و  $S_n$  بیانگر زمان انتظار<sup>۷</sup> مشتری در سیستم باشد، تحت فرض ضریب بهره وری  $\rho < 1$  آنگاه با فرض اینکه  $n \rightarrow \infty$  و  $t \rightarrow \infty$  می توان نشان داد که متغیر تصادفی  $L(t)$  یک توزیع حدی دارد [14].

با فرض اینکه متغیرهای تصادفی  $L$  و  $S$  دارای توزیع حدی بنام  $L(t)$  و  $S_n$  باشند آنگاه  $p_k$  احتمال وجود  $k$  نفر در سیستم در دراز مدت عبارت است از:

$$p_k = P(L = K) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(L(t) = K)$$

$F_s(X)$  احتمال اینکه زمان انتظار یک مشتری دلخواه در

سیستم کوچکتر از  $x$  واحد زمانی باشد:

$$F_s(X) = P(S \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n \leq x)$$

همچنین طبق رابطه زیر [15] میانگین تعداد مشتریان موجود در سیستم در یک بازه زمانی  $[0, t]$  و نیز میانگین زمان خدمت دهی در بلند مدت برابر است با  $E(L)$  و  $E(S)$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{x=0}^t L(X) dx = E(L)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = E(S)$$

دو پارامتر بدست آمده از معادلات فوق در تجزیه و تحلیل سیستم های صف کاربرد اساسی دارند [16].

همچنین طبق قانون لیتل<sup>۷</sup> رابطه بسیار مهمی بین  $E(L)$  (میانگین تعداد مشتریان در سیستم)،  $E(S)$  (میانگین زمان انتظار) و  $\lambda$  (میانگین تعداد مشتریانی که در واحد زمان وارد سیستم صف می شوند) وجود دارد که طبق رابطه زیر نشان داده شده است [17]:

$$E(L) = \lambda E(S)$$

## ۲-۴. زنجیره های مارکوف با زمان پیوسته

با توجه به این نکته که جهت تجزیه و تحلیل اکثر مدل های

5. Mean Waiting Time  
6. Mean Sojourn Time  
7. Little's law

1. Occupation rate  
2. utilization  
3. Performance  
4. Waiting Time

مارکوف پیوند می دهد.

### ۳. بیان مسأله

با توجه به رشد نسبی مصرف سوخت در کشور ایران و نیز افزایش تعداد خودروهای تولیدی، شاهد رشد جایگاه های سوخت رسانی در کشور بویژه در شهرهای بزرگ بوده ایم. لذا مدل سازی سیستم های صف سوخت رسانی جهت تحلیل و ارزیابی عملکرد سیستم با توجه به سرمایه گذاری سنگین احداث جایگاه سوخت رسانی جدید بویژه در شهرهای بزرگ با توجه به قیمت بالای زمین و خرید تجهیزات مربوط، در داخل کشور امری ضروری محسوب می شود.

چیدمان پمپ های بنزین در جایگاه های موجود در کشور طوری طراحی و احداث شده اند خودروها پس از اتمام سوخت گیری در خروج از سیستم (بجز خودروهایی که از اولین پمپ جلو در هر سکو سوخت گیری می کنند) از آزادی عمل برخوردار نیستند که این امر باعث آن می گردد میانگین زمان سوخت گیری خودروها و به تبع آن میانگین مدت زمان انتظار جهت دریافت خدمت افزایش یابد. مدل صف سیستم موجود از یک صف اصلی که غالباً خارج از فضای تخصیص یافته داده شده به جایگاه می باشد (بدلیل کوچک بودن فضای جایگاه) تشکیل شده است. خودروها پس از طی زمان معین در صف اصلی، وارد انشعابات فرعی صف می شوند. لازم به ذکر می باشد انتخاب انشعابات برای فرد تصمیم گیرنده بر اساس کوتاه ترین انشعاب فرعی می باشد. و در مرحله آخر جهت دریافت سوخت وارد محل سوخت گیری در سکوها می شوند. در این سیستم در صورت بیکار بودن هر دو پمپ (غالباً دو پمپ در هر سکو موجود می باشد)، فرد به خدمت دهنده اول و در صورتی که خدمت دهنده اول مشغول به کار باشد، فرد به خدمت دهنده دوم مراجعه می نماید. تا زمانی که ارائه خدمت به فرد اول به اتمام نرسیده باشد، فرد دوم قادر به ترک سیستم نمی باشد. همچنین اگر در این سیستم خدمت دهنده دوم مشغول کار باشد و خدمت دهنده اول بیکار باشد، خودرو سوم در صف نمی تواند به خدمت دهنده اول مراجعه نماید. (بخاط محدودیت های

صف می بایست آنها را در قالب زنجیره های مارکوف فرموله نمود، لذا ابتدا به تعریف فرآیندهای انباشتی<sup>۱</sup> کار [18] و نیز اصول و مفاهیم اولیه زنجیره های مارکوف<sup>۲</sup> می پردازیم. یک فرآیند انباشتی مجموعه ای از متغیرهای تصادفی  $X(t)$  می باشد به شرطی که برای هر  $t \in T$  یک متغیر تصادفی موجود باشد، آنگاه می توان  $X(t)$  را بعنوان وضعیت فرآیند انباشتی در زمان  $t$  دانست [9].

فرآیند انباشتی با زمان پیوسته  $t \geq 0$  که مقادیر غیر منفی و صحیح را اختیار می کند در نظر بگیرد. فرآیند  $[N(t), t \geq 0]$  یک زنجیره مارکوف با زمان پیوسته خوانده می شود اگر برای تمام  $s, t \geq 0$  و مقادیر غیر منفی  $0 \leq u \leq s, X(u), i, j$  داشته باشیم [12]:

$$p\{X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u \leq s\} = p\{X(t+s) = X(s) = i\}$$

به عبارت دیگر زنجیره مارکوف با زمان پیوسته یک فرآیند انباشتی دارای خاصیت مارکوفی است که احتمال شرطی وضعیت آینده آن یعنی  $X(t+s)$  با دانستن وضعیت فعلی آن یعنی  $X(t)$  و حالت گذشته آن یعنی  $0 \leq u < s, X(u)$  فقط بستگی به وضعیت حال داشته و هیچ ارتباطی با گذشته فرآیند ندارد [19]. چنانچه در هر زنجیره مارکوف عبارت زیر مستقل از  $s$  باشد زنجیره مارکوف مورد نظر را همگن گویند. به عبارت دیگر اگر داشته باشیم:

$$P_{ij}(t) = p\{X(t+s) = j | X(s) = i\} \\ = P\{X(t) = j | X(0) = i\}$$

زنجیره مارکوف مورد نظر یک مارکوف همگن است. توجه داشته باشید که  $P_{ij}(t)$  احتمال انتقال وضعیت سیستم از وضعیت  $i$  به وضعیت  $j$  در مدت زمان  $t$  می باشد. ارتباط تنگاتنگ زنجیره های مارکوف پیوسته با زمان از یک سو و همبستگی کامل آن با توزیع نمائی از سوی دیگر باعث گردیده است که این مدل های احتمالی دارای کاربرد زیادی در مسایل واقعی گردند [20]. چرا که توزیع نمائی اکثراً تقریب خوبی از واقعیت های موجود بوده و روند حرکت فرایندها در زمان را بخوبی با زنجیره های

1. stock stick  
2. Markof Chains

انجام می‌شود.

- مدت زمان خدمت‌گیری فرد اول را  $t_1$  و مدت زمان خدمت‌گیری فرد دوم در سیستم را  $t_2$  در نظر می‌گیریم.
- فقط امکان تشکیل یک ردیف صف وجود دارد.
- دو خدمت‌دهنده بصورت سری در شرایط خاص در حال خدمت‌دهی هستند.

- در صورت بیکار بودن هر دو خدمه، فرد به خدمت‌دهنده اول و در صورتی که خدمت‌دهنده اول مشغول به کار باشد، فرد به خدمت‌دهنده دوم مراجعه می‌نماید.
- تا زمانی که ارائه خدمت به فرد اول به اتمام نرسیده باشد، فرد دوم قادر به ترک سیستم نمی‌باشد.
- در این سیستم اگر خدمت‌دهنده دوم مشغول کار باشد و خدمت‌دهنده اول بیکار باشد، نفر سوم در صف نمی‌تواند به خدمت‌دهنده اول مراجعه نماید.
- برای مدل‌سازی، سیستم صف موجود را بر حسب مدت زمان ارائه خدمت به دو دسته تقسیم بندی می‌نماییم:

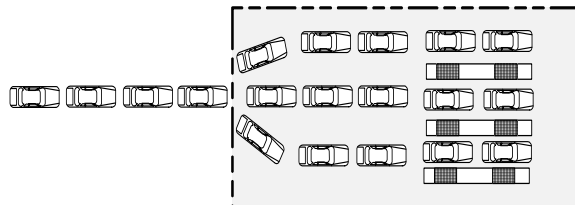
حالتی که مدت زمان ارائه خدمت به فرد از خدمت‌دهنده اول برابر یا بیشتر از خدمت‌دهنده دوم است. یا به عبارتی مدت زمان دریافت خدمت فرد اول برابر یا طولانی‌تر از فرد دوم می‌باشد.

حالتی که مدت زمان ارائه خدمت به فرد از خدمت‌دهنده دوم بیشتر از خدمت‌دهنده اول است. یا به عبارتی مدت زمان دریافت خدمت فرد اول کمتر تر از فرد دوم می‌باشد.

### ۳-۲. مدل سازی سیستم صف بر اساس فرض اول

در این حالت مدت زمان خدمت‌گیری فرد از خدمت‌دهنده اول یعنی  $t_1$  برابر یا بیشتر از مدت زمان خدمت‌گیری فرد دوم در سیستم یعنی  $t_2$  می‌باشد. با توجه به اینکه  $t_1 \geq t_2$  است، در نتیجه خواهیم داشت  $\mu_1 \leq \mu_2$ . این در واقع یک سیستم خدمت‌دهی متغیر است، یعنی نرخ خدمت‌دهی این خدمت‌دهنده‌ها با هم برابر نیست. اگر در سیستم فوق محدودیت خروج از سیستم نداشته باشیم در بازه زمانی  $\Delta T$ ، خدمت‌دهنده اول به  $[\mu_1]$  نفر و خدمت‌دهنده دوم به  $[\mu_2]$  نفر خدمت می‌دهند.

فیزیکی اعمال شده در سیستم موجود). در شکل زیر نمایی شماتیک از جایگاه سوخت رسانی نشان داده شده است.

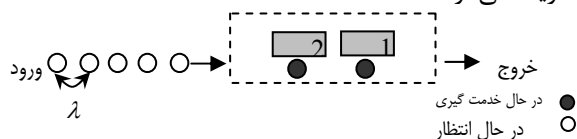


(شکل شماره ۲). نمایی شماتیک از جایگاه سوخت رسانی

پس ملاحظه می‌گردد سیستم صف فوق با توجه به نرخ خدمت‌دهی متغیر و محدودیت‌های فیزیکی موجود در سیستم نمی‌توان با استفاده از مدل‌های موجود در سیستم صف مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. بنابراین با فرض ورود مشتریان بر طبق فرایند پواسان با پارامتر  $\lambda$  و وجود دو خدمت‌دهنده در هر ردیف بصورت سری (در شرایط خاص) که مدت زمان ارائه خدمت متغیر تصادفی نمایی با پارامتر  $\mu_i$  می‌باشد تعریف می‌گردد. با توجه به این نکته عملاً عملکرد هر ردیف مستقل و مشابه دیگر ردیف‌ها می‌باشد، پس ابتدا سیستم صف موجود را بر اساس دو خدمت‌دهنده با پارامترهای به ترتیب  $\mu_1$  و  $\mu_2$  در یک ردیف با استفاده از مفاهیم زنجیره مارکوف و تعریف پارامترهای جدید با توسعه مدل  $M/M/C$  مدل سازی کرده و در نهایت با بسط مدل پیشنهادی در قالب  $i$  ردیف، مدل نهایی را استخراج می‌نماییم.

### ۳-۱. مدل سازی سیستم صف موجود بر اساس یک ردیف با دو خدمت‌دهنده

جهت مدل سازی سیستم صف پیشنهادی مطابق شکل شماره ۳- پارامترها، متغیرها و فرضیات موجود بصورت زیر تعریف می‌گردد:



(شکل شماره ۳). نمایی شماتیک از سیستم بر اساس یک ردیف دو خدمته

- ورود مشتریان بر طبق فرایند پواسان با پارامتر  $\lambda$

$$I(\Delta T) = (t_1 - t_2)\mu_1$$

به طور کلی می توان این گونه نتیجه گیری نمود که اگر خدمت دهنده اول مدت زمان  $t_1$  را صرف خدمت دهی به هر نفر کند، خدمت دهنده دوم هم همین مدت زمان را صرف خدمت دهی می کند. چون اگرچه زمان خدمت دهی واقعی این دو خدمت دهنده باهم برابر نیست، اما از دید فردی که در صف منتظر است از لحظه ای که فرد اول وارد سیستم خدمت گیری شده تا لحظه ای که جایگاه را ترک می کند را به عنوان زمان خدمت دهی فرد جلویی خود به حساب می آورد. بنابراین اگر فرد اول با زمان  $t_1$  در حال خدمت گیری باشد، فرد دوم هم همین مدت زمان در حال خدمت گیری می باشد، با این تفاوت که  $t_1$  کلاً صرف خدمت دهی به فرد اول می شود، اما فرد دوم مدت زمان  $t_2$  صرف خدمت دهی آن می شود به اضافه زمانی به اندازه  $\beta$  که منتظر است تا خدمت دهی فرد اول به پایان برسد و بتواند او از سیستم خارج شود. پس طبق موارد گفته شده خواهیم داشت:

$$t_1 = t_2 + \beta$$

پس در عمل چون فرد اول مدت زمان  $t_1$  و فرد دوم هم مدت زمان  $t_2 + \beta$  صرف خدمت دهی آنها می شود، بنابراین طبق رابطه زیر نرخ خدمت دهی برای هر دو برابر  $\mu_1$  خواهد شد.

$$\mu_1 : \frac{\Delta T}{t_1} \quad \mu_2 : \frac{\Delta T}{t_2 + \beta} = \frac{\Delta T}{t_1} = \mu_1$$

به عبارتی در بازه زمانی  $\Delta t$ ، انتظار داشتیم  $[\mu_1] + [\mu_2]$  نفر از سیستم خارج شوند. اما در عمل چون در سیستم مورد بررسی محدودیت فضا برای خروج از سیستم داریم، فردی که از خدمت دهنده دوم در حال خدمت گیری است نمی تواند بعد از دریافت خدمت از سیستم خارج شود.

همانطوری که در شکل شماره ۴- مشاهده می گردد، در بازه زمانی  $\Delta T$  خدمت دهنده اول حداکثر می تواند به ماکزیم  $n$  ای که در رابطه  $nt_1 \leq \Delta T$  برقرار باشد، خدمت دهی نماید. در این صورت  $n$  همان  $\mu_1$  یا نرخ خدمت دهی اول نامیده می شود. همچنین در بازه زمانی  $\Delta T$  خدمت دهنده دوم هم حداکثر می تواند به ماکزیم  $n$  ای که در رابطه  $(n-1)t_1 + t_2 \leq \Delta T$  برقرار باشد، خدمت دهی نماید (با توجه به محدودیت فیزیکی اعمال شده). در این صورت  $n$  همان  $\mu_2'$  یا نرخ واقعی خدمت دهی دوم نامیده می شود. بنابراین با توجه به دو رابطه فوق، می توان نتیجه گرفت که اگر حداکثر تعداد افرادی که در بازه زمانی  $\Delta T$  می توانند خدمت دریافت نمایند و از سیستم خارج شوند را  $X'(\Delta T)$  بنامیم آنگاه داریم:

$$X'(\Delta T) = 2\mu_1$$

در شکل شماره (۴) کاملاً مشخص است که اگرچه خدمت دهنده دوم قادر است به تعداد افراد بیشتری خدمت دهد، اما به دلیل محدودیت فضا نمی تواند فرد بعدی را در حالتی که فرد اول هنوز در حال خدمت گیری می باشد وارد سیستم نماید.

پس تا پایان زمان کار خدمت دهنده اول همچنان باید بیکار بماند. طبق رابطه زیر کل مدت زمان بیکاری خدمت دهنده دوم در بازه زمانی  $\Delta T$  برابر است:

بازه زمانی	0	$\Delta T$					T
خروجی خدمت دهنده اول	1	2	3	4	n-1	n	
هنگ زمانی خروجی افراد	$t_1$	$2t_1$	$3t_1$	$4t_1$	$(n-1)t_1$	$nt_1$	
از خدمت دهنده اول و دوم	$t_2$	$t_1 + t_2$	$2t_1 + t_2$	$3t_1 + t_2$	$(n-2)t_1 + t_2$	$(n-1)t_1 + t_2$	
خروجی خدمت دهنده دوم	1	2	3	4	n-1	n	

علامت هاشور نشان دهنده زمان های بیکاری خدمت دهنده دوم می باشد

(شکل شماره ۴). وضعیت سیستم خدمت دهی در حالت اول

وضعیت	دستگاه معادلات تعادل سیستم
0	$\lambda P_0 = \mu_1 P_{10}$
(1,0)	$(\lambda + \mu_1) P_{10} = \lambda P_0 + (2\mu_1) P_{11}$
(1,1)	$(\lambda + 2\mu_1) P_{11} = \lambda P_{10} + (2\mu_1) P_3$
..	..
..	..
$n \geq 2$	$(\lambda + 2\mu_1) P_n = \lambda P_{n-1} + (2\mu_1) P_{n+1}$

همان طوری که در نمودار آهنگ انتقال در شکل شماره (۵) مشخص است، به استثناء وضعیت صفر، برای هر وضعیت  $n$  دو امکان انتقال به وضعیتهای  $(n+1)$  و  $(n-1)$  وجود دارد. لذا راحت ترین راه حل دستگاه معادلات فوق حل آن بر اساس یکی از متغیرها که در اینجا راحت ترین آن  $P_0$  است، می باشد در نتیجه معادله اول جهت بدست آوردن  $P_1$  بر حسب  $P_0$  بکار رفته و با جاگذاری نتیجه آن در معادله دوم و ادامه کار به همین طریق می توان کلیه احتمالات  $P_n$  را بر حسب  $P_0$  محاسبه نمود. جهت محاسبات  $P_n$  با توجه به حل معادلات فوق داریم:

$$C_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right) & n = 1 \text{ صفی تشکیل نمی شود} \\ \left(\frac{\lambda}{2\mu_1}\right)^{n-1} \frac{\lambda}{\mu_1} & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

لذا به ازای  $n \geq 1$  با توجه به تعریف موجود خواهیم داشت  $P_n = C_n \cdot P_0$  جهت محاسبه  $P_0$  با فرض

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \text{ داریم:}$$

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda^2}{\mu_1(2\mu_1 - \lambda)}\right)^{-1}$$

لذا در حالت کلی برای محاسبه احتمال وجود  $n$  نفر در سیستم در دراز مدت خواهیم داشت:

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n P_0 & : n = 0, 1, 2 \\ \left(\frac{\lambda}{2\mu_1}\right)^{n-1} \frac{\lambda}{\mu_1} P_0 & : 2 \leq n \end{cases}$$

برای محاسبه معیارهای تجمعی مانند متوسط تعداد افراد داخل صف  $(Lq)$  و سیستم  $(L)$  در دراز مدت طبق تعاریف موجود و روابط لیتل با توجه به شرط پایداری

پس مدل سیستم صف پیشنهادی در حالت اول به نوع خاصی از مدل  $M/M/C=2$  تبدیل می شود، که نرخ خدمت دهی هر دو این خدمت دهنده ها برابر  $\mu_1$  می باشد. بنابراین داریم:

$$\lambda_n = \lambda \quad : n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & n = 1 \\ 2\mu_1 & n = 2, 3, \dots \end{cases} \text{ صفی تشکیل نمی شود}$$

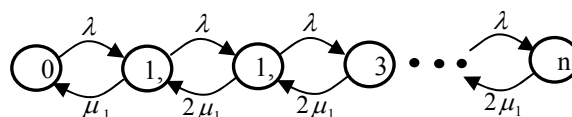
لذا برای تشریح مدل، انواع وضعیت های ممکن را مطابق جدول شماره ۱- بصورت زیر تعریف خواهیم نمود:

(جدول شماره ۱). انواع وضعیت های ممکن در سیستم در حالت اول

وضعیت	تشریح وضعیت
0	سیستم خالی است
(1,0)	سیستم دارای یک مشتری است و این مشتری در حال خدمت گیری از خدمت دهنده اول است
(0,1)	*سیستم دارای یک مشتری است و این مشتری در حال خدمت گیری از خدمت دهنده دوم است
(1,1)	سیستم دارای دو مشتری است که در حال خدمت گیری از خدمت دهنده اول و دوم هستند
$n \geq 2$	سیستم دارای $n$ مشتری است

\*چون در این سیستم همیشه  $t_1 > t_2$  پس این وضعیت هیچ موقع صورت نمی پذیرد.

در نتیجه با استفاده از مفروضات مدل، محدودیت های موجود و با توجه به ماتریس آهنگ انتقال فرایند ورود و خروج، دیاگرام آهنگ انتقال مدل بصورت زیر خواهد بود:



(شکل شماره ۵). دیاگرام آهنگ انتقال مدل در حالت اول

و با استفاده از نمودار آهنگ انتقال و مساوی قرار دادن نرخ ورود و خروج هر وضعیت دستگاه معادلات تعادل سیستم به صورت زیر است:

در بازه زمانی  $\Delta T$  خدمت دهنده اول حداکثر می تواند به ماکزیمم  $n$  ای که در رابطه  $(n-1)t_2 + t_1 \leq \Delta T$  برقرار باشد، خدمت نماید. در این صورت  $n$  همان  $\mu_1'$  یا نرخ خدمت دهی واقعی اول نامیده می شود. همچنین در بازه زمانی  $\Delta T$  خدمت دهنده دوم حداکثر می تواند به ماکزیمم  $n$  ای که در رابطه  $nt_1 \leq \Delta T$  برقرار باشد، خدمت دهد. در این صورت  $n$  همان  $\mu_2$  یا نرخ خدمت دهی دوم نامیده می شود. بنابراین با توجه به دو رابطه فوق، می توان نتیجه گرفت که اگر حداکثر تعداد افرادی که در بازه زمانی  $\Delta T$  می توانند خدمت دریافت نمایند و از سیستم خارج شوند را  $X'(\Delta T)$  بنامیم آنگاه داریم:

$$X'(\Delta T) = 2\mu_2$$

در شکل شماره (۶) کاملاً مشخص است که اگرچه خدمت دهنده اول قادر است به تعداد افراد بیشتری خدمت دهد اما به دلیل محدودیت فضا نمی تواند فرد بعدی را در حالتی که فرد دوم هنوز در حال خدمت گیری می باشد وارد سیستم نماید. پس تا پایان زمان کار خدمت دهنده دوم همچنان باید بیکار بماند. طبق رابطه زیر کل مدت زمان بیکاری خدمت دهنده اول در بازه زمانی  $\Delta T$  برابر است:

$$I(\Delta T) = (t_2 - t_1)\mu_2$$

نتیجه ای که از این قسمت حاصل می شود این است از دید فردی که در صف منتظر است اگر فرد دوم با زمان  $t_2$  در حال خدمت گیری باشد، فرد اول هم همین مدت زمان در حال خدمت گیری می باشد، با این تفاوت که  $t_2$  کلاً صرف خدمت دهی به فرد دوم می شود اما فرد اول مدت زمان  $t_1$  صرف خدمت دهی آن می شود به اضافه زمانی به اندازه  $\alpha$  که فرد دوم از سیستم خارج شود. پس طبق موارد گفته شده خواهیم داشت:

$$t_2 = t_1 + \alpha$$

سیستم  $\rho = \frac{\lambda}{2\mu_1} < 1$  در نتیجه خواهیم داشت:

$$L_q = \frac{P_0}{2} \left( \frac{\lambda}{\mu_1} \right)^2 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{P_0}{2} \left( \frac{\lambda}{\mu_1} \right)^2 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu_1}$$

همچنین برای محاسبه معیارهای زمانی مانند متوسط زمان انتظار مشتریان داخل صف ( $W_q$ ) و سیستم ( $W$ ) در دراز مدت طبق تعاریف موجود و روابط لیتل بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\pi_0}{2} \left( \frac{\lambda}{\mu_1^2} \right) \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu_1} = \frac{\pi_0}{2} \left( \frac{\lambda}{\mu_1^2} \right) \frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu_1}$$

### ۳-۳. مدل سازی سیستم صف بر اساس فرض دوم

در این حالت بر خلاف حالت قبل فرض بر این است مدت زمان خدمت گیری فرد از خدمت دهنده دوم یعنی  $t_2$  بزرگتر از مدت زمان خدمت گیری فرد اول در سیستم یعنی  $t_1$  است. با توجه به اینکه  $t_1 \leq t_2$  است، در نتیجه خواهیم داشت  $\mu_1 \geq \mu_2$ . اگر در سیستم فوق محدودیت خروج از سیستم نداشته باشیم در بازه زمانی  $\Delta T$ ، خدمت دهنده اول به  $[\mu_1]$  نفر و خدمت دهنده دوم به  $[\mu_2]$  نفر خدمت ارائه می دهد. به عبارتی در بازه زمانی  $\Delta T$ ، انتظار داشتیم  $[\mu_1] + [\mu_2]$  نفر از سیستم خارج شوند. اما در عمل چون در سیستم مورد بررسی محدودیت فضا برای خروج از سیستم وجود دارد، پس فردی که در صف منتظر دریافت خدمت می باشد در صورت اتمام خدمت گیری فرد اول در سیستم نمی تواند جایگزین او شود. زیرا خدمت دهنده دوم در حال خدمت گیری است و هنوز از سیستم خارج نشده است. همانطوری که در شکل شماره ۶ - مشاهده می گردد،

خروجی خدمت دهنده اول	1	2	3	4	n-1	n
آهنگ زمانی خروجی افراد	$t_1$	$t_1 + t_2$	$2t_2 + t_1$	$3t_2 + t_1$	$(n-2)t_2 + t_1$	$(n-1)t_2 + t_1$
از خدمت دهنده اول و دوم	$t_2$	$2t_2$	$3t_2$	$4t_2$	$(n-1)t_2$	$nt_2$
خروجی خدمت دهنده دوم	1	2	3	4	n-1	n
بازه زمانی	0			$\Delta T$		$T$

( شکل شماره ۶) وضعیت سیستم خدمت دهی در حالت دوم



سیستم به صورت زیر است:

وضعیت	دستگاه معادلات تعادل سیستم
0	$\lambda.P_0 = \mu_1 P_{10}$
(1,0)	$(\lambda + \mu_1)P_{10} = \lambda.P_0 + (2\mu_2)P_{11}$
(1,1)	$(\lambda + 2\mu_2)P_{11} = \lambda.P_{10} + (2\mu_2)P_3$
..	..
..	..
$n \geq 2$	$(\lambda + 2\mu_2)P_n = \lambda.P_{n-1} + (2\mu_2)P_{n+1}$

با حل دستگاه معادلات فوق و در نظر گرفتن اینکه

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

نمود.

صفتی تشکیل نمی‌شود

$$C_n = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu_1} & n = 1 \\ \left(\frac{\lambda}{2\mu_2}\right)^{n-1} \frac{\lambda}{\mu_1} & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

لذا با توجه به تعریف موجود خواهیم داشت:

$$P_n = C_n \cdot P_0 \quad n = 1, 2, \dots$$

و جهت محاسبه  $P_0$  طبق محاسبات صورت پذیرفته خواهیم داشت:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda^2}{\mu_1(2\mu_2 - \lambda)}\right)^{-1}$$

لذا در حالت کلی برای محاسبه احتمال وجود  $n$  نفر در سیستم در دراز مدت خواهیم داشت:

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n P_0 & : n = 0, 1 \\ \left(\frac{\lambda}{2\mu_2}\right)^{n-1} \frac{\lambda}{\mu_1} P_0 & : 2 \leq n \end{cases}$$

برای محاسبه معیارهای تجمعی مانند متوسط تعداد افراد داخل صف ( $L_q$ ) و سیستم ( $L$ ) در دراز مدت طبق تعاریف موجود و روابط لیتل با توجه به شرط پایداری سیستم بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$L_q = \frac{\pi_0}{2} \left(\frac{\lambda^2}{\mu_1 \mu_2}\right) \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{P_0}{2} \left(\frac{\lambda^2}{\mu_1 \mu_2}\right) \frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu_2}$$

همچنین برای محاسبه معیارهای زمانی مانند متوسط

پس در عمل چون فرد اول مدت زمان  $t_1 + \alpha$  صرف خدمت دهی آن می‌شود و فرد دوم هم مدت زمان  $t_2$  صرف خدمت دهی آن می‌شود. بنابراین طبق رابطه زیر نرخ خدمت دهی برای هر دو برابر  $\mu_2$  خواهد شد.

$$\mu_1 : \frac{\Delta T}{t_1 + \alpha} = \frac{\Delta T}{t_2} = \mu_2$$

پس مدل سیستم صف پیشنهادی با فرض دوم تبدیل می‌شود به مدلی که نرخ خدمت دهی هر دو خدمت دهنده برابر  $\mu_2$  می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\lambda_n = \lambda \quad : n = 0, 1, 2, \dots$$

صفتی تشکیل نمی‌شود

$$\mu_n = \begin{cases} \mu_1 & n = 1 \\ 2\mu_2 & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

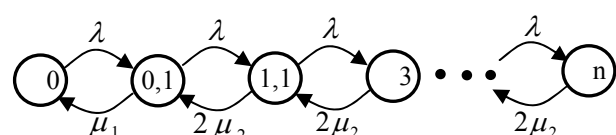
برای تشریح مدل، انواع وضعیت‌های ممکن را مطابق جدول شماره (۲) به صورت زیر تعریف خواهیم نمود:

جدول شماره ۲- انواع وضعیت‌های ممکن در سیستم در حالت دوم

وضعیت	تشریح وضعیت
0	سیستم خالی است
(1,0)	*سیستم دارای یک مشتری است و این مشتری در حال خدمت‌گیری از خدمت دهنده اول است
(0,1)	سیستم دارای یک مشتری است و این مشتری در حال خدمت‌گیری از خدمت دهنده دوم است
(1,1)	سیستم دارای دو مشتری است که در حال خدمت‌گیری از خدمت دهنده اول و دوم هستند
$n \geq 2$	سیستم دارای $n$ مشتری است و صف تشکیل می‌شود

\*چون در این سیستم همیشه  $t_1 < t_2$  پس این وضعیت هیچ موقع صورت نمی‌پذیرد.

در نتیجه با استفاده از مفروضات مدل و محدودیت‌های موجود و با توجه به ماتریس آهنگ انتقال فرایند ورود و خروج، دیاگرام آهنگ انتقال مدل بصورت زیر خواهد بود:



(شکل شماره ۶). دیاگرام آهنگ انتقال مدل در حالت دوم

با استفاده از نمودار آهنگ انتقال و مساوی قرار دادن نرخ ورود و خروج هر وضعیت دستگاه معادلات تعادل

۳-۵. بسط مدل ترکیبی پیشنهادی با فرض C خدمت دهنده

با توجه به نتایج بدست آمده از مدل ترکیبی با فرض دو خدمت دهنده، می توان جهت تحلیل کل عملکرد سیستم از آن بهره برد.

همان گونه که در شکل شماره (۷) مشاهده می گردد، فرد پس از رسیدن به سر صف اصلی (نقطه A) بر خلاف مدل M/M/C امکان انتخاب یکی از C خدمت دهنده را ندارد. زیرا در این مدل فرد پس از طی نمودن صف اصلی در نقطه A باید یکی از i (ردیف خدمت دهی) را انتخاب کند، که در این حالت فرد پس از انتخاب و ورود به شعبه فرعی صف امکان انتخاب دو خدمت دهنده موجود در مسیر را دارد و دیگر به صف های فرعی دیگر کاری ندارد. یعنی مدل C خدمت دهنده به سیستم خدمت دهی ترکیبی با فرض دو خدمت دهنده با شرایط خاص تبدیل می شود.

اگر تعداد افراد موجود در صف اصلی یعنی تا نقطه تصمیم (نقطه A) ورودی به صف های فرعی را با n و نیز تعداد افراد موجود در هر صف فرعی یعنی تعداد افراد از نقطه A تا محل خدمت گیری را با n<sub>i</sub> نمایش دهیم، تعمیم کلی روابط فوق برای محاسبه تعداد افراد در سیستم N جهت محاسبات احتمالات حدی طبق جدول زیر عبارت است از:

(جدول شماره ۳): محاسبه تعداد افراد در سیستم

وضعیت سیستم	محاسبه تعداد افراد در سیستم (N)
فرد صف فرعی اول را برای خدمت گیری انتخاب می نماید	n + n <sub>1</sub>
فرد صف فرعی دوم را برای خدمت گیری انتخاب می نماید	n + n <sub>2</sub>
فرد صف فرعی i - 1 را برای خدمت گیری انتخاب می نماید	n + n <sub>i-1</sub>
فرد صف فرعی i را برای خدمت گیری انتخاب می نماید	n + n <sub>i</sub>

زمان انتظار مشتریان داخل صف (W<sub>q</sub>) و سیستم (W) در دراز مدت طبق تعاریف موجود و روابط لیتل بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$W_q = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{P_0}{2} \left( \frac{\lambda}{\mu_1 \mu_2} \right) \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu_2} = \frac{P_0}{2} \left( \frac{\lambda}{\mu_1 \mu_2} \right) \frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu_2}$$

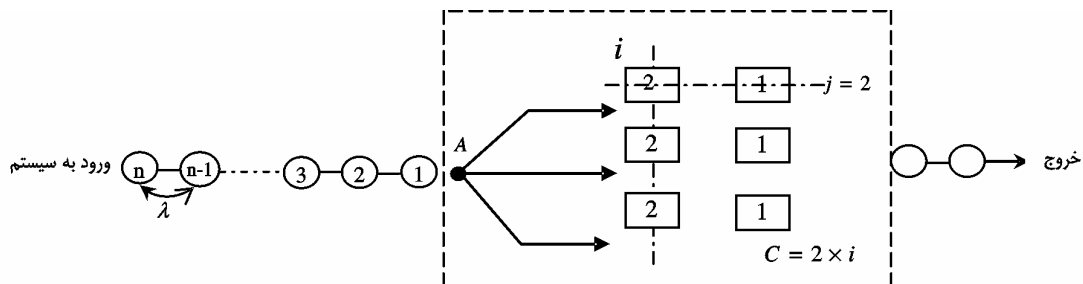
۳-۴. ارایه مدل ترکیبی با فرض دو خدمت دهنده

در این مقاله ابتدا سیستم صف موجود را بر اساس دو خدمت دهنده با پارامترهای به ترتیب  $\mu_1$  و  $\mu_2$  در یک ردیف با استفاده از مفاهیم زنجیره مارکوف و تعریف پارامترهای جدید با توسعه مدل M/M/C مدل سازی نموده ایم. اما واقعیت این گونه نیست که یکی از این حالت ها رخ دهند، بلکه در واقع ترکیبی از دو حالت فوق همواره اتفاق می افتد. پس برای ارائه یک مدل ترکیبی نیاز به تعریف دو متغیر جدید داریم که ترکیبی از دو حالت فوق را در بر گیرد. بدین منظور احتمال رخداد حالت اول را در بازه زمانی  $\Delta T$  را  $\theta_1$  و احتمال رخداد حالت دوم را  $\theta_2$  می نامیم. سپس برای محاسبه تک تک متغیرها در حالت ترکیبی  $Z_{(c=2)}$  ابتدا با فرض این که کلاً حالت اول اتفاق می افتد و سپس با فرض این که کلاً حالت دوم اتفاق می افتد محاسبه نموده، سپس از آنها با توجه به مقادیر احتمالی  $\theta_1$  و  $\theta_2$  میانگین وزنی می گیریم:

$$Z_{(c=2)} = \frac{\theta_1 X + \theta_2 Y}{\theta_1 + \theta_2}$$

X: متغیرهای تصمیم مدل با فرض اینکه حالت اول اتفاق بیافتد

Y: متغیرهای تصمیم مدل با فرض اینکه حالت دوم اتفاق بیافتد



(شکل شماره ۷). نمایی شماتیک از سیستم صف

با توجه به داده‌های به دست آمده از جدول فوق و با استفاده از مدل ترکیبی نتایج حاصل از تحلیل سیستم موجود در یک ردیف دو خدمت در دراز مدت مطابق جدول زیر مشخص می‌گردد:

(جدول شماره ۵). اطلاعات جایگاه سوخت مورد بررسی

عنوان	پارامتر	حالت		واحد
		اول	دوم	
نرخ کارکردی	$\rho$	۹۶	۹۲	درصد
احتمال اینکه در سیستم هیچ کس حضور نداشته باشد	$P_0$	۹۶.۱	۹۸.۳	درصد
میانگین تعداد افراد داخل صف	$L_q$	۲۳	۱۱	نفر
میانگین تعداد افراد داخل سیستم	$L$	۲۵	۱۲	نفر
میانگین زمان انتظار افراد در صف	$W_q$	۲۸	۱۳	دقیقه
میانگین زمان انتظار افراد در سیستم	$W$	۳۰	۱۵	دقیقه

و سرانجام با استفاده از جدول شماره ۵) و اعمال ضرایب احتمالی  $\theta_1, \theta_2$  و نیز نرخ ورود اصلاحی  $\hat{\lambda}$  نتیجه نهایی تحلیل سیستم با ۶ خدمت دهنده مطابق جدول زیر برابر است:

(جدول شماره ۶). تحلیل نتایج نهایی سیستم

عنوان	پارامتر	مقدار	واحد
نرخ ورود اصلاحی	$\hat{\lambda}$	۱۷	نفر در ساعت
میانگین کل تعداد افراد داخل صف	$\hat{L}_q$	۴	نفر
میانگین کل تعداد افراد داخل سیستم	$\hat{L}$	۶	نفر
میانگین کل زمان انتظار افراد در صف	$\hat{W}_q$	۵۰	ثانیه
میانگین کل زمان انتظار افراد در سیستم	$\hat{W}$	۱۸۰	ثانیه

برای محاسبه پارامترهای مانند  $\hat{L}$  و  $\hat{W}$  کل سیستم صف، چون وضعیت خدمت رسانی در  $i$  ردیف مختلف موجود در سیستم کاملاً یکسان و مشابه هم بوده است، پس می‌توان با تبدیل نرخ ورود مشتریان به کل سیستم ( $\lambda$ ) به  $\hat{\lambda}$  اصلاح شده طبق رابطه زیر، نتایج بدست آمده از مدل ترکیبی با فرض دو خدمت دهنده را به کل سیستم تعمیم داد.

$$\hat{\lambda} = \frac{\lambda}{i}$$

### مطالعه موردی

جهت بررسی میزان ارتباط مدت زمان حضور افراد در صف با تعداد پمپ‌های موجود در یکی از جایگاه سوخت رسانی<sup>۱</sup> در تهران نمونه‌هایی جهت تحلیل به شرح جدول شماره ۴) جمع آوری گردید. لازم به ذکر می‌باشد برای شروع عمل زمان سنجی و تهیه نمونه‌هایی به منظور محاسبه مدت زمان انتظار در صف، عواملی دخیل هستند که بر تشکیل صف‌های انتظار تأثیر مستقیم خواهد داشت لذا با شناسایی این عوامل و طراحی آزمایشات بعمل آمده (DOE) میزان حجم نمونه و تعداد اجرای آن مشخص گردید.

(جدول شماره ۴). اطلاعات جایگاه سوخت مورد بررسی

عنوان	پارامتر	حالت		واحد
		اول	دوم	
میانگین مدت زمان خدمت گیری فرد از خدمت دهنده اول	$\mu_1$	۲۶	۲۷	نفر در ساعت
میانگین مدت زمان خدمت گیری فرد از خدمت دهنده دوم	$\mu_2$	۲۸	۲۷	نفر در ساعت
میانگین مدت زمان بین دو ورود افراد به سیستم	$\lambda$	۵۰		نفر در ساعت
درصد احتمال وقوع پیش آمد	$\theta_1, \theta_2$	۴۸	۵۲	درصد
تعداد پمپ بنزین‌های موجود	$C$	۶		عدد
تعداد انشعابات فرعی	$i$	۳		ردیف
حداکثر ظرفیت در هر انشعاب	$n_i$	۳		عدد
مساحت جایگاه	$S$	۱۰۰۰		متر مربع

۱- جایگاه شماره ۱۴۵ واقع در خیابان یوسف آباد در تهران

تعداد افراد در سیستم و صف مطابق نمودار فوق مشاهده می گردد که با افزایش احتمال رخداد حالت اول در سیستم یعنی  $\theta_1$ ، متوسط تعداد افراد در سیستم و صف در دراز مدت افزایش می یابد. مدل پیشنهادی در این مقاله می تواند پایه و اساس تحلیل در سیستم های صف با محدودیت های چیدمان و شرایط خاص باشد.

### منابع:

1- Cooper, R. B. (1980), *Introduction to Queuing Theory, 2nd Edition*. New York: Elsevier North Holland.

2-Porter, A. , Roper, A. Mason, T. , Rossini, F. , & Banks, J. (1991) *Forecasting and Management of Technology*. Wiley, New York.

3-Render, B. & Stair, M. & Hanna, E. (2007), *Quantitative Analysis Management 9nd edition*, New Delhi: Prentice Hall of India.

4-Gupta, M. B. & Khanna, R. B. (2006), *Quantitative Techniques For Decision Making, 2nd Edition*, New Delhi: Prentice Hall of India.

5- O. Berman, R. (1986), *Mandowsky, Location-allocation on congested network*, *European Journal of Operational Research* 26, 238-250.

6- Z. Drezner (Ed.), (1995), *Facility Location: A Survey of Applications and Methods*, Springer, New York.

7- C. ReVelle, K. Hogan, (1989), *The maximum availability location problem*, *Transportation Science* 23, 192-200.

8- F. S. Hillier, G. J. (2001), *Lieberman, Introduction to Operations Research, seventh ed.*, McGraw-Hill, Singapore.

9-Hiller, F. S. & G. J. Lieberman; *Introduction to Operation Research, 3rd edition*, Holden-Day Inc. Oakland

10-Lipschutz; (1968), *Theory and Problems of Probability*, Mc Grow-Hill.

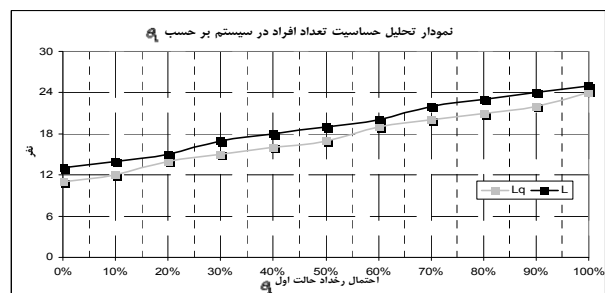
11- M. Abramowitz, I. A. (1965), *Stegun, Handbook of mathematical functions*, Dover.

12-Donald Gross , Carl M. (1985), *Harris, Fundamentals of queuing theory (2nd ed.)*, John Wiley & Sons, Inc. , New York, NY.

13-Ivo & J. Resing. (2001), *Queueing Theory*, Eindhoven University of Technology,

### نتیجه گیری

ارتباط تنگاتنگ زنجیره های مارکوف پیوسته با زمان از یک سو و همبستگی کامل آن با توزیع نمایی از سوی دیگر باعث گردیده است که مدل های احتمالی دارای کاربرد زیادی در مسایل واقعی گردند. چرا که توزیع نمایی اکثراً تقریب خوبی از واقعیت های موجود بوده و روند حرکت فرایندها در زمان را بخوبی با زنجیره های مارکوف پیوند می دهد. چیدمان پمپ های بنزین در جایگاه های موجود در کشور طوری طراحی و احداث شده اند خودروها پس از اتمام سوخت گیری در خروج از سیستم، بجز خودروهایی که از اولین پمپ جلو در هر سکو سوخت گیری می کنند، از آزادی عمل برخوردار نیستند که این امر باعث آن می گردد میانگین زمان سوخت گیری خودروها و به تبع آن میانگین مدت زمان انتظار جهت دریافت خدمت افزایش یابد. سیستم صف فوق با توجه به نرخ خدمت دهی متغیر و محدودیت های فیزیکی موجود در سیستم نمی توان با استفاده از مدل های موجود در سیستم صف مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. پس ابتدا سیستم صف موجود را بر اساس دو خدمت دهنده با استفاده از مفاهیم زنجیره مارکوف و تعریف پارامترهای جدید با توسعه مدل  $M/M/C$  مدل سازی کرده و در نهایت با بسط مدل پیشنهادی با پارامترهای احتمالی، مدل نهایی را استخراج می نماییم.



(شکل شماره ۸). تحلیل حساسیت افراد در سیستم

جهت بررسی میزان ارتباط مدت زمان حضور افراد در صف با تعداد پمپ های موجود در یکی از جایگاه سوخت رسانی در تهران نمونه هایی جهت تجزیه و تحلیل جمع آوری گردید. با تحلیل حساسیت بعمل آمده بر روی احتمال رخداد ضرایب احتمالی  $\theta_1, \theta_2$  بر روی متوسط

press, new york.

19- Ross, S. M, (1997) *Introduction to probability models*, 6th ed. , Academic Press, London.

20-Taha , H. A; (1976) *Operation Reserch, An Introduction*, 2nd edition, Macmillan Publishing Co. Inc.

Netherlands.

14- G. F. Newell, (1971), *Applications of queuing theory*, Chapman and Hall, London.

15-J. D. Little, (1961), *A proof of the queuing formula*, *Opns. Res.* , 9, pp. 383-387.

16-Ross S. M;A (1986), *First Course In Probability* , Macmillan Publishing Co. Inc.

17-B. D. Bunday, (1996), *An introduction to queueing theory*, Arnold, London.

18-Ross S. M; (1980), *Introduction to Probability Models* , 2nd edition, Academic