مدل بهینه‌سازی استوار برای مسئله مکان‌یابی و پوشش جریان هاب دارای ظرفیت

پیمان قاسمی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، فیروزکوه، ایران

چکیده

در این مقاله مدلی استوار برای مسئله بهینه سازی پوشش جریان هاب[۱] در حالتی که هاب‌ها دارای ظرفیت می‌باشند، ارائه می‌شود. این مسئله دارای دو تابع هدف می‌باشد که با استفاده از روش وزن‌دهی به مسئله تک هدفه تبدیل می‌شود. ابتدا مسئله در حالت قطعی فرمول بندی می‌شود. سپس با در نظر گرفتن تقاضا به عنوان متغیر غیر تصادفی به صورت استوار مدل سازی می‌شود. در نهایت هم با استفاده از داده‌های پست استرالیا مسئله مورد نظر با استفاده از نرم افزار GAMS حل می‌شود.

واژگان کلیدی: بهینه سازی استوار، پوشش هاب دارای ظرفیت، مسئله p هاب میانه

---

۱ Hub Covering Flow Problem

مقدمه

هاب‌ها تسهیلات ویژه‌ای هستند که به عنوان نقاط تعویض، انتقال و طبقه بندی در بسیاری از سیستم‌های توزیع به کار گرفته می‌شوند. تسهیلات هاب بجای خدمت‌رسانی به هر جفت مبدأ- مقصد، جریان‌ها را به منظور استفاده از صرفه‌جویی‌های اقتصادی ناشی از آن متمرکز می‌نمایند. جریان‌ها از مبدأ یکسان با مقصدهای مختلف روی مسیرشان به یک هاب ترکیب شده و با جریان‌هایی که مبدأهای متفاوتی دارند امّا مقصدشان یکسان است ترکیب می‌شوند. یکی‌سازی بر روی مسیر مبدأ تا هاب و از هاب تا مقصد و نیز بین هاب‌ها صورت می‌گیرد. هاب‌ها این اجازه را می‌دهند که تعداد زیادی از مقصدها به وسیله تعداد کمی خطوط ارتباطی به یکدیگر متصل شوند.

مسائل مکان‌یابی هاب به سه دسته تقسیم می‌شوند: مسائل p- هاب میانه، مسائل هاب پوششی، مسائل p-هاب مرکزی. در مسائل p-هاب میانه، هدف مکان‌یابی p هاب در شبکه و تخصیص گره‌های غیر هاب به هاب‌ها است؛ به گونه‌ای که کل هزینه حمل و نقل مینیمم گردد. مسائل p- هاب مرکز به دنبال کمینه کردن بیش‌ترین فاصله یا هزینه است. در مسائل هاب پوششی تعداد هاب‌ها داده نشده است و هدف پیدا کردن بهترین مکان هاب‌ها و تخصیص گره‌های غیر هاب به هاب تحت محدودیت‌های پوششی معین که کل هزینه تأسیس هاب‌ها مینیمم گردد. ما در این مقاله، در مورد مسائل پوشش هاب در حالت عدم قطعیت بحث می‌کنیم که با استفاده از بهینه‌سازی استوار مدل شده است. درمسائل پوشش هاب، مبدأ- مقصدها در صورتی که در فاصله از پیش تعیین شده هاب‌ها قرار گیرند پوشش داده می‌شوند. معیارهای پوشش به سه دسته تقسیم می شود. در یک دسته هزینه (زمان یا فاصله) از مبدأ به مقصد، باید از یک مقدار معین کمتر باشد. در دسته دوم، هزینه (زمان یا فاصله) از مبدأ به هاب و از هاب به مقصد باید از یک مقدار معین کمتر باشد. در دسته سوم، هزینه (زمان یا فاصله) بین لینک‌های ارتباطی در یک مسیر باید از یک مقدار معین کمتر باشد (کمپل[1]،۱۹۹۴، صص ۴۰۵-۳۸۷).

خیلی از رویه‌های مدل سازی موجود برای مسائل مکان‌یابی هاب محدود به شرایط قطعی می‌باشد. با این وجود، حجم تقاضا در شبکه و مقدار زمان مورد نیاز برای پردازش کالاها در شرایط مختلف، متفاوت است. به عبارتی، در دنیای واقعیت اصولا میزان تقاضاها و همچنین هزینه‌های حمل ونقل و... بطور قطعی قابل تعیین نمی‌باشد. از این جهت، اخیرا بررسی مسائل مختلف مکان یابی هاب در محیط های غیر قطعی[2] مورد توجه محققین قرار گرفته است.

رویکردهای مختلفی برای توزیع عدم قطعیت در برنامه ریاضی از جمله برنامه نویسی تصادفی و روش استوارسازی وجود دارد. روش برنامه نویسی تصادفی با استفاده از درخت تصمیم گیری و بررسی تمام حالات ممکن است. از آنجایی که در این روش بعد برنامه به صورت نمایی افزایش می‌یابد، رویکرد حل مسئله سخت می‌شود. بهینه سازی استوار یک روش جدیدی نیست اما پیشرفت های اخیر در این روش حل غیر قطعی مسائل را ساده تر نموده است. در روش استوار، یک یا چند پارامتر مسئله غیر قطعی در نظر گرفته می‌شوند و حل مسئله به گونه‌ای صورت می‌گیرد که جواب بدست آمده شدنی باشد و تابع هدف آن تفاوت چندانی با مقدار بهینه نداشته باشد.

در زمینه مطالعات مکان یابی هاب در شرایط عدم قطعیت مقالات کمی به چاپ رسیده است و زمینه بسیاری برای گسترش و توسعه این حوزه فراهم است. در زمینه عدم قطعیت شاید بتوان گفت که اولین تحقیق مرتبط با آن در مسائل مکانیابی را ارمولیف[3] و همکاران (۱۹۸۲) انجام دادند که در آن برخی از مدل‌های مکان‌یابی با فرمول بندی عدم قطعیت مدل شدند و با ابزارهای برنامه ریزی عدم قطعیت حل شدند. لووکس[4] (۱۹۸۶) مروری بر روی مدل‌های غیرقطعی در مکانیابی انجام داد که در همه آنها مکان‌یابی تسهیلات به عنوان گام نخست تصمیم گیری و الگوی توزیع به عنوان گام دوم درنظرگرفته شده

[1] Campbell
[2] Stochastic Hub Location
[3] Y. M.Ermoliev
[4] Louveaux

است. راوی[۱] (۲۰۰۶) یک مدل احتمالی ارائه داد که تسهیلات ممکن است در مرحله اول یا دوم باز شوند، در حالی که هزینه‌های نصب مختلفی در هر مرحله اتفاق می‌افتد. اسنیدر[۲] (۲۰۰۶) در مطالعات خود هر دو مدل استوار و احتمالی را برای مسائل مکان‌یابی پوشش می‌دهد.

اما در مورد مقالاتی که مسئله مکانیابی هاب را در فضای عدم قطعیت بررسی کردند مقالات معتبر کمی تاکنون به چاپ رسیده است. اولین مقاله‌ای که مکانیابی هاب را بصورت غیرقطعی در نظر گرفت توسط ماریانوف[۳] (۲۰۰۳) مطرح گردید که در آن از مدل صفM/D/C با محدودیت ظرفیت هواپیماهای درحال فرود استفاده کرد. مدلی که در این مقاله ارائه می‌گردد در مورد مکانیابی بهینه هاب‌ها در شبکه خطوط هوایی می‌باشد. این مقاله با دو رویکرد تعداد باند فرود ثابت و تعداد باند فرود متغیر مدل مورد نظر را ارائه داده است. در این مقاله نویسنده یک مدل خطی ارائه می‌دهد و سپس با یک روش ابتکاری مدل را حل می‌نماید.

دومین مقاله توسط یانگ[۴] (۲۰۰۹) برای برنامه ریزی حمل ونقل هوایی ارائه شد. این مقاله یک مدل برنامه ریزی احتمالی را برای مکانیابی هاب درحمل و نقل هوایی و برنامه ریزی مسیرهای پرواز در شرایطی که تقاضا بصورت فصلی متغیر است ارائه می‌کند. این مسئله به صورت دو مرحله‌ای است، درگام نخست که تحت تأثیر عوامل غیر مترقبه قرار نمی‌گیرد تعداد و مکان هاب‌ها تعیین می‌شود (سطح برنامه ریزی استراتژیک). درگام دوم که تحت تأثیر عوامل غیر مترقبه می‌باشد مسیرهای پرواز جهت جابجایی جریان‌ها از مبدا به مقصد تحت استفاده از هاب ها در شرایطی که تقاضاها به صورت سناریویی غیر قطعی هستند تعیین می‌شوند (تصمیم گیری تاکتیکی). در نهایت هم در این مقاله یک مطالعه موردی در چین و تایوان با تقاضای فصلی در سه سناریوی کم، متوسط و زیاد انجام شده است.

سومین مقاله توسط تادیوس[۵] (۲۰۰۹) ارائه شد. در این مقاله یک مدل p- محور- مرکز بصورت احتمالی معرفی می‌شود که با به کارگیری محدودیت‌های شانس جهت رسیدن به سطح خدمت تضمین شده (۲) بیشترین زمان حمل و نقل را مینیمم می‌کند. در این مسئله زمان جابجایی و حمل و نقل بصورت یک متغیر در نظر گرفته می‌شود و مسئله به دنبال مکانیابی p-هاب در شبکه و تخصیص گره‌های غیر هاب به گره‌های هاب می‌باشد (این مسئله در شرایط تک تخصیصی می‌باشد). مدل ارائه شده در این مقاله توسط چندین روش ابتکاری برای بالای ۲۵ گره حل گردیده است.

چهارمین مقاله‌ای که درباره این موضوع به چاپ رسیده است توسط کنترراس[۶] (۲۰۱۱) می‌باشد. او در این این مقاله مدل‌های مکانیابی نقاط محوری را بررسی می-کند که بدون محدودیت ظرفیت می‌باشند. در این مقاله مدل هایی بررسی می‌شوند که تقاضا یا هزینه‌های حمل و نقل آنها غیرقطعی است و نشان می‌دهد که اگر تقاضا غیر قطعی باشد و یا هزینه‌های حمل و نقل بصورت وابسته احتمالی باشد ارزش انتظاری معادل آن برای رسیدن به جواب بهینه کافی است و گرنه باید از روش‌های دیگری برای حل مدل استفاده کرد. روشی که نویسنده برای حل مدل استفاده کرده است شبیه سازی مونت کارلو با کمک روش تقریب میانگین نمونه[۷] می‌باشد.

پنجمین مقاله توسط ژای[۸] (۲۰۱۲) ارائه شد. در این مقاله کلاس جدیدی از مسائل برنامه‌ریزی مکان‌یابی دومرحله‌ای احتمالی هاب با معیار مینیمم ریسک که در آن تقاضاهای غیر قطعی توسط بردار تصادفی نشان داده می‌شود، بیان می‌شود. این تحقیق معیار ریسک را برای مسائل احتمالی مکان‌یابی نقاط محوری به کار می‌برد و از تابع هدف احتمالی به عنوان معیار ریسک برای اندازه‌گیری عدم قطعیت استفاده می‌کند. همچنین این مدل با معادل‌سازی به گونه‌ای به مدل برنامه‌ریزی باینری کسری قطعی تبدیل می شود و در نهایت با استفاده از نرم

[۱] Ravi
[۲] Snyder
[۳] Vladimir Marianov
[۴] Yang
[۵] Thaddeus Sim
[۶] Ivan Contreras
[۷] Sample Average Approximation
[۸] Zhai

افزار *Lingo* مسئله حل می‌شود.

جدیدترین مقاله در این زمینه مربوط به یانگ (۲۰۱۳) می‌باشد. این مقاله اولین مقاله‌ای است که مسائل p-هاب را در حالت فازی در نظر می‌گیرد. در این مسئله زمان‌های سفر غیر قطعی و به وسیله بردارهای نرمال فازی مشخص می‌شوند. در این مقاله هدف ماکزیمم کردن زمان‌های سفر فازی می‌باشد و مسئله را به دو زیر مسئله تقریبی تبدیل می‌نماید و نتیجه می‌گیرد که این روش بهبود یافته ترکیبی هم از لحاظ زمان اجرا و هم کیفیت جواب بهتر عمل می‌نماید.

در زمینه مکان‌یابی هاب با بهینه سازی استوار سه مقاله چاپ شده است. اولین مقاله توسط هوانگ[1] (۲۰۱۲) ارائه شده است. او در این مسئله مدلی استوار برای مسئله کمینه کردن مجموع هزینه حمل و نقل بدون در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت ارائه کرده است و مدل را با استفاده از الگوریتم ژنتیک چند هدفه حل کرده است. ماکویی (۲۰۱۲) با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت برای مدل هوانگ مسئله را گسترش داده است. مدل استوار ارائه شده در این مقاله برای یک مثال با استفاده از روش وزن دهی حل شده است. سومین مقاله مسئله جایابی استوار هاب با محدودیت ظرفیت توسط رستمی (۲۰۱۲) ارائه شده است. او نیز در این تحقیق از روش بهینه‌سازی مولوی[2] بهره گرفته است. در نهایت یک مطالعه موردی در در ایران را بررسی کرده و با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی آن را حل نموده است.

در این مقاله مدلی استوار برای مسئله بهینه سازی پوشش جریان هاب در حالتی که هاب‌ها دارای ظرفیت می‌باشند، ارائه می‌شود. این مسئله دارای دو تابع هدف می‌باشد، هدف اول به منظور کمینه کردن هزینه‌های احداث و هزینه‌های حمل و نقل است. جابجایی بین هاب-ها با یک نوع هواپیما در نظر گرفته شده است در نتیجه هزینه‌ی ثابتی دارد. در هدف دوم به بیشینه کردن مطلوبیت هواپیما توجه شده است.

در این مقاله، فرض شده است که مسئله دارای N گره می‌باشد. تعداد هاب‌ها از قبل تعیین نشده است. مسئله مورد بحث دارای دو تابع هدف است. می‌خواهیم تعداد و بهترین مکان های هاب را به گونه‌ای به دست بیاوریم که از یک طرف هزینه حمل و نقل و هزینه تأسیس هاب‌ها در حالت عدم قطعیت کمینه گردد؛ از طرف دیگر، میزان مطلوبیت ماکزیمم گردد.

شبکه بین هاب‌ها را به صورت کامل در نظر می-گیریم؛ بدین معنا که بین هر دو هاب لینکی وجود دارد. هاب‌ها باید به گونه‌ای تأسیس گردند که تمام نقاط غیر هاب را پوشش دهند. در این مسئله حالت سوم محدودیت پوشش را در نظر می‌گیریم که در آن فاصله بین نقاط غیر هاب و هاب از مقداری معین تجاوز نکند. این مسئله به صورت تک تخصیصه در نظر گرفته می‌شود که هر غیر هاب تنها به یک هاب تخصیص داده می‌شود. ظرفیت Q_k برای هر هاب در نظر گرفته شده است. هزینه حمل و نقل بین هاب‌ها در فاکتور α و بین هاب و غیرهاب در صورتی که جریان از غیر هاب به هاب وارد گردد در فاکتور χ و در صورت عکس در فاکتور δ ضرب می‌گردد.

این مدل را برای یک شبکه حمل و نقل هوایی در نظر می‌گیریم که گره‌ها در حقیقت همان فرودگاه‌های شهر می‌باشند که به دنبال یافتن بهترین مکان‌ها برای هاب‌ها و تخصیص فرودگاه‌های غیرهاب به هاب‌ها تحت محدویت پوششی می‌باشد به گونه‌ای که هم هزینه تأسیس هاب‌ها و هم هزینه‌های حمل و نقل مینیمم گردد و هم میزان مطلوبیت ماکزیمم گردد.

حل این مسئله منجر به کاهش مجموع هزینه‌های حمل و نقل شرکت هواپیمایی می‌گردد. با توجه به اینکه هواپیما فاصله‌ی مشخصی را می‌تواند پوشش دهد و تقاضا برای مسافرت به مکان‌های مختلف در فواصل زمانی مختلف در سال متغیر است، از طریق روابط ارائه شده می-توان هاب‌هایی را مشخص کرد که با وجود تغییر تقاضا جواب بهینه را بدهد. در این مسئله فرض شده است که چند نوع هواپیما داریم که هر یک دارای برد متفاوت و هزینه عملیاتی متفاوتی هستند. فرض می‌شود هواپیمایی که ماکزیمم فاصله کمتری را پوشش می‌دهد دارای هزینه عملیاتی پایین‌تر، زمان سفر بیشتر و مطلوبیت پایین است.

[1] Huang
[2] Mulvey

به عبارتی اگر برد هواپیمای یک کمتر از هواپیمای نوع دو باشد $\beta^{2} < \beta^{1}$ آن‌گاه $c_{jk}^{2} < c_{jk}^{1}$ و $\alpha_2 < \alpha_1$ می‌باشد.

مدل سازی مسئله مکانیابی و پوشش جریان هاب دارای ظرفیت

مدل ارائه شده در این مقاله بهره گرفته از مدل لوو و همکاران[1] است، با این تفاوت که در این مسئله برای هاب‌ها ظرفیت در نظر گرفته شده است. همچنین تابع هدف دومی به مسئله اضافه شده است که هم به دنبال ماکزیمم کردن میزان مطلوبیت و هم به دنبال یافتن بهترین مکان‌ها برای هاب‌ها و تخصیص شهرهای غیرهاب به هاب‌ها تحت محدویت پوششی می‌باشد. مطلوبیت هر هواپیما به صورت تابعی از زمان تعریف می‌شود. چون هر دو هواپیما یک فاصله را می‌پیمایند و می‌توان اذعان داشت که مطلوبیت، متناسب با سرعت هواپیما است.

پارامترهای مدل به صورت زیر تعریف شده است:

N تعداد شهرها

W_{ij} میزان جریان بین دو شهر i , j در اینجا تعداد پروازها)

B تعداد انواع هواپیما

O_{is} کل جریان خروجی از گره i در سناریوی s

D_i کل جریان ورودی به گره i

c_{ik}^{p} هزینه عملیاتی هر واحد جریان از گره غیرهاب i به هاب k با استفاده از هواپیمای نوع p ام

d_{ik} فاصله بین گره غیرهاب i و هاب k

B^{p} بیش‌ترین فاصله پرواز برای هواپیمای نوع p ام

F_k هزینه تأسیس هاب k

α_p مطلوبیت هواپیمای نوع p ام که این مطلوبیت بر حسب زمان است

Q_k ظرفیت هاب k

α هزینه حمل و نقل بین هاب‌ها

χ هزینه حمل و نقل بین هاب و غیرهاب در صورتی که جریان از غیر هاب به هاب باشد.

δ هزینه حمل و نقل بین بین هاب و غیرهاب در صورتی که جریان از هاب به غیر هاب باشد.

دو متغیر تصمیم داریم. Z_{ik}^{p} یک متغیر تصمیم می‌باشد که در صورتی که گره غیرهاب i به هاب k توسط هواپیمای نوع p تخصیص یابد برابر ۱ و در غیر این صورت برابر صفر است. در صورتی که Z_{kk}^{p} برابر یک باشد، گره k هاب می‌باشد. متغیر Y_{kl}^{i}، نشان‌دهنده میزان جریان آغاز شده از مبدأ i است که ابتدا به هاب k و سپس به هاب l جریان می‌یابد.

مدل پیشنهاد شده به شرح زیر می‌باشد.

$$\text{Min} \quad \sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{b} F_k Z_{kk}^{p} + \alpha \sum_{i,k,l\in N} c_{kl} Y_{kl}^{i} + \sum_{k\in N}\sum_{p=1}^{b} c_{ik}^{p} Z_{ik}^{p}(\chi O_{is} + \delta D_i)$$

$$MAX \sum_{k\in N}\sum_{i\neq k}\sum_{p\in b} \alpha_p Z_{ik}^{p}$$

subject to:

(۱)

$$\sum_{k\in N}\sum_{p=1}^{b} Z_{ik}^{p} = 1 \qquad \forall i\in N$$

(۲)

$$d_{ik} Z_{ik}^{p} \le B^{p} Z_{kk}^{p} \qquad \forall i,k\in N, p\in$$

(۳)

$$\sum_{p=1}^{b} O_{is} Z_{ik}^{p} = \sum_{j\in N}\sum_{p\in b} W_{ijs} Z_{jk}^{p} + \sum_{l\in N} Y_{kl}^{i} - \sum_{l\in N} Y_{lk}^{i} \qquad \forall i,k\in N$$

(۴)

$$\sum_{l\in N, l\neq k} Y_{kl}^{i} \le \sum_{p\in b} O_{is} Z_{ik}^{p} \qquad \forall i,k\in N$$

(۵)

$$\sum_{i\in N, p\in b} O_{is} Z_{ik}^{p} \le \sum_{p\in b} Q_k Z_{kk}^{p} \qquad \forall k\in N$$

(۶)

$$Y_{kl}^{i} \ge 0 \qquad \forall i,k,l\in N$$

(۷)

$$Z_{ik}^{p} \in \{0,1\} \qquad \forall i,k\in N$$

تابع هدف اول به منظور کمینه کردن هزینه‌های احداث و هزینه‌های حمل و نقل است. جابجایی بین هاب-ها با یک نوع هواپیما در نظر گرفته شده است در نتیجه هزینه‌ی ثابتی دارد. در تابع هدف دوم به بیشینه کردن مطلوبیت هواپیما توجه شده است.

محدودیت اول ایجاب می‌کند که هر شهر غیر هاب دقیقاً به یک شهر هاب با استفاده از یک نوع هواپیما تخصیص داده شود. در محدودیت دوم نوع هواپیمای مورد استفاده با توجه به مسافت بین شهرها و قابلیت هواپیما تعیین می‌گردد. در محدودیت سوم تعادل جریان بین شهرها برقرار می‌گردد. محدودیت چهارم از ایجاد جواب‌ها و مسیرهایی که در شبکه هاب وجود ندارند جلوگیری به عمل می‌آورد. محدودیت پنجم بیانگر ظرفیت هاب

---

[1] T Lowe and T Sim

می‌باشد. به عبارتی این محدودیت بیان می‌کند که کل جریان‌های ورودی به هاب نباید از یک مقدار از پیش تعیین شده که همان ظرفیت هاب می‌باشد، بیشتر باشد. محدودیت شش بیان می‌دارد که میزان جریان بین دو هاب عددی غیر منفی است. محدودیت ۷ نیز باینری بودن متغیر تخصیص غیرهاب به هاب را نشان می‌دهد.

مدل بهینه سازی استوار مسئله مکانیابی و پوشش جریان هاب دارای ظرفیت

تاکنون روش های متعددی برای حل مدل استوار ارائه گردیده است. اولین روش توسط سویستر[1] (۱۹۷۳) ارائه گردید. در این روش بدترین شرایط ممکن به عنوان یک سناریو در نظر گرفته می‌شود و مسئله در بدترین حالت حل می‌گردد، در صورتی که ممکن است بدترین حالت مسئله، احتمال رویداد بسیار کمی داشته باشد. روش بعدی توسط بنتال و نمیروسکی[2] (۱۹۹۹) ارائه شد. در این روش به حل درجه دوم مسئله دست می‌یابیم ولی جواب‌های بدست آمده ساختار یکسانی با اعداد نمونه‌های داده شده ندارند. روشی که ما در این مقاله از آن استفاده می‌کنیم توسط برتسیماس[3] و همکاران (۲۰۰۴) ابداع شده است. او در این روش مدل عدم قطعیت را با یک هنجار جدید که درآن مدل استوار یک مسئله خطی، خطی باقی می‌ماند، در نظر می‌گیرد.

فرض کردیم میزان تقاضا (w_{ij})بین هر جفت مبدأ-مقصد غیر قطعی می‌باشد که در اثر آن O_{is} ها نیز غیر قطعی می‌گردند. بازه های تغییرات O_{is} پایه حل مدل استوار زیر می‌باشد.

پارامترهای $\Gamma1_{ik}, \Gamma2_{ik}$ بیان‌کننده‌ی تعداد متغیرهای نامعلوم O_{is} در هر محدودیت می‌باشد. این پارامترها احتمال تخطی محدودیت‌ها و بدتر شدن تابع هدف را کنترل می‌کند که برتسیماس آن را قیمت استواری نامیده است.

متغیرهای $R1_i$، $R2_i$، $G1_{ik}$ و $G2_{ik}$بیانگر عددی مثبت می‌باشند. $R1_i$ و $R2_i$ متغیرهای مورد نیاز در رابطه با استواری مسئله است تا تحدب سیستم را حفظ نماید.

U_{jk} به گونه‌ای انتخاب می‌شود که اگر جواب بهینه باشد $U_{jk} = |Z_{ik}^{p*}|$ است.

مدل به صورت زیر فرمول‌بندی شده است:

$$\text{Min} \sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{b} F_k Z_{kk}^p + \alpha \sum_{i,k,l\in N} c_{kl} Y_{kl}^i + \sum_{k\in N}\sum_{p=1}^{b} c_{ik}^p Z_{ik}^p (\chi O_{is} + \delta D_i)$$

$$MAX \sum_{k\in N}\sum_{i\neq k}\sum_{p\in b} \alpha_p Z_{ik}^p$$

subject to:

$$\sum_{k\in N}\sum_{p=1}^{b} Z_{ik}^p = 1 \quad \forall i\in N \qquad (۱)$$

$$d_{ik} Z_{ik}^p \le B^p Z_{kk}^p \quad \forall i,k\in N, p\in b \qquad (۲)$$

$$(۳)$$

$$\sum_{p=1}^{b} O_{is} Z_{ik}^p = \sum_{j\in N}\sum_{p\in b} W_{ijs} Z_{jk}^p + \sum_{l\in N} Y_{kl}^i - \sum_{l\in N} Y_{lk}^i \quad \forall i,k\in N$$

$$(۴)$$

$$\sum_{l\in N, l\neq k} Y_{kl}^i - \sum_{p\in b} O_{is} Z_{ik}^p + R1_i + \Gamma1_{ik} G1_{ik} \le 0 \quad \forall i,k\in N$$

$$(۵)$$

$$\sum_{i\in N, p\in b} O_{is} Z_{ik}^p - \sum_{p\in b} Q_k Z_{kk}^p + \sum_i R2_i + \Gamma2_{ik} G2_{ik} \le 0 \quad \forall k\in N$$

$$Y_{kl}^i \ge 0 \quad \forall i,k,l\in N \qquad (۶)$$

$$Z_{ik}^p \in \{0,1\} \quad \forall i,k\in N, p\in b \qquad (۷)$$

$$G1_{ik} + R1_i \ge 0.2\, o_i\, U1_{jk} \qquad (۸)$$

$$G2_{ik} + R2_i \ge 0.2\, o_i\, U2_{jk} \qquad (۹)$$

$$-U1_{jk} \le Z_{ik}^p \le U1_{jk} \qquad (۱۰)$$

$$-U2_{jk} \le Z_{ik}^p \le U2_{jk} \qquad (۱۱)$$

$$G1_{ik}, G2_{ik}, R1_i, R2_i \ge 0 \qquad (۱۲)$$

فرآیند حل

مدل استوار ارائه شده در بخش قبلی، یک برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط چند هدفه[4] است. در ابتدا باید مسئله را به مسئله‌ای با یک تابع هدف تبدیل نماییم. در اینجا، با استفاده از روش وزن‌دهی که یک رویکرد معمول برای حل مدل‌های چند هدفه می‌باشد، می‌توانیم مسئله را با یک تابع هدف جایگزین نماییم. به دلیل این که دو تابع هدف هم مقیاس نیستند، ابتدا آن‌ها را با استفاده از رابطه زیر نرمالیزه می‌نماییم.

$Z_i^{norm} = \dfrac{Z_i - Z_i^*}{Z_i^*}$ ، که Z_i^* مقدار ایده‌ال برای هر تابع هدف است. برای مدل بهینه ارائه شده، دو تابع

---

[1] Soyster

[2] Ben-Tal &Nemirovski

[3] Bertsimas

[4] Multi-Objective Mixed Integer Programming

هدف با معادله زیر جایگزین شده و منجر به تک هدفه شدن مسئله می‌شود.

$$MIN\ Z = w_1 Z_1^{norm} + w_2 Z_2^{norm}$$

که $\sum_i w_i = 1$، $0 \le w_i \le 1$ است. w_i ضرایب وزن برای عناصر تابع هدف داده شده در معادله بالا می‌باشد. در اینجا، تابع هدف دوم را در علامت منفی ضرب نموده تا به تابع هدف مینیمم سازی تبدیل گردد، سپس با استفاده از معادله بالا مسئله را تک هدفه می‌نماییم. حال این مدل تک هدفه با نرم‌افزار *GAMS* حل می‌گردد.

تجزیه و تحلیل نتایج

برای ارزیابی مدل ارائه شده، این مدل به وسیله نرم افزار *GAMS* در سیستمی با مشخصات *Core2duo 2.00 GHz CPU and 4 GB of RAM* اجرا شده است. در این مقاله از مجموعه داده‌های پست استرالیا[1] که توسط ارنست[2] و کریشناموردی[3] (۱۹۹۶) به عنوان پایه برای ساخت موردهای آزمایشی معرفی شده استفاده شده است. در حقیقت، در این مورد، علاوه بر جریان تقاضا و فاصله، ظرفیت‌ها و هزینه‌های ثابت داده شده است. در اینجا، از داده‌های مربوط به ۱۰ و ۲۵ گره بهره گرفتیم. به عبارتی، دو مثال از داده‌های پست استرالیا را در حالت بهینه و استوار حل کرده و جواب‌های آن‌ها را مقایسه کردیم. در مثال اول ۱۰ شهر و در مثال دوم ۲۵ شهر مد نظر ما می‌باشد. مدل ارائه شده باید از بین شهرها، شهرهای مناسب برای ایجاد هاب را انتخاب کند، تخصیص شهرهای دیگر به هاب‌ها را مشخص کند و همچنین نوع هواپیمای مورد نظر را معلوم سازد. در این مثال دو نوع هواپیما قابل استفاده می‌باشد. سرعت هواپیمای نوع دوم ۰/۸ برابر سرعت هواپیمای نوع اول است و به همین ترتیب مطلوبیت این نوع هواپیما نیز به همین نسبت از مطلوبیت هواپیمای نوع اول می‌باشد. بنابراین مقدار مطلوبیت برای هواپیمای نوع ۱ برابر α_1=۲۰۰ و مطلوبیت هواپیمای نوع ۲، $\alpha_2 = 0.8\alpha_1$، در نظر گرفته شده است. برای تخمین سایر پارامترها، از فرمول‌های ارائه شده در مقاله لو وسیم (۲۰۱۲) بهره گرفتیم. $\Delta = 0.3\Delta R^2$ ، که قطر شبکه و $R^1 = 2R^2$ می‌باشد. هواپیمای نوع ۱ برد بیش‌تر و هزینه عملیاتی بالاتری دارد. هزینه‌های حمل و نقل، $c_{ik}^1 = \frac{d_{ik}}{25000}$ و $c_{ik}^2 = (1-\beta)c_{ik}^1$،که β در این‌جا برابر ۰.۲ در نظر گرفته شده است.

داده‌های مربوط به فواصل، جریان بین شهرها، ظرفیت هاب‌ها و هزینه ثابت احداث هاب، ۱۰ گره در ضمیمه آورده شده است. همچنین داده های مربوط به حالت ۲۵ گره در مرجع ۶ آورده شده است. نتایج مربوط به حالت قطعی و استوار را در جدول۱ زیر مشاهده می‌نمایید.

مدل دو هدفه فوق باید از بین شهرها، شهرهای مناسب برای ایجاد هاب را انتخاب و تخصیص شهرهای دیگر به هاب ها را مشخص کند. در جدول ۱ مقادیر بهینه تابع هدف اول و دوم را در حالت قطعی و استوار نشان می‌دهد. همانطور که قبلا گفته شده تابع هدف اول هزینه های احداث و حمل و نقل را حداقل نموده و تابع هدف دوم مطلوبیت هواپیما را حداکثر نموده است. در حالت اول با در نظر گرفتن۱۰ شهر، مقدار بهینه تابع هدف اول در حالت استوار بیشتر از حالت قطعی و مقدار بهینه تابع هدف دوم در هر دو حالت استوار و قطعی برابر هستند و شهر مناسب برای ایجاد هاب ۳و ۶ می‌باشد. در حالت دوم با در نظر گرفتن ۲۵ شهر، مقدار بهینه تابع هدف اول در حالت استوار بیشتر از حالت قطعی و مقدار بهینه تابع هدف دوم در حالت قطعی بیشتر از حالت استوار است و شهر مناسب برای ایجاد هاب در حالت قطعی ۸ و ۱۸و در حالت استوار ۸ و۱۴و۱۸ است. اگر مقادیر بهینه را با در نظر گرفتن هر دو تابع هدف در نظر بگیریم، همانطور که مشاهده می‌شود در ۱۰ شهر به میزان ۰.۰۰۷درصد تابع هدف در حالت استوار بیشتر می‌باشد و در ۲۵ شهر به میزان ۰.۰۲۲ درصد تابع هدف در حالت استوار بیشتر است. مقادیر متغیرهای y_{kl}^i برای ۱۰ گره در جدول ۲ و برای ۲۵ گره در جدول ۳ زیرآمده است.

[1] AP data
[2] Ernst
[3] Krishnamoorthy

جدول۱: نتایج محاسباتی

گره‌های هاب	مقدار بهینه تابع هدف دوم	مقدار بهینه تابع هدف اول	مقدار بهینه با درنظر گرفتن هر دو تابع	حالت	تعداد گره
۶ و۳	۱	۵۸۴۶۴.۶۲۲	-۰.۰۶۶	حالت قطعی	۱۰
۶ و۳	۱۶۰۰	۵۸۵۸۹.۲۱۹	-۰.۰۰۷	حالت استوار	
۱۸و۸	۴۲۴۰	۱۲۷۴۰۰.۳۹۲	-۰.۰۰۲	حالت قطعی	۲۵
۱۷و۱۴و۸	۴۰۸۰	۱۵۱۳۳۵.۴۴	۰.۰۲۲	حالت استوار	

جدول۲: مقادیر جریان بین هاب‌ها در ۱۰ گره

مسیرها					
حالت استوار			حالت قطعی		
۶	۳		۶	۳	
۱۲۷.۰۸		۱.۳	۱۶۴.۰۷		۱.۳
۱۲۴.۹۲		۲.۳		۸۱.۵۶	۲.۶
۱۵۳.۱۲		۳.۳	۱۹۲.۴۳		۳.۳
	۹۶.۸۶	۴.۶		۶۳.۸۷	۴.۶
۱۵۰.۳۱		۵.۳	۱۷۵.۴۴		۵.۳
	۶۲.۹	۶.۶		۴۴.۴۶	۶.۶
	۴۵۵.۴	۷.۶		۳۷۷.۸۷	۷.۶
	۱۹۰.۱۱۰	۸.۶		۱۴۸.۳۸	۸.۶
۱۲۴.۷		۹.۳	۱۳۶.۶۰۰		۹.۳
	۱۲۲.۷۹	۱۰.۶		۹۷.۸۳	۱۰.۶

نتیجه گیری

در این مقاله مدلی برای مسئله مکان‌یابی و پوشش جریان هاب دارای ظرفیت به منظور کاهش هزینه‌های احداث و هزینه‌های حمل و نقل ارائه شده است. این مدل بهره گرفته از مدل لوو و همکاران است، با این تفاوت که در این مسئله برای هاب‌ها ظرفیت در نظر گرفته شده است. نوآوری این تحقیق نیز در نظر گرفتن ظرفیت برای هاب ها و همچنین ارائه تابع هدفی است که هم به دنبال ماکزیمم کردن میزان مطلوبیت و هم به دنبال یافتن بهترین مکان‌ها برای هاب‌ها و تخصیص شهرهای غیرهاب به هاب‌ها تحت محدویت پوششی می‌باشد. این مدل نیز با روش بهینه سازی استوار و با استفاده از نرم افزار GAMS برای دو حالت قطعی و استوار و با ۲۵ و ۱۰ گره برای شبکه پست استرالیا حل گردیده است. نتایج محاسباتی بدست آمده نیز در جداول ۱،۲ و۳ به نمایش کشیده شده است. تحقیق حاضر شامل محدودیت های زیر می‌باشد:

۱. در این پژوهش، مدل سازی محدود به داده‌های پست استرالیا و حمل و نقل هوایی شده است.
۲. به دلیل حجم زیاد محاسبات و محدودیت اداره پست استرالیا در به اشتراک گذاری اطلاعات، فقط دو هواپیما و همچنین در دو حالت ۱۰ گره و ۲۵ گره مورد بررسی قرار گرفته است.

در این تحقیق دو پارامتر تقاضا و زمان پردازش به صورت غیر قطعی در نظر گرفته شده است که در تحقیقات آتی می‌توان پارامترهای دیگری مانند هزینه تأسیس هاب، هزینه عملیاتی هر واحد جریان از گره غیرهاب را تحت

سناریو در نظر گرفت و مدل بهینـه سـازی اسـتوار جدیـد ارائه شود

جدول۳:مقادیر جریان بین هاب‌ها در۲۵ گره

مسیرها						
حالت استوار				حالت بهینه		
۱۷	۱۴	۸		۱۸	۸	
۱۷.۱۳۰	۱۳.۷۲۰		۱.۸	۲۳.۴۹۰		۱.۸
۵۳.۲۹۰	۳۸.۶۶۰		۲.۸	۷۱.۲۵۰		۲.۸
۲۲.۰۷۰	۱۷.۰۲۰		۳.۸	۲۹.۹۳۰		۳.۸
۲۷.۳۰۰	۳۸.۵۱۰		۴.۸	۴۴.۶۰۰		۴.۸
۱۸.۱۳۰	۲۵.۶۸۰		۵.۸	۲۹.۷۱۰		۵.۸
۳۱.۳۲۰	۱۸.۰۱۰		۶.۸	۳۹.۹۸۰		۶.۸
۵۸.۴۷۰	۳۹.۳۱۰		۷.۸	۷۶.۸۲۰		۷.۸
۳۲.۲۶۰	۴۳.۵۰۰		۸.۸	۵۱.۶۶۰		۸.۸
۱۷.۶۲۰	۲۴.۸۳۰		۹.۸	۲۸.۷۱۰		۹.۸
۱۸.۲۰۰		۱۴.۲۵۰	۱۰.۱۴	۳۲.۰۵۰		۱۰.۸
	۱۳.۰۵۰	۱۵.۴۱۰	۱۱.۱۷		۲۲.۰۴۰	۱۱.۸
۶۱.۸۴۰	۳۱.۳۶۰		۱۲.۸	۷۷.۸۶۰		۱۲.۸
۲۳.۷۴۰		۴۹.۲۵۰	۱۳.۱۴	۳۸.۵۶۰		۱۳.۸
۱۶.۵۷۰		۲۲.۶۵۰	۱۴.۱۴	۲۸.۰۲۰		۱۴.۸
۲۷.۴۸۰		۲۰.۶۹۰	۱۵.۱۴	۴۸.۵۹۰		۱۵.۸
	۳۱.۷۹۰	۳۸.۴۴۰	۱۶.۱۷		۵۴.۳۳۰	۱۶.۸
	۷۴.۲۵۰	۸۷.۶۷۰	۱۷.۱۷		۱۲۴.۰۰۰	۱۷.۸
	۲۸۷.۸۱۰	۲۴۰.۴۴۰	۱۸.۱۷		۳۵۰.۱۴۰	۱۸.۱۸
۱۲۸.۵۲۰		۸۹.۹۹۰	۱۹.۱۴		۱۵۲.۱۹۰	۱۹.۱۸
۴۰.۳۰۰		۲۸.۹۸۰	۲۰.۱۴		۴۸.۷۷۰	۲۰.۱۸
	۱۱.۱۸۰	۱۳.۱۸۰	۱۲.۱۷	۲۷.۱۶۰		۲۱.۸
	۲۴.۶۳۰	۲۹.۵۶۰	۲۲.۱۷		۴۱.۸۹۰	۲۲.۱۸
۶۷.۸۲۰		۴۱.۰۸۰	۲۳.۱۴		۶۴.۰۶۰	۲۳.۱۸
۳۹.۶۴۰		۲۵.۶۷۰	۲۴.۱۴		۴۰.۹۶۰	۲۴.۱۸
۵۳.۸۱۰		۳۷.۶۵۰	۲۵.۱۴		۶۳.۷۲۰	۲۵.۱۸

.

منابع و مراجع

۱. Ben-Tal, A., Nemirovski, A. (۱۹۹۹). Robust solutions to uncertain programs. Operations research. ۲۵, ۱-۱۳.

۲. Bertsimas, D., Sim, M. (۲۰۰۴). The price of robustness. Operations research. ۵۲(۱), ۳۵-۵۳.

۳. Campbell, F. J. (۱۹۹۴). Integer programming formulations of discrete hub location problems. European Journal of Operational Research. ۷۲, ۳۸۷-۴۰۵.

۴. Contreras, I., Cordeau, J.-F., Laporte, G. (۲۰۱۰). Benders Decomposition for Large-Scale Uncapacitated Hub Location. Techincal Report CIRRELT. ۲۶, ۳۲-۳۶.

۵. Ermoliev, Y. M., Leonardi, G. (۱۹۸۲). Some proposals for stochastic facility location models. Mathematical Modelling. ۳, ۴۰۷-۴۲۰.

۶. Ernst, AT., Krishnamoorthy, M. (۱۹۹۶). Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. Location Science. ۴(۳), ۱۳۹–۱۵۴

۷. Huang, J., Wang, Q. (۲۰۰۹).Robust Optimization of Hub-and-Spoke Airline Network Design Based on Multi-Objective Genetic Algorithm. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology. ۹, ۸۶-۹۲.

۸. Louveaux, F. (۱۹۸۶). Discrete stochastic location models. Annals of Operations Research. ۲ , ۲۳–۳۴.

۹. Lowe, T. J., Sim, T. (۲۰۱۲). The Hub covering flow problem. Journal of the Operational Research Society. ۶۴(۷), ۹۷۳-۹۸۱.

۱۰. Makui, A., Rostami, M., Jahani, E., Nikui, A. (۲۰۱۲). A multi-objective robust optimization model for the capacitated P-hub location problem under uncertainty. Management Science Letters. ۲, ۵۲۵–۵۳۴.

۱۱. Marianov, V., Serra, D. (۲۰۰۳). Location models for airline hubs behaving as M/D/c queues. Computers and Operations Research. ۳۰, ۹۸۳–۱۰۰۳.

۱۲. Ravi, R., Sinha, A. (۲۰۰۶). Hedging uncertainty: Approximation algorithms for stochastic optimization problems. Mathematical Programming Series A. ۱۰۸, ۹۷–۱۱۴.

۱۳. Rostami,M., Farahani, E.M, Moradinezhad, D. (۲۰۱۲). A Stochastic Capacitated P-hub Location Problem: A Case Study of Iran. ۸(۱۱), ۶۲۰-۶۲۸.

۱۴. Snyder, L.V. (۲۰۰۶). Facility location under uncertainty: A review. IIE Transactions. ۳۸,۵۳۷–۵۵۴.

۱۵. Soyster, A. L. (۱۹۷۳). Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. Oper Res. ۲۱, ۱۱۵۴-۱۱۵۷.

۱۶. Thaddeus, S., Timothy, J., Barrett, W. (۲۰۰۹). The stochastic p-hub center problemwith service-level constraints. Computers&OperationsResearch. ۳۲ , ۳۱۶۶-۳۱۷۷.

۱۷. Yang, K., Liu, Y., Yang,G. (۲۰۱۳). An improved hybrid particle swarm optimization algorithm for fuzzy p-hub center problem. Computers & Industrial Engineering.۶۴, ۱۳۳-۱۴۲.

۱۸. Yang, T.-H. (۲۰۰۹). Stochastic air freight hub location and flight routes planning.

Applied Mathematical Modeling. ۳۳ (۱۲), ۴۴۲۴–۴۴۳۰.

۱۹. Zhai, H., Liu, Y. Chen, W. (۲۰۱۲). Applying Minimum-Risk Criterion to Stochastic Hub Location Problems. Procedia Engineering. ۲۹, ۲۳۱۳–۲۳۲۱.

ضمائم:

جدول۴: هزینه عملیاتی هر واحد جریان از گره غیرهاب i به هاب k با استفاده از هواپیمای نوع یک و دو

هواپیما شماره یک										
C_{ik}^{p}	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۰									
۲	۰.۷۹۸۴۴۲	۰								
۳	۰.۶۲۷۸۰۸	۰.۸۰۷۶۵۳	۰							
۴	۰.۹۲۹۸۹۸	۰.۵۰۳۸۱۶	۰.۵۴۹۷۱۳	۰						
۵	۰.۹۲۱۸۶۵	۰.۹۸۲۱۵۵	۰.۲۹۴۶۷۴	۰.۵۷۸۶۶۵	۰					
۶	۱.۲۱۴۸۵۳	۰.۷۵۲۵۲۹	۰.۷۴۶۸۵۷	۰.۲۹۶۰۲۹	۰.۶۵۴۲۷۹	۰				
۷	۱.۲۶۳۱۱۹	۱.۱۹۴۹۷۳	۰.۶۳۵۶۲۶	۰.۷۱۱۰۶۷	۰.۳۴۵۰۸۸	۰.۶۲۹۸۴۸۶۵۲	۰			
۸	۱.۳۰۹۷۳۳	۱.۰۱۷۰۱۶	۰.۷۳۱۸۶۳	۰.۵۱۴۹۹	۰.۵۲۱۸۹۵	۰.۳۱۷۰۴۹۳۸	۰.۳۵۱۳۶۵	۰		
۹	۱.۴۳۲۷۶۷	۱.۵۲۹۹۱۲	۰.۸۳۵۰۱	۱.۰۷۱۹۹۷	۰.۵۶۴۶۳۲	۱.۰۱۴۲۲۰۳۶۴	۰.۳۸۴۳۷۶	۰.۷۲۶۳۳۱	۰	
۱۰	۱.۴۴۱۳۱	۱.۲۲۲۳۱۷	۰.۷۱۸۵۱۴	۰.۷۱۸۵۱۴	۰.۵۶۶۳۵۲	۰.۵۲۹۸۳۲۰۸۲	۰.۲۶۸۰۶۱	۰.۲۱۴۱۳۵	۰.۵۷۹۰۱۲	۰
هواپیما شماره دو										
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۰									
۲	۰.۶۳۸۷۵۴	۰								
۳	۰.۵۰۲۲۴۶	۰.۶۴۶۱۲۲	۰							
۴	۰.۷۴۳۹۱۸	۰.۴۰۳۰۵۳	۰.۴۳۹۷۷۱	۰						
۵	۰.۷۳۷۴۹۲	۰.۷۸۵۷۲۴	۰.۲۳۵۷۳۹	۰.۴۶۲۹۳۲	۰					
۶	۰.۹۷۱۸۸۲	۰.۶۰۲۰۲۳	۰.۵۹۷۴۸۵	۰.۲۳۶۸۲۳	۰.۵۲۳۴۲۳	۰				
۷	۱.۰۱۰۴۹۵	۰.۹۵۵۹۷۹	۰.۵۰۸۵۰۱	۰.۵۶۸۸۵۴	۰.۲۷۶۰۷	۰.۵۰۳۸۷۸۹۲۲	۰			
۸	۱.۰۴۷۷۸۷	۰.۸۱۳۶۱۳	۰.۵۸۵۴۹	۰.۴۱۱۹۹۲	۰.۴۱۷۵۱۶	۰.۲۵۴۱۶۳۹۵	۰.۲۸۱۰۹۲	۰		
۹	۱.۱۴۶۲۱۳	۱.۲۲۳۹۳	۰.۶۶۸۰۰۸	۰.۸۵۷۵۹۸	۰.۴۵۱۷۰۶	۰.۸۱۱۳۷۶۲۹۱	۰.۳۰۷۵۰۱	۰.۵۸۱۰۶۴	۰	
۱۰	۱.۱۵۳۰۴۸	۰.۹۷۷۸۵۴	۰.۶۶۳۶۵۹	۰.۵۷۴۸۱۱	۰.۴۵۳۰۸۱	۰.۴۲۳۸۶۵۶۶۶	۰.۲۱۴۴۴۹	۰.۱۷۱۳۰۸	۰.۴۶۳۲۱	۰

جدول۵: میزان جریان بین دو شهر iو j

W_{ij}	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۷۵.۴۵	۳۶.۹۹	۵ .۵۴	۱۹.۲۶	۲۰.۰۹	۱۷.۶۵	۵۶.۷۱	۱۷.۰۸	۱۸.۸۳	۱۶.۳۸
۲	۲۵.۷۹	۳۸.۳۷	۲۴.۹۹	۲۶.۵۸	۱۸.۳	۲۳.۱۷	۳۸.۱۶	۲۰.۴۱	۱۲.۴۸	۱۶.۰۶
۳	۶۶.۸۱	۳۹.۳۱	۵۱.۱۸	۲۲.۴	۲۴.۲	۲۰.۵۱	۷۰.۵۵	۲۰.۲۴	۲۳	۱۹.۴۲
۴	۱۷.۳۳	۳۳.۱۱	۱۸.۷۶	۲۴.۹	۱۶.۳۶	۲۲.۹۲	۴۰.۱۶	۲۳.۱۴	۱۱.۴۲	۱۸.۶۷
۵	۱۷.۴۹	۲۵.۱۳	۲۱.۱۸	۱۹.۰۹	۲۳.۴۸	۱۸.۳	۷۳.۴۱	۲۰.۰۸	۲۳.۸۸	۱۹.۴۳
۶	۱۱.۶۱	۱۸.۴۴	۱۲.۱۷	۱۶.۱۱	۱۱.۱۲	۱۶.۹۴	۳۷.۱۶	۲۱.۸۲	۹.۵۶	۱۸.۰۶
۷	۸۲.۳۷	۷۷.۵۳	۹۰.۴۴	۶۷.۷۹	۹۵.۰۶	۷۲.۶۴	۳۱۲.۲۵	۹۸.۸۲	۱۱۰	۱۱۰.۳۶
۸	۳۵.۱۴	۴۱.۷۳	۳۶.۳	۴۸.۴۱	۳۵.۷۱	۵۷.۵۸	۱۷۳.۳۷	۸۹.۹۴	۴۱.۲۳	۹۱.۸۳
۹	۱۲.۲	۱۱.۹	۱۵.۳۵	۱۰.۲۳	۱۸.۹۴	۱۱.۱۶	۶۷.۸۸	۱۵.۰۶	۲۳.۶۲	۲۰.۳۷
۱۰	۲۱.۷۱	۲۴.۹۶	۲۲.۸۱	۲۷.۷۹	۲۳.۰۶	۳۲.۸۹	۱۰۹.۰۹	۵۰.۸۵	۳۰.۲۵	۶۳.۳۲

جدول ۶: هزینه ثابت و ظرفیت در۱۰ گره

گره	هزینه ثابت k (F_k)	ظرفیت هاب(Q_k) k
۱	۷۴.۲۸۷۶۶	۵۳.۲۱۹۸
۲	۷۶.۲۸۳۷۶	۷۱.۶۱۰۶
۳	۲۴.۲۹۷۷۴	۵۹.۲۲۲۶
۴	۳۳.۲۴۳۰۱	۴۷.۴۵۱۵
۵	۴۶.۲۵۸۵۳	۷۱.۴۴۲۳
۶	۸۷.۲۰۷۶۲	۰۳.۵۷۴۸
۷	۳۶.۳۴۱۶۶	۳۴.۶۱۰۹
۸	۲۱.۳۳۸۵۹	۹۸.۶۴۲۵
۹	۸۹.۲۴۷۱۷	۰۴.۴۷۴۰
۱۰	۴۳.۳۳۶۸۶	۵۵.۶۲۳۸

جدول۷:فاصله بین گره غیر هاب i و هاب k

D_{ik}	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۰									
۲	۱۹۹۶۱.۰۶	۰								
۳	۱۵۶۹۵.۲	۲۰۱۹.۳۳	۰							
۴	۲۳۲۴۷.۴۵	۱۲۵۹۵.۳۹	۱۳۷۴۲.۸۳	۰						
۵	۲۳۰۴۶.۶۲	۲۴۵۵۳.۸۸	۷۳۶۶.۸۵۵	۱۴۴۶۶.۶۱	۰					
۶	۳۰۳۷۱.۳۲	۱۸۸۱۳.۲۲	۱۸۶۷۱.۴۲	۷۴۰۰.۷۱۵	۱۶۳۵۶.۹۷	۰				
۷	۳۱۵۷۷.۳۳	۲۹۸۷۴.۳۴	۱۵۸۹۰.۶۵	۱۷۷۷۶.۶۸	۸۶۲۷.۱۹	۱۵۷۴۶.۲۲	۰			
۸	۳۲۷۴۳.۳۳	۲۵۴۲۵.۴۱	۱۸۲۹۶.۵۸	۱۲۸۷۴.۷۶	۱۳۰۴۷.۳۷	۶۲۳.۷۹۴۲	۸۷۸۴.۱۱۵	۰		
۹	۳۵۸۱۹.۱۶	۳۸۲۴۷.۸	۲۰۸۷۵.۲۶	۲۶۷۹۹.۹۴	۱۴۱۱۵.۸۱	۲۵۳۵۵.۵۱	۹۶۰۹.۳۹۹	۱۸۱۵۸.۲۶	۰	
۱۰	۳۶۰۳۲.۷۴	۳۰۵۵۷.۹۴	۲۰۷۳۹.۳۵	۱۷۹۶۲.۸۵	۱۴۱۵۸.۸	۱۳۲۴۵.۸	۶۷۰۱.۵۲۸	۵۳۵۳.۳۶۴	۱۴۴۷۵.۳۱	۰