

بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده با ورودی ها و خروجی های بازه ای در تحلیل پوششی داده ها

مهدی فلاح جلو دار

گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد آیت الله آملی، آمل، ایران
پست الکترونیکی: mehdi.fallah_jelodar@yahoo.com

چکیده

مدلهای اساسی تحلیل پوششی داده ها به گونه ای طراحی شده اند که مقادیر شاخص های ورودی و خروجی باید در آنها مشخص و معلوم باشند. به عبارت دیگر این مدلها برای در نظر گرفتن داده های نادقیق، بازه ای، فازی، قضاوتی و ... مورد استفاده قرار نمی گیرند. در این مقاله قصد بر آن است تا ضمن مروری بر تحقیقات گذشته در تعیین کارایی واحدهایی که دارای داده های بازه ای هستند و بیان نقاط ضعف و قوت آنها، روشی برای تعیین بازده به مقیاس واحدهای بازه ای ارائه نماییم.

واژه های کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، داده های بازه ای، بازده به مقیاس

مقدمه

کوپر^۵ و همکاران (۱۹۹۹ و ۲۰۰۱) بر طبق شواهد، قرائن و مستندات که در اختیار ماست، اولین محققینی بودند که در مورد داده های نا دقیق مانند داده های کراندار، داده های وصفی و داده های کراندار نسبی در DEA تحقیق نموده اند. مدل DEA به دست آمده، مدل DEA نا دقیق یا IDEA نامیده شد. مدل مذکور حاصل تبدیل یک مساله برنامه ریزی غیر خطی به یک مساله برنامه ریزی خطی با بهره جستن از یک سری تبدیل مقیاس و تغییر متغیر می باشد. نمره کارایی نهایی هر DMU به طرز رضایت بخشی کوچکتر یا مساوی یک تعیین گردید.

کیم^۶ و همکاران نیز (۱۹۹۹) از تبدیل مقیاس و تغییر متغیر مشابهی برای این کار استفاده نمودند. ولی آن داده های بازه ای را به حالت قابل شمارش تبدیل نمودند. لی^۷ و همکاران (۲۰۰۲) ایده IDEA را مدل جمعی توسعه دادند. آنها ادعا کردند که مدل

پیشنهادی توسط کوپر و همکاران مدل های DEA را پیچیده می کنند و دلیل آن تعداد زیادی تبدیل مقیاس و تغییر متغیر در مدل آنها بود. عبارت دیگر تغییر متغیر پیشنهادی توسط کوپر و همکاران تعداد متغیرهای تصمیم مساله را بطور تامل برانگیزی از $m + s$ به $(m + s) \times n$ افزایش می دهد که در s, m و n به ترتیب تعداد ورودی ها، خروجی ها و DMU ها می باشد. هم چنین تغییر و تبدیل مقیاس صورت گرفته در مدل کوپر و همکاران داده های واقعی و نیز داده های نا دقیق شامل داده های ترجیحی و داده های بازه ای (داده های کراندار) را به قید تبدیل می کند. که این موضوع باعث افزایش مضاعف در میزان محاسبات خواهد شد.

امروزه تحلیل پوششی داده ها^۱ (DEA) بعنوان ابزاری مناسب و موثر در مدیریت و تئوری تصمیم گیری، اولین بار توسط چارنر و همکاران (۱۹۷۸) معرفی گردید و تا کنون بطور شگفت انگیزی در مبانی نظری و مدل سازی و همچنین توسعه آن در مباحث کاربردی پیشرفت زیادی داشته است.

مدل های اساسی DEA همچون CCR^۲ و BCC^۳ و نظایر آن با داده های نا دقیق کار نمی کنند. در حقیقت در تمام این مدل ها فرض بر این است که همه ورودی ها و خروجی ها به طور دقیق و قطعی معین و مشخص هستند. به هر جهت این موضوع در مسائل حقیقی و کاربردی جهان پیرامون ما نمی تواند درست باشد. از مواردی که در آن داده های نا مشخص به کار می روند، می توان به DEA با داده های نا دقیق به خصوص زمانی که مجموعه ای از واحد های تصمیم گیرنده^۴ (DMU) مسایل داده های از دست رفته، داده های قضاوتی، داده های پیشگویانه یا اطلاعات وصفی اشاره نمود. در حالت کلی داده های نا مشخص و داده های نا دقیق را می توان در زمره اعداد بازه ای یا اعداد فازی قرار داد. بنابراین چگونگی ارزیابی و مدیریت مجموعه ای از واحد های تصمیم گیرنده با اطلاعات بازه ای یا فازی از مسایل و مباحث سنگین تحقیقاتی می باشد. همه این موارد نشانگر لزوم توسعه مدل های DEA در زمینه مبانی نظری و کاربرد های واقعی آن می باشد.

^۵ Cooper
^۶ Kim
^۷ Lie

^۱ Data Envelopment Analysis
^۲ Charnes, Cooper and Rhodes
^۳ Banher, Charnes and Cooper
^۴ Decision Making Unit

بازه ورودی و خروجی فقط یک ورودی و خروجی را انتخاب نماید که این موضوع باعث شد تا مقدار زیادی از اطلاعات واحد تحت ارزیابی از دست بروند. البته لازم به ذکر است که آنها هم چنان بر نظریه قبلی یعنی استفاده از امکان تولید های مختلف (قیود متفاوت) باقی ماندند. شایان ذکر است که مدل پیشنهادی توسط انتانی و همکاران دارای تفاوت هایی با سایر مدل های DEA بازه ای دارد.

از آن جمله که در مدل های پیشنهادی آنها از بدترین نمره کارایی که بر اساس نا مطلوب ترین نقطه بازه ورودی و خروجی بدست آمده است به عنوان نمره کارایی کل بازه استفاده نمودند. (منظور از نا مطلوب ترین نقطه بازه زمانی است که DMU مورد نظر دارای بیشترین ورودی و کمترین خروجی باشد). در حالی که سایر مدل های DEA بازه ای از بهترین نمره کارایی در نامطلوب ترین نقطه بازه به عنوان کران پایین کارایی بعنوان معیاری برای ارزیابی استفاده نمودند. مدل های پیشنهادی دارای معانی و تفاسیر و کاربردهای متفاوتی هستند. مدل انتانی قابلیت استفاده در حالتی که داده ها ثابت، بازه ای و یا فازی هستند را داراست ولی سایر مدل های DEA بازه ای فقط از داده های بازه ای استفاده می کنند و نمی توانند از داده های ثابت استفاده کنند.

وانگ^(۱) و همکاران (۲۰۰۵) استفاده از امکان تولید های متفاوت و قیود مختلف در ارزیابی را یک نقطه ضعف عمده مدل های DEA بازه ای معرفی کردند. در این راستا با استفاده از داده های بازه ای و فازی امکان تولید ثابتی برای ارزیابی همگن همه واحد های تحت ارزیابی معرفی کرده اند. نقاط قوت و ضعف هر یک از روشها در بخش آینده به تفصیل بحث خواهد شد.

دسپوتیز و اسمیرلیس^۱ (۲۰۰۲) نیز در مطالعه IDEA اثر گذار بودند. آنها روش جایگزینی برای در نظر گرفتن داده های نا دقیق ارائه نمودند. ایده آنها مبتنی بر تبدیل یک مدل DEA غیر خطی به یک مساله برنامه ریزی خطی معادل با اضافه نمودن فقط تبدیلات مربوط به متغیرها بود. نمره کارایی بدست آمده به صورت بازه ای در نظر گرفته شد. بر اساس تحقیقات آنها، حقیقت و خرم (۲۰۰۴) مساله حداقل و حداکثر تعداد واحد های DEA کارا را مطالعه نمودند. هم چنین جهان شاه لو و همکاران (c) و (۲۰۰۴a) در مورد مسایل مرتبط مانند بازده به مقیاس^۲، تحلیل حساسیت و پایداری^۳ و نیز کارایی FDH^۴ مطالعه نمودند. ولی همانگونه که در قسمت بعدی به طور مفصل به آن خواهیم پرداخت مدل های استفاده شده توسط آنها از امکان تولید های متغیر و متفاوت استفاده می نماید. بعبارت دیگر مجموعه های متفاوتی از قیود برای ارزیابی نمره کارایی DMU ها بکار می رود که این امر مقایسه نسبی واحد ها را بی معنی می کند.

انتانی^۵ و همکاران (۲۰۰۲) یک مدل DEA بر اساس اساس بهترین و بدترین شرایط در کارایی بازه ای معرفی نمودند. مدل آنها ابتدا برای داده های ثابت طراحی شده بود ولی سپس به حالت داده های بازه ای و داده های فازی توسعه داده شد. در حالت تئوری به نظر می رسد که مدل آنها مدل مناسبی برای در نظر گرفتن داده های بازه ای و داده های فازی باشد. بعد ها مشخص شد که مدل پیشنهادی دارای نقاط ضعف نیز هست. از جمله نقاط ضعف و ابهامات موجود در این مدل آن است که آنها از میان

^۱ Despotis and Smirlis

^۲ Return to Scale

^۳ Sensitivity and Stability Analysis

^۴ Free Disposability Hull

^۵ Entani

همچنین در بازه فوق $x_{ij}^l \geq 0$ و $y_{rj}^l \geq 0$ به ازای هر i, j, r .

استفاده از مدل (۱) برای چنین داده هایی ناممکن است. دسپوتی و همکاران (۲۰۰۲)، ابتدا ورودی ها و خروجی های نا دقیق را به صورت زیر تعریف نمودند:

$$x_{ij} = x_{ij}^l + \delta_{ij} (x_{ij}^u - x_{ij}^l), \quad 0 \leq \delta_{ij} \leq 1, \quad \forall i, j$$

$$y_{rj} = y_{rj}^l + t_{rj} (y_{rj}^u - y_{rj}^l), \quad 0 \leq t_{rj} \leq 1, \quad \forall r, j \quad (3)$$

با اضافه نمودن تبدیلات (۳) در مدل (۱) این مدل به یک مدل برنامه ریزی غیر خطی تبدیل خواهد شد. برای تبدیل آن به

یک مساله برنامه ریزی خطی تغییر متغیر زیر اعمال می شود.

$$q_{ij} = \delta_{ij} \cdot v_i, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m$$

$$p_{rj} = t_{rj} \cdot u_r, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, s \quad (4)$$

بنابراین مدل غیر خطی به مساله برنامه ریزی خطی زیر تبدیل می گردد:

$$\text{Max } \sum_{r=1}^s (u_r y_{rp}^l + (y_{rp}^u - y_{rp}^l) P_{rp})$$

$$\text{S.t: } \sum_{i=1}^m (v_i x_{ip}^l + (x_{ip}^u - x_{ip}^l) q_{ip}) = 1$$

$$\sum_{r=1}^s (u_r y_{rj}^l + (y_{rj}^u - y_{rj}^l) P_{rj}) - \sum_{i=1}^m (v_i x_{ij}^l + (x_{ij}^u - x_{ij}^l) q_{ij}) \leq 0,$$

$$j = 1, \dots, n \quad (5)$$

$$q_{ij} - v_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

$$P_{rj} - u_r \leq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

در نهایت توجه به این نکته ضروری است که قرار داشتن ورودی ها و خروجی ها در یک بازه به معنی مجهول و متغیر بودن آنها نمی باشد، بلکه به این مفهوم است که محدوده تغییر ورودی ها و خروجی ها مشخص است ولی از مقدار دقیق آنها اطلاع نداریم. با این تفاسیل به معرفی مدل های DEA می پردازیم.

مدل های DEA بازه ای

فرض کنید n واحد تصمیم گیرنده برای ارزیابی در اختیار هستند. هر DMU از m ورودی متفاوت برای تولید s خروجی متفاوت استفاده می نماید. بعبارت دیگر DMU_j که در آن $j = 1, \dots, n$ از ورودی های $X_j = (x_{ij}, i = 1, \dots, m)$ برای تولید خروجی های $Y_j = (y_{rj}, r = 1, \dots, s)$ برای ارزیابی DMU_p که $p \in \{1, \dots, n\}$ از مدل زیر استفاده می شود:

$$\text{Max } \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}$$

$$\text{S.t } \sum_{i=1}^m v_i x_{ip} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

بدون اینکه به کلیت موضوع خللی وارد شود فرض کنید داده های ورودی و خروجی نتوانند بصورت دقیق معرفی شوند. دلیل این موضوع عدم وجود اطمینان در معرفی داده های مربوط می باشد. فقط می دانیم این داده ها توسط کران های بالا و پایین بوسیله بازه های زیر تعریف می شوند:

$$x_{ij} \in [x_{ij}^l, x_{ij}^u], \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m$$

$$y_{rj} \in [y_{rj}^l, y_{rj}^u], \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, s$$

(۲)

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l \leq 0, \quad j=1, \dots, n, \quad j \neq p \quad (7)$$

$$u_r \geq 0, \quad r=1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m$$

در مدل‌های فوق θ_p^l و θ_p^u به ترتیب بهترین کارایی نسبی ممکن برای مطلوب‌ترین و نا مطلوب‌ترین وضعیت DMU_p تحت ارزیابی است. مدل (۶) در حالتی است که DMU_p در مطلوب‌ترین شرایط خود می‌باشد و سایر واحدها در نا مطلوب‌ترین شرایط خود به سر می‌برند. هم‌چنین در مدل (۷) وضعیت برعکس است. یعنی DMU_p (واحد تحت ارزیابی) در نا مطلوب‌ترین شرایط وضعیت خود و سایر واحدها در مطلوب‌ترین وضعیت خود می‌باشند. منظور از مطلوب‌ترین شرایط زمانی است که واحدهای مورد نظر در بازه‌های ورودی خود کمترین مقدار و در بازه‌های خروجی خود بیشترین مقدار را اخذ نموده باشند. منظور از نامطلوب‌ترین شرایط زمانی است که واحد مورد نظر در بازه‌های ورودی بیشترین مقدار و در بازه‌های خروجی خود کمترین مقدار را اخذ نموده باشد. حال به بررسی کارایی مدل‌های DEA بازه‌ای می‌پردازیم. در این راستا تعریف ۳ مجموعه در دستور کار قرار می‌گیرد:

(۱) E^{++} : مجموعه تمام واحدهایی است که با هر ترکیب ورودی و خروجی خود کارا باشد. اگر بخواهیم مفهوم E^{++} را با استفاده از مدل‌های (۶) و (۷) بیان کنیم این مجموعه مسایل تمام اعضای است که $\theta_j^* = 1$ و بالتبع $\theta_j^{*u} = 1$ عبارت دیگر:

$$E^{++} = \{j; \theta_j^* = 1\}$$

(۱) E^+ : مجموعه تمام واحدهایی است که در بهترین شرایط خود کارا هستند. با استفاده از

$$u_r \geq 0, \quad r=1, \dots, s$$

$$q_{ij} \geq 0, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n$$

$$P_{rj} \geq 0, \quad r=1, \dots, s, \quad j=1, \dots, n$$

در مدل فوق اگر $q_{ij} = P_{rj} = 0$ باشد به ازای تمام i, j, r در این صورت تمام داده‌ها مشخص و ثابت هستند. همه مدل‌های فوق را براحتی می‌توان به مدل BCC نیز تعمیم داد. به عبارت دیگر با کسر u_0 از تابع هدف و دسته‌بندی دوم این مهم حاصل خواهد شد

دسپوتی و همکاران (۲۰۰۶)، برای سهولت در امر ارزیابی و استفاده از مدل‌های بازه‌ای، جفت مسایل برنامه‌ریزی خطی زیر را معرفی نمودند. توجه به این نکته ضروری است که ایده مورد استفاده در مدل‌های پیشنهادی همان ایده بکار رفته در مدل (۵) می‌باشد:

$$\text{Max } \theta_p^u = \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^u$$

$$\text{S.t: } \sum_{i=1}^m v_i x_{ip}^l = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^u - \sum_{i=1}^m v_i x_{ip}^l \leq 0$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u \leq 0, \quad j=1, \dots, n, \quad j \neq p$$

$$u_r \geq 0, \quad r=1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0, \quad i=1, \dots, m$$

و مدل:

$$\text{Max } \theta_p^l = \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^l$$

$$\text{S.t: } \sum_{i=1}^m v_i x_{ip}^u = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^l - \sum_{i=1}^m v_i x_{ip}^u \leq 0$$

از روابط (۹) مشخص است که θ_j باید یک عدد بازه ای باشد که آن را بصورت $[\theta_j^l, \theta_j^u]$, $j = 1, \dots, n$ می نامیم حال فرض کنید :

$$\theta_j = |\theta_j^l, \theta_j^u| = \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u} \right] \in [0, 1] \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

بنابراین داریم :

$$\theta_j^u = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\theta_j^l = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (11)$$

لذا برای بدست آوردن کران بالا و کران پایین نمرات کارایی مسایل برنامه ریزی کسری زیر پیشنهاد می گردد :

$$\text{Max } \theta_p^u = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ip}^u}$$

$$\text{S.t } \theta_j^u = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u} \leq 1$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (12)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

و نیز

$$\text{Max } \theta_p^l = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^l}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ip}^l}$$

$$\text{S.t } \theta_j^l = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l} \leq 1, j = 1, \dots, n$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (13)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

مدل های (۶) و (۷) ، E^+ مجموعه تمام واحد هایی است $1 \leq \theta_j^+ \leq 1$ و $\theta_j^{++} = 1$ (۲) E^- : مجموعه تمام واحد هایی است که با هر ترکیب ورودی و خروجی خود نا کاراست . عبارت دیگر مجموعه تمام واحد هایی است که $1 \leq \theta_j^{++} \leq 1$ و بالتبع $1 \leq \theta_j^+$.

به تمام واحد هایی که در E^{++} قرار می گیرد واحد های fully efficient گفته می شود .

از مهم ترین ایراداتی که به مدل های پیشین وارد می گردد آن است که در این مدل ها از امکان تولید های متفاوت برای ارزیابی استفاده می شود . عبارت دیگر مجموعه امکان تولید هر واحد تصمیم گیرنده با واحد های دیگر فرق می کند و این موضوع ارزیابی همگن و نسبی واحد های تحت ارزیابی را زیر سوال می برد . به بیان واضح تر اگر n تعداد واحد های تحت ارزیابی باشد در این صورت به تعداد $2n$ مجموعه امکان تولید وجود خواهد داشت . وانگ^۱ و همکاران (۲۰۰۵) موضوع را بصورت زیر بررسی کردند . با توجه به تعریف کارایی می دانیم :

$$\theta_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \quad j=1, \dots, n \quad (8)$$

که θ_j کارایی DMU_j است با توجه به حساب بازه ای روابط زیر را داریم :

$$\theta_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r [y_{rj}^l, y_{rj}^u]}{\sum_{i=1}^m v_i [x_{ij}^l, x_{ij}^u]} = \frac{[\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u]}{[\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l, \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u]}$$

$$= \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u} \right] \quad j = 1, \dots, n \quad (9)$$

^۱ Wang

بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های بازه‌ای

همانگونه که در بخش قبل به آن اشاره شده، پس از ارزیابی واحدهای تصمیم گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های بازه‌ای با استفاده از مدل پیشنهادی دسپوتی و همکاران (۲۰۰۲) واحدهای تحت ارزیابی به سه دسته E^{++} و E^+ و E^- تقسیم شدند. در حقیقت E^{++} مجموعه تمام DMU‌هایی است که با هر ترکیب ورودی و خروجی هایشان کارا هستند. در این نوشتار چنین واحدهایی را کاملاً کارا می‌نامیم. E^+ مجموعه DMU‌هایی است که در بهترین شرایط کارا هستند ولی در برخی سطوح داده هایشان کارا نمی‌باشند. در نهایت E^- مجموعه تمام واحدهایی است که در هر حالت نا کارا هستند. در این فصل قصد بر آن است تا مفهوم بازده به مقیاس (آن چنان که در فصل دوم به آن پرداخته شد) برای چنین واحدهایی توسعه داده شود.

برای این منظور مجدداً فرم مضربی مدل BCC در ماهیت خروجی را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \sum_{r=1}^s u_r y_{rp} - u_0 \\ & \text{s.t:} \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - u_0 \leq 0, \\ & j=1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{ip} = 1 \\ & v_i \geq \varepsilon, i = 1, \dots, m \\ & u_r \geq \varepsilon, r = 1, \dots, s \end{aligned} \quad (16)$$

حال فرض کنید \bar{u}_0 و \underline{u}_0 سوپریموم و اینفیموم u_0 بر روی ناحیه شدنی مساله (۱۶) باشند. در این صورت:

در نهایت با اعمال تبدیلات چارنس-کوپر^۱ (۱۹۶۲) مسایل برنامه ریزی خطی برای تعیین کران بالا و پایین نمرات کارایی بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \theta_p^u = \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^u \\ & \text{S.t } \sum_{i=1}^m v_i x_{ip}^l = 1 \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l \leq 0 \\ & j=1, \dots, n \\ & u_r \geq 0, v_i \geq 0, \forall i, r \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \text{Max } \theta_p^l = \sum_{r=1}^s u_r y_{rp}^l \\ & \text{S.t } \sum_{i=1}^m v_i x_{ip}^u = 1 \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u \leq 0 \\ & j=1, \dots, n \\ & u_r \geq 0, v_i \geq 0, \forall i, r \end{aligned} \quad (15)$$

البته روش پیشنهادی نیز دارای ایرادات اساسی است. از مهمترین آنها می‌توان به استفاده از کران بالا و پایین ورودی‌ها و خروجی‌ها در مدل (۱۵) نام برد که با نفس ارزیابی در تناقض است. در بخش آینده بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های بازه‌ای را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. با توجه به ساختار مدل‌های پیشنهادی در این فصل، مطالعات بعدی بر اساس مدل‌های پیشنهادی دسپوتی و همکاران (۲۰۰۲) معطوف می‌داریم.

^۱ Charnes – Cooper Transformation

$$j=1, \dots, n, j \neq 0$$

$$-(\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}^i + (x_{i_0}^u - x_{i_0}^l)q_{i_0}) + \sum_{r=1}^s u_r y_{r_0}^l + (y_{r_0}^u - y_{r_0}^l)P_{r_0} - u_0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}^i + (x_{i_0}^u - x_{i_0}^l)q_{i_0} = 1$$

$$q_{ij} - v_i \leq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

(۱۸)

$$P_{rj} - u_r \leq 0 \quad , \quad r = 1, \dots, s \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$$, \quad i = 1, \dots, m \quad v_i \geq \varepsilon$$

$$r = 1, \dots, s \quad u_r \geq \varepsilon,$$

مدل فوق تمام سطوح داده ها را در بر می گیرد . دومین قید از مجموعه قیود تضمین کننده آن است که DMU تحت ارزیابی در زمره مجموعه E^{++} قرار دارد . مقدار بهین تابع هدف مساله (۱۸) را با u_0^u نمایش می دهیم که سوپریموم مقادیر مختلف u_0 در ناحیه شدنی مساله (۱۸) است . اگر نوع تابع هدف مساله (۳ - ۴) به Min تبدیل شود مقدار u_0^l بدست می آید که همان اینفیموم u_0 ها روی ناحیه شدنی مساله است . به وضوح $u_0^l \leq u_0^u$ و این مقادیر حدود تغییرات u_0 را بدست می دهد . توجه به نکته ضروری است که مدل (۱۸) شدنی است و مقدار بهین تابع هدف می تواند بی کران باشد . جهانشاهلو و همکاران برای تعیین بازده به مقیاس واحد تمام کارا (E^{++}) تعاریف زیر را بیان نمودند :

۱- اگر $u_0^l \leq 0$ در این صورت DMU تحت

ارزیابی دارای بازده به مقیاس افزایشی است به اصطلاح می گویند . DMU یک IRS است .

۲- اگر $u_0^l \geq 0$ در این صورت DMU تحت

ارزیابی دارای بازده به مقیاس کاهشی است و با یک DRS به حساب می آید .

۱- اگر $u_0^l \leq 0$ در این صورت DMU_p دارای بازده به مقیاس صعودی است .

۲- اگر $u_0 \geq 0$ در این صورت DMU_p دارای بازده به مقیاس نزولی است .

۳- اگر $u_0 \cdot u_0^l \leq 0$. این بدان معناست که واحد تحت ارزیابی دارای بازده به مقیاس ثابت می باشد

بازده به مقیاس بازه ای

حال با این مقایسه قصد داریم تا مفهوم بازده به مقیاس را برای حالتی که داده ها بصورت بازه ای می باشند تعمیم دهیم . برای این منظور مجددا تعاریف ارائه شده در فصل قبل را در نظر بگیرید . مدل BCC بازه ای را بصورت زیر در نظر می گیریم :

$$\text{Max } \sum_{r=1}^s u_r y_{r_0}^l + (y_{r_0}^u - y_{r_0}^l) P_{r_0} - u_0$$

s.t: -

$$(\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}^i + (x_{i_0}^u - x_{i_0}^l)q_{i_0}) + \sum (u_r y_{r_0}^l + (y_{r_0}^u - y_{r_0}^l)P_{r_0}) - u_0 \leq 0, j=1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}^i + (x_{i_0}^u - x_{i_0}^l)q_{i_0} = 1$$

$$q_{ij} - v_i < 0 \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$$P_{rj} - u_r \leq 0 \quad , \quad r = 1, \dots, s \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

(۱۷)

$$, \quad i = 1, \dots, m \quad v_i \geq \varepsilon$$

$$, \quad r = 1, \dots, s \quad u_r \geq \varepsilon$$

$$P_{rj} q_{ij} \geq 0 \quad , \quad r = 1, \dots, s \quad , \quad i = 1, \dots, m \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

برای بررسی بازده به مقیاس جهانشاهلو و همکاران

[۱۰] مدل زیر را پیشنهاد نمودند :

$$\text{Max } u_0$$

S . t :

$$-(\sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}^i - (x_{i_0}^u - x_{i_0}^l)q_{i_0}) + \sum_{r=1}^s u_r y_{r_0}^l + (y_{r_0}^u - y_{r_0}^l)P_{r_0} - u_0 < 0$$

(۲۰)

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l - u_0 \leq 0, \\ j=1, \dots, n, j \neq 0$$

$$v_i, u_r \geq \varepsilon ; \quad r = 1, \dots, s; \\ i = 1, \dots, m$$

با حل مدل‌های (۱۹) و (۲۰) کارایی بازه‌ای واحد‌های تحت ارزیابی محاسبه می‌شوند. به وضوح E^{++} مجموعه واحد‌هایی است که با هر ترکیب ورودی و خروجی کارا هستند. بعبارت دیگر E^{++} مجموعه واحد‌هایی چون DMU_j است که $\theta_j^{*l} = 1$ همچنین E^+ مجموعه واحد‌هایی چون DMU_j است که $\theta_j^{*l} = 1$ و $\theta_j^{*u} < 1$. در نهایت E^- مجموعه تمام واحد‌هایی است که $\theta_j^{*u} < 1$.

یکی از مشکلات اساسی روش جهان‌شاهلو و همکاران این است که در روش ارائه شده توسط آنها فقط بهترین شرایط واحد‌های تمام کارا (E^{++}) در نظر گرفته شده است و در مورد بدترین نقطه و در نهایت در مورد بازده به مقیاس کلی واحد‌های تحت ارزیابی هیچ گفته نشده است. برای پاسخگویی به مشکل فوق و در نهایت برای بدست آوردن نوع بازده به مقیاس واحد‌های E^{++} در بهترین و بدترین شرایط از مدل‌های (۱۹) و (۲۰) استفاده می‌نماییم. برای تعیین بازده به مقیاس چنین واحد‌هایی مدل‌های زیر را حل می‌کنیم:

$$\text{Max } u_0$$

$$\text{S.t: } \sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}^l = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u - u_0 \leq 0, \\ j=1, \dots, n, j \neq 0 \quad (21)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{r_0}^l - \sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}^l - u_0 = 0$$

۳- اگر $u_0^l, u_0^u \leq 0$ در این صورت سطحی از ورودی - خروجی وجود دارد که واحد تحت ارزیابی یک $MPSS$ می‌باشد.

یکی از مهمترین مشکلات مدل فوق آن است که این روش فقط بازده به مقیاس واحد‌های عضو E^{++} و آن هم فقط در بهترین شرایط را مورد ارزیابی قرار می‌دهد. در حقیقت روش فوق‌الذکر هیچ راهکاری برای تعیین بازده به مقیاس واحد‌ها در تمام سطوح داده‌ها ارائه نمی‌کند. هم‌چنین با توجه به مشکلات یاد شده این روش هیچ پیشنهادی برای تعیین بازده به مقیاس کلی یک واحد با ورودیها و خروجی‌های بازه‌ای در اختیار نمی‌گذارد.

در این قسمت بر آن هستیم تا با استفاده از ایده اولیه مدل‌های بازه‌ای بتوانیم بازده به مقیاس واحد‌های بازه‌ای را بدست آوریم. برای این منظور مدل‌های بازه‌ای BCC زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } \theta_0^u = \sum_{r=1}^s u_r y_{r_0}^u - u_0 \\ \text{S.t: } \sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}^l = 1 \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{r_0}^u - \sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}^l - u_0 \leq 0 \quad (19)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u - u_0 \leq 0, \\ j=1, \dots, n, j \neq 0$$

$$v_i, u_r \geq \varepsilon ; \quad r = 1, \dots, s; \\ i = 1, \dots, m$$

و همچنین

$$\text{Max } \theta_0^l = \sum_{r=1}^s u_r y_{r_0}^l - u_0$$

$$\text{S.t: } \sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}^u = 1$$

واحد را بصورت $DRS \rightarrow IRS$ تعریف می‌کنیم. سایر حالات مشابه به همین صورت قابل تعبیر هستند.

مثال کاربردی

در این بخش قصد بر آن است تا با اجرای تعریف فوق بر روی یک مجموعه داده‌ها این روش را بیازماییم. هم‌چنین بر آن هستیم تا نتایج حاصله را با نتایج بدست آمده از روش جهانشاهلو و همکاران مقایسه کنیم. در این راستا مجموعه واحد‌های زیر را با یک ورودی بازه‌ای و یک خروجی بازه‌ای در نظر بگیرید:

جدول ۱: داده‌های بازه‌ای و کلاس آنها

| DMU | ورودی | | خروجی | | کلاس DMU |
|-----|---------|---------|---------|---------|----------|
| | x_j^l | x_j^u | y_j^l | y_j^u | |
| ۱ | ۱/۵ | ۲/۵ | ۳ | ۴ | E^{++} |
| ۲ | ۲/۸ | ۳/۱ | ۷/۵ | ۸ | E^{++} |
| ۳ | ۵ | ۶ | ۱۰/۵ | ۱۱ | E^{++} |
| ۴ | ۱۰ | ۱۲ | ۱۱ | ۱۳ | E^{++} |
| ۵ | ۸/۵ | ۱۱ | ۸/۵ | ۹/۵ | E^- |

همانگونه که از جدول (۱) مشخص است واحد‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ در مجموعه E^{++} قرار می‌گیرند و واحد ۵ در زمره E^- می‌باشد. می‌خواهیم نوع بازه به مقیاس واحد‌های E^{++} را بررسی کنیم. با استفاده از مدل‌های (۴-۶) و (۴-۷) و هم‌چنین روش جهانشاهلو و همکاران بازه به مقیاس واحد‌های E^{++} در جدول زیر خلاصه شده است:

$$v_i, u_r \geq \varepsilon \quad ; \quad r = 1, \dots, s \quad ; \\ i = 1, \dots, m$$

و همچنین:

$$\text{Max } u_0$$

$$\text{S. t. } \sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}^u = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l - u_0 \leq 0, \\ j=1, \dots, n, j \neq 0 \quad (22)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{r_0}^l - \sum_{i=1}^m v_i x_{i_0}^u - u_0 = 0$$

$$r = 1, \dots, s; v_i, u_r \geq \varepsilon \quad ; \\ i = 1, \dots, m$$

فرض کنید u_0^b و u_0^w به ترتیب جوابهای بهین مسایل (۲۱) و (۲۲) باشند. در این صورت تعریف زیر را می‌پذیریم:

تعریف - بازه به مقیاس واحد‌های E^{++} بصورت زیر تعریف می‌شود:

۱- اگر $u_0^b \leq 0$ و $u_0^w \leq 0$ در این صورت DMU_0 را یک واحد IRS (بازده به مقیاس افزایشی) تعریف می‌کنیم.

۲- اگر $u_0^b > 0$ و $u_0^w > 0$ در این صورت DMU_0 یک واحد DRS (بازده به مقیاس کاهش) تعریف می‌کنیم.

۳- اگر $u_0^b = 0$ و $u_0^w = 0$ در این صورت DMU_0 یک واحد CRS (بازده به مقیاس ثابت) تعریف می‌کنیم.

مساله مهم در تعریف فوق زمانی است که علامت u_0^b و u_0^w یکسان نباشد. در چنین حالتی بازده به مقیاس واحد تحت ارزیابی را با توجه به نوع علامت u_0 ها تعریف می‌کنیم. یعنی اگر مثلاً $u_0^w > 0$ و $u_0^b \leq 0$ باشد در این صورت بازده به مقیاس این

جدول ۲: نتایج بازده مقیاس

نتیجه گیری

در این طرح مقاله واحد های تصمیم گیرنده با ورودی ها و خروجی های بازه ای مورد بررسی قرار گرفته اند . یکی از سوالات مهمی که در این راستا مطرح بود ، تعیین بازده به مقیاس واحد های بازه ای می باشد . محققین مشهوری همچون پروفیسور غلامرضا جهانشاهلو و همکاران در این قسمت گام هایی را بر داشته اند . یکی از اساسی ترین ایراداتی که به روش ایشان وارد است این است که آنها فقط بازده به مقیاس واحد ها را در بهترین شرایط محاسبه کرده اند که آن هم منحصر به فرد نیست . برای برطرف کردن این مشکل از مدل های اساسی DEA بازه ای استفاده شده است . در حقیقت قصد ما بر آن بود تا بتوانیم نوع بازده به مقیاس واحد های تحت ارزیابی را در طول کل بازه مورد سنجش قرار دهیم .

| DM U | روش جهانشاهلو | | | روش پیشنهادی | | |
|---------|---------------|---------|---------|--------------|-------------|-----|
| | U_0^L | U_0^U | RTS | $U_0^{W^+}$ | $U_0^{E^+}$ | RTS |
| ۱ | ۱ | ۰.۲۱۶ | S → DRS | ۰.۱۸۸ | ۰.۲۱۶ | IRS |
| ۲ | ۰.۱۸۸ | ۰.۲۱۶ | S → DRS | ۰.۱۸۸ | ۰.۲۱۶ | DRS |
| ۳ | ۰.۲۱۶ | +∞ | DRS | ۰.۲ | ۰.۲۱۶ | DRS |
| ۴ | ۰.۲۱۶ | +∞ | DRS | +∞ | +∞ | DRS |

اصولا تمام روش های موجود در DEA بازه ای از نظر منطقی دچار مشکل هستند . هم چنان که در فصل سوم به آن اشاره شد ، اصولا در DEA بازه ای هیچ مفهومی به نام مجموعه امکان تولید وجود ندارد که بخواهیم مقایسه نسبی انجام دهیم . البته این مشکل ناشی از ماهیت بازه ای و نا معلوم بودن داده ها می باشد . بررسی این موضوع می تواند در مطالعات آتی مورد توجه قرار گیرد .

هم چنین در این مقاله از بازده به مقیاس واحد های E^+ و E^- صحبتی به میان نیامد . به نظر می رسد با تعریف مجدد برخی مفاهیم DEA در این قسمت بتوان با دسته بندی واحد ها ، نوع بازده به مقیاس چنین واحد هایی را مشخص نمود . که این خود از کارهای مهم مطالعاتی آینده است . در حقیقت توسعه مفهوم الگو یابی در DEA بازه ای می تواند راهگشای این مهم باشد.

همانگونه که از روش فوق بر می آید ، در روش ارائه شده توسط جهانشاهلو و همکاران فقط بازده به مقیاس واحد های E^{++} در بهترین شرایط محاسبه شده است . مشاهده می شود که واحد های ۱ و ۲ در این شرایط دارای بازده به مقیاس مشخصی نیستند .

ولی در روش پیشنهادی این چنین نیست . به جای U_0^L و U_0^U در مدل جهانشاهلو و همکاران که در بهترین شرایط محاسبه شده است از $U_0^{W^+}$ و $U_0^{E^+}$ یعنی بازده به مقیاس در بدترین شرایط و بهترین شرایط بهره برده ایم . در روش قبل نمی توانستیم بازده به مقیاس کل واحد را تعیین کنیم ولی در روش جدید پیشنهاد شده واحد ۱ دارای بازده به مقیاس افزایشی (IRS) و سایر واحد ها دارای بازده به مقیاس کاهش (DRS) می باشند.

- منابع و مراجع:
۱۱. G.R. Jahanshahloo, R.K. Matin, A.H. Vencheh, On return to scale off uly efficient DMUs in data envelopment analysis under interval data, *Appl. Math. Comput.* ۱۵۴ (۲۰۰۴c) ۳۱-۴۰.
 ۱۲. S.H. Kim, C.G. Park, K.S. Park, An application of data envelopment analysis in telephone offices evaluation with partial data, *Comput. Oper. Res.* ۲۶ (۱۹۹۹) ۵۹-۷۲.
 ۱۳. Y.K. Lee, K.S. Park, S.H. Kim, Identification of inefficiencies in an additive model based IDEA (imprecise data envelopment analysis), *Comput. Operat. Res.* ۲۹ (۲۰۰۲) ۱۶۶۱-۱۶۷۶.
 ۱۴. Ying-Ming Wang, Richard Greatbanks, Jian-Bo Yang; Interval efficiency assessment using data envelopment analysis; *Fuzzy Sets and Systems* ۱۵۳ (۲۰۰۵) ۳۴۷-۳۷۰.
 ۱. Charnes, A., Cooper, W.W., ۱۹۶۲. Programming with linear fractional functionals. *Naval research logistic quarterly*. Vol ۹, ۱۸۱-۱۸۵.
 ۲. A. Charnes, W.W. Cooper, E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research* ۲ (۱۹۷۸) ۴۲۹-۴۴۴.
 ۳. W.W. Cooper, K.S. Park, G. Yu, IDEA and AR-IDEA: models for dealing with imprecise data in DEA, *Management Sci.* ۴۵ (۱۹۹۹) ۵۹۷-۶۰۷.
 ۴. W.W. Cooper, K.S. Park, G. Yu, An illustrative application of IDEA (imprecise data envelopment analysis) to a Korean mobile telecommunication company, *Oper. Res.* ۴۹ (۲۰۰۱) ۸۰۷-۸۲۰.
 ۵. W.W. Cooper, K.S. Park, G. Yu, IDEA (imprecise data envelopment analysis) with CMDs (column maximum decision making units), *J. Oper. Res. Soc.* ۵۲ (۲۰۰۱) ۱۷۶-۱۸۱.
 ۶. D.K. Despotis, Y.G. Smirlis, Data envelopment analysis with imprecise data, *European J. Oper. Res.* ۱۴۰ (۲۰۰۲) ۲۴-۳۶.
 ۷. T. Entani, Y. Macada, H. Tanaka, Dual models of interval DEA and its extension to interval data, *European Journal of Operational Research* ۱۳۶ (۲۰۰۲) ۳۲-۴۵.
 ۸. M.S. Haghighat, E. Khorram, The maximum and minimum number of efficient units in DEA with interval data, *Appl. Math. Comput.* (۲۰۰۴), in press.
 ۹. G.R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lofti, M. Moradi, Sensitivity and stability analysis in DEA with interval data, *Appl Math. Comput.* ۱۵۶ (۲۰۰۴a) ۴۶۳-۴۷۷.
 ۱۰. G.R. Jahanshahloo, R.K. Matin, A.H. Vencheh, On return to scale off uly efficient DMUs in data envelopment analysis under interval data, *Appl. Math. Comput.* ۱۵۴ (۲۰۰۴b) ۳۱-۴۰.