

تحلیل دینامیکی سیستم تعلیق خودرو و حل معادلات آن به روش اختلالات

دکتر مهران فخرائی

(عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان)

دکتر نیما امانی فرد

(عضو هیات علمی دانشگاه گیلان)

مهندس لیلا فدائی یکتا

مهندس مریم سندی

چکیده

در این مقاله پاسخ دائمی و نیز فرکانس - پاسخ سیستم تعلیق برای مدل $1/4$ خودرو با در نظر گرفتن نیروی غیر خطی برای فنر مورد بررسی قرار گرفته است. حل معادلات سیستم از طریق اغتشاشات (روش بسط چند مقیاسی) با در نظر گرفتن شرایط رزونانس خارجی صورت گرفته و پاسخ سیستم از روش فوق بدست آمده اثر تغییر در دامنه تحریک، ضریب استهلاک، و همچنین ضریب جمله غیر خطی بر دامنه پاسخ سیستم بررسی شده است و در مرحله بعد با استفاده از روش عددی رانگ- کوتا معادلات حل گردیده و با نتایج حاصله از حل اغتشاشات مقایسه شده است.

کلید واژه ها: تحلیل دینامیکی - سیستم تعلیق خودرو - روش اختلالات - تشدید - پرش

مقدمه:

به طور طبیعی تمام سیستمهای فیزیکی در اصل رفتار غیر خطی دارند، اما به دلیل آنکه پاسخ معادله خطی به مراتب سهل تر از پاسخ معادله غیر خطی قابل دستیابی است. معمولاً به کمک تقریب ها و فرضیات مختلف معادلات مربوط به این سیستمها را به شکلی مبدل می سازند که بتوان رفتار غیر خطی را به آنها نسبت داد. در بعضی مواقع، تأثیرات غیر خطی نمی تواند فراموش گردد. یا داخل کردن آنها در یک مدل در فهم مسأله کمک می کند یا باید از یک اتفاق غیر خطی جلوگیری کرد و یا در یک بخش خاصی از آن استفاده کرد. جواب دقیق مسائل ارتعاشات غیر خطی فقط برای تعداد محدودی از مسائل ارتعاشات آزاد موجودند و تقریباً برای مسائل غیر خطی اجباری جواب دقیق وجود ندارد. لذا با توجه به عدم وجود جوابهای دقیق جوابهای عددی مورد

استفاده قرار می گیرند. با این حال جوابهای تحلیلی معمولاً ترجیح داده می شوند زیرا می توان آنها را برای پیش بینی مسیرها تحلیل تأثیرات پارامترهای مختلف و اخذ نتایج بکار برد. بنابراین معمولاً روشهای تحلیلی تقریبی برای تقریب جواب مسائل غیر خطی بکار برده می شود. از روشهای تحلیلی تقریبی می توان روش اغتشاشات را نام برد. که اگر اندازه جمله غیر خطی و دامنه حرکت کوچک باشد برای جواب تقریبی می توان از این روش استفاده نمود. تحلیل پاره ای از سیستم های خطی نشان دهنده اختلاف بین نتایج تجربی بدست آمده و تحلیل های کیفی مربوط است. ناسازگاری ها در بر گیرنده مواردی نظیر سیکل حدی، پدیده پرش، تشدیدهای زیر همساز، فوق همساز و ترکیبی هستند. دلیل اصلی این ناسازگاری ها حذف جملات غیر خطی در سیستم های ارتعاشی مربوط است. در سالهای اخیر تحقیقات وسیعی برای بررسی رفتار غیرخطی سیستم های ارتعاشی یک درجه آزادی با جملات غیر خطی از توان ۲ و یا توان ۳ بعمل آمده است و همچنین روشهای تحلیلی تقریبی مختلف نظیر بسط مستقیم پیشرو (Straight Forward Method) (Method) پارامتر تصحیح شده (Method Of Strained Coordinates)، لیندسد پوانکار (The Lindstadt-Poincare Method)، بسط چند مقیاسی (The Method Of Multiple Scales)، تعادل هارمونیک (The Method of Harmonic Balance) و معدل گیری (Methodes of Averaging) بکار گرفته شده است. که در این مقاله از روش بسط چند مقیاسی به دلیل اینکه ابزار قوی برای بررسی سیستم های میرایی و اجباری به شمار می رود و می توان عوامل میرایی و تحریک را در یک مرحله از تقریب بطور همزمان وارد ساخت و لذا تاثیر مسائلی نظیر تشدید و پرش را بررسی نمود. ([1][2]) و کارآیی این روش از نظر دقت جواب بدست آمده و نیز تحلیل پارامترهای مختلف و همچنین پدیده پرش مورد بررسی قرار گرفته است.

مدل ریاضی سیستم تعلیق

این گام به شبیه سازی ریاضی سیستم تعلیق خودرو می پردازد برای این کار یک مدل غیر خطی با دو درجه آزادی در نظر گرفته شده است شکل (۱) برای مدل سازی سیستم تعلیق سه مدل تمام خودرو، نصف خودرو و یک چهارم خودرو رایج می باشد که در این مدل سازی از روش یک چهارم خودرو استفاده شده است. پارامترهای مربوطه از دو قسمت اصلی ارتجاعی و غیر ارتجاعی تشکیل می شوند که هر کدام از این قسمتها دارای پارامترهای جرم، سختی الاستیک و

میرایی می باشند. قسمت ارتجاعی تشکیل شده از جرم یک چهارم کل خودرو و فنر غیر خطی از توان ۳ و مستهلک کننده. و قسمت غیر ارتجاعی تشکیل شده از جرم یک چرخ و لاستیک آن سختی الاستیک چرخ.

معادلات دینامیکی

با توجه به مدل ارائه شده در شکل (۱) معادلات دینامیکی سیستم به صورت زیر می باشد:

معادله حرکت عمودی بدنه:

$$m_s \ddot{S} + k_s(S-U) + K_s \varepsilon(S-U)^3 + C_s(\dot{S}-\dot{U}) = 0 \quad (1)$$

معادله حرکت عمودی چرخ:

$$m_u \ddot{U} + K_u \ddot{U} - K_s(S-U) - K_s \varepsilon(S-U)^3 - C_s(\dot{S}-\dot{U}) = F(t) \quad (2)$$

به دلیل کوپله بودن معادلات ۱ و ۲ مشاهده می کنیم که استفاده از روش بسط چند مقیاسی منجر به چند دستگاه معادلات خطی می شود که کوپل هم بودند و لذا نمی توانستیم مطابق معمول جملات سیکولار را حذف کنیم به همین دلیل با استفاده از آنالیز مودال معادلات ۱ و ۲ را به شکل زیر می نویسیم:

$$\ddot{Z}_1 + Z_1 = -\hat{h}_1 \dot{Z}_1 - \hat{\rho} \dot{Z}_2 + \mu_1 Z_2^3 - \mu_2 Z_1^3 + \mu_3 Z_1^2 Z_2 + \mu_4 Z_1 Z_2^2 + \hat{Q}_1 \sin p^* t^* \quad (3)$$

$$\ddot{Z}_2 + \lambda^2 Z_2 = -\hat{\rho} \dot{Z}_1 - \hat{h}_2 \dot{Z}_2 - \mu_1 Z_2^3 + \mu_2 Z_1^3 - \mu_3 Z_1^2 Z_2 - \mu_4 Z_1 Z_2^2 + \hat{Q}_2 \sin p^* t^* \quad (4)$$

همچنین به منظور متعادل و بالانس نمودن تاثیرات جملات غیرخطی، بایستی ضرایب میرایی و دامنه تحریک را به نحوی مرتب سازیم که جملات میرایی و نیروی تحریک در معادلات اختلال مشترک با جملات غیر خطی ظاهر شوند. این بدان معناست که نیروی تحریک و میرایی و جملات غیر خطی در مرحله یکسانی از تقریب ظاهر خواهند گردید. ([1] [2] [5]) به این منظور ضرایب میرایی و نیروی تحریک را متناسب با توان جملات غیر خطی به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\hat{h}_1 = \varepsilon^2 h_1, \quad \hat{h}_2 = \varepsilon^2 h_2$$

$$\hat{\rho} = \varepsilon^2 \rho$$

$$\hat{Q}_1 = \varepsilon^3 Q_1, \quad \hat{Q}_2 = \varepsilon^2 Q_2$$

زمانی که $P \cong 1$ باشد فرکانس تحریک نزدیک به فرکانس طبیعی سیستم است و ما با یک رزونانس خارجی اولیه روبرو هستیم با تعریف σ بعنوان پارامتر تنظیم رزونانس خارجی می توان نوشت:

$$P = 1 + \varepsilon^2 \sigma$$

که در آن σ دارای مرتبه ۲ می باشد.

حل معادلات دیفرانسیل از روشهای اغتشاشات

حل تحلیلی معادلات توسط یکی از روشهای معروف اغتشاشات یعنی روش بسط چند مقیاسی صورت گرفته و دامنه پاسخ حالت دائمی در شرایط تحریک خارجی نشان داده شده است.

حالت رزونانس اولیه $P = 1$

بنابراین پاسخ تا مرتبه سوم سیستم به صورت زیر است:

$$U = \varepsilon \alpha_1 a_1 \cos(pt + \pi/2 - \Psi) - \frac{\alpha_2 Q_2}{2(\lambda^2 - p^2)} \cos(pt + \pi/2) + \varepsilon^3 \frac{\alpha_1 \mu_2 A_1^3}{8} \times$$

$$\cos(pt + \pi/2 - \Psi) + \varepsilon^3 \frac{\alpha_2 a_1^3 \mu_2}{2(\lambda^2 - 1)} \cos(pt + \pi/2 - \Psi) + \frac{\alpha_2 a_1^3 \mu_2}{2(\lambda - 9)} \cos(pt + \pi/2 - \Psi) \times$$

$$- \frac{\alpha_2 \rho a_1 \lambda}{(\lambda^2 - 1)} \cos(pt + \pi/2) e^{-\pi/2}$$
(۵)

$$S = \varepsilon \alpha_1 v_1 a_1 \cos(pt + \pi/2 - \Psi) - \frac{\alpha_2 v_2 Q_2}{2(\lambda^2 - p^2)} \cos(pt + \pi/2) + \varepsilon^3 \frac{\alpha_1 v_1 \mu_2 A_1^3}{8} \times$$

$$\cos(pt + \pi/2 - \Psi) + \varepsilon^3 \frac{\alpha_2 v_2 a_1^3 \mu_2}{2(\lambda^2 - 1)} \cos(pt + \pi/2 - \Psi) + \varepsilon^3 \frac{\alpha_2 v_2 a_1^3 \mu_2}{2(\lambda^2 - 9)} \times$$

$$\cos(pt + \pi/2 - \Psi) - \varepsilon^3 \frac{\alpha_2 v_2 \rho a_1 \lambda}{(\lambda^2 - 1)}$$
(۶)

که در معادله a و Ψ عبارت است از:

$$(a_1\sigma - 3/8a_1^3\mu_2)^2 + (h_1/2a_1)^2 = Q_1^2/4$$

$$\sin \Psi = \frac{-h_1 * a_1}{Q_1}$$

نتایج عددی :

در شکل (۱) تا (۶) پاسخهای بدست آمده از طریق روش پرتوریشن چند مقیاسی و روش عددی رانگ - کوتا نسبت به زمان رسم شده و بررسی تاثیر پارامترهای مختلف مورد مقایسه قرار گرفته اند در تمامی شکلها ضریب فنریت تعلیق $ks=16000 \text{ KN/S}$ و ضریب فنریت تایر $ku=16000 \text{ KN/S}$ و جرم یک چهارم خودرو $m_u=240 \text{ kg}$ و جرم تایر $m_s=36 \text{ kg}$ در نظر گرفته شده است. در شکلهای ۱ و ۲ تاثیر افزایش دامنه نیروی تحریک مورد بررسی قرار گرفته است. در اینجا مشاهده می کنیم با افزایش نیروی تحریک میزان خطا افزایش یافته است. که برای ما مورد انتظار و قبول است. چرا که همانطور که قبلاً در مورد روش پرتوریشن اشاره شد علیرغم اینکه این روشها امکان پیش بینی رفتار غیرخطی سیستم را بوجود می آورند ولی برای نوسانهای کوچک معتبر و صادق هستند در اینجا هم با افزایش نیروی تحریک f دامنه نوسانها افزایش می یابد و اختلاف جواب پرتوریشن و جواب مربوط به روش عددی افزایش می یابد.

در شکل ۴ و ۵ پاسخ از نظر بررسی تاثیر ضریب میرایی مورد مقایسه قرار گرفته است. در این حالت با تغییر اندازه ضریب میرایی و ثابت نگهداشتن پارامترهای دیگر دامنه پاسخ کاهش یافته در نتیجه اختلاف جواب پرتوریشن و جواب عددی مربوط به روش عددی کاهش می یابد. در شکل ۶ و ۷ تاثیر افزایش ضریب غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته است در اینجا مشاهده می کنیم با افزایش ضریب غیرخطی میزان اختلاف پاسخ زیاد شده است. و این مورد انتظار بود زیرا همانطور که قبلاً گفتیم این روش برای جملات غیر خطی کوچک معتبر است. در شکل (۳-۱۱) تا (۳-۱۶) پاسخ از نظر بررسی تاثیر ضریب میرایی مورد مقایسه قرار گرفته است در این حالت با تغییر اندازه ضریب میرایی و ثابت نگهداشتن پارامترهای دیگر دامنه پاسخ کاهش یافته در نتیجه اختلاف جواب پرتوریشن و جواب عددی مربوط به روش عددی کاهش می یابد. در شکل (۷) تاثیر ضریب میرایی نشان داده شده است در این حالت با تغییر اندازه h_1 و ثابت نگهداشتن پارامترهای دیگر منحنی های مختلف بدست آمده است. مطابق شکل مشاهده می شود که نقطه ماکزیمم دامنه با کاهش ضریب h_1 افزایش می یابد در همان حال فرکانس متناظر با این نقطه ماکزیمم افزایش

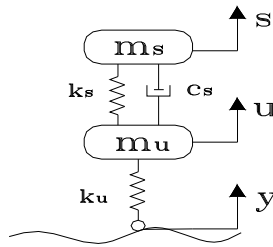
می یابد. (قدر مطلق پارامتر σ نیز افزایش می یابد) مطابق شکل مشاهده می کنیم که هر چه به میزان ضریب میرایی افزوده می شود نقطه تشدید به نقطه ماکزیمم به حال $\sigma = 0$ نزدیکتر می شود و به همین نسبت احتمال وقوع دامنه های چند مقداره (پدیده پرش) به ازای یک فرکانس معین کاهش می یابد و می توان انتظار داشت که در یک مقدار مرزی از ضریب میرایی منحنی مربوطه مشابه منحنی فرکانس - پاسخ برای حالت خطی باشد. در شکل (۸) منحنی های مربوط به دامنه های تحریک مختلف رسم گردیده است در این حالت مشاهده می شود که با افزایش دامنه تحریک دامنه پاسخ نیز افزایش می یابد و منحنی های انحناء بیشتری از خود نشان می دهند این با برخورد ما با سیستم های غیرخطی که در دامنه های ارتعاشی بزرگ مورد توجه قرار می گیرند و برای دامنه های کوچک معمولاً سیستم را خطی فرض می کنیم همخوانی کامل دارد. در شکل (۹) منحنی های مختلف مربوط به ضرایب غیرخطی مختلف درحالیکه پارامترهای دیگر ثابت نگه داشته شده اند

رسم گردیده است دیده می شود که با افزایش نیروی تحریک میزان انحراف منحنی بیشتر می شود و پدیده پرش قابل توجه و چشمگیرتر می شود. هنگامیکه مثبت اختیار گردیده منحنی ها به سمت راست منحرف شده و هنگامیکه مقدار آن منفی اختیار شده منحنی به سمت چپ منحرف شده است در حالت که ضریب غیرخطی حذف می شود منحنی مربوطه مشابه حالت خطی بدون انحناء است. مشاهده می کنیم که روش بسط چند مقیاسی در دامنه های کوچک ارتعاشی دارای دقت قابل توجه و مطلوبیست بطوریکه انطباق آن با پاسخ بدست آمده از روش عددی بسیار خوب بوده و به همین دلیل می توان این روش را جهت تحلیل ارتعاشات غیر خطی و خصوصاً برای سیستم های چند درجه آزادی ارتعاش غیر خطی در حضور نیروی تحریک و عامل میرایی «Damper» مناسب و موثر دانست .

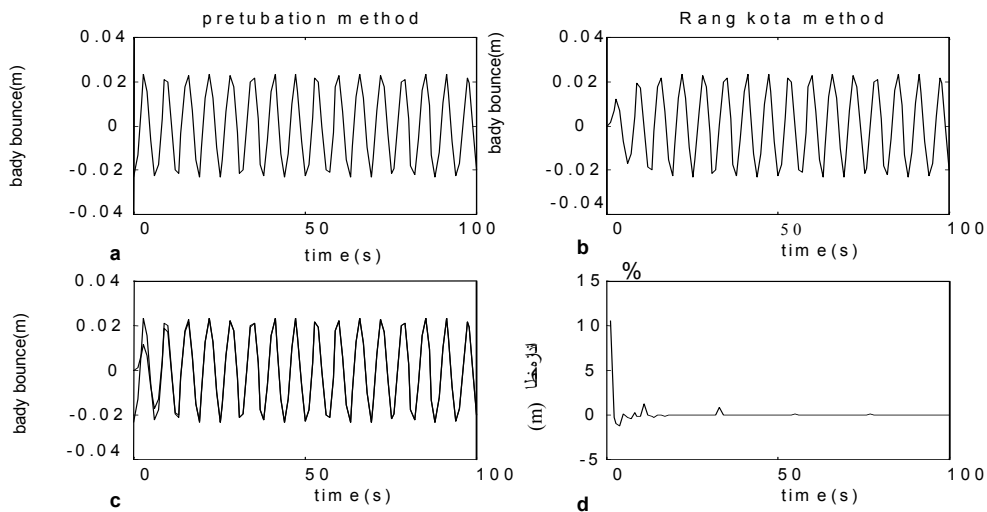
نتیجه:

در این مقاله روش اغتشاشات و روش عددی رانگ-کوتا مقایسه شده و نشان داده شده که برای سیستمهای با دامنه حرکت کم و پارامتر غیرخطی کوچک روش اغتشاشات که یک روش تقریبی است از دقت خوبی برخوردار بوده و همچنین تأثیر پارامترهای مختلف بر روی سیستم مورد بررسی قرار گرفته در بعضی مواقع پدیده پرش مشاهده و سیستم ناپایدار شده بنابراین در طراحی

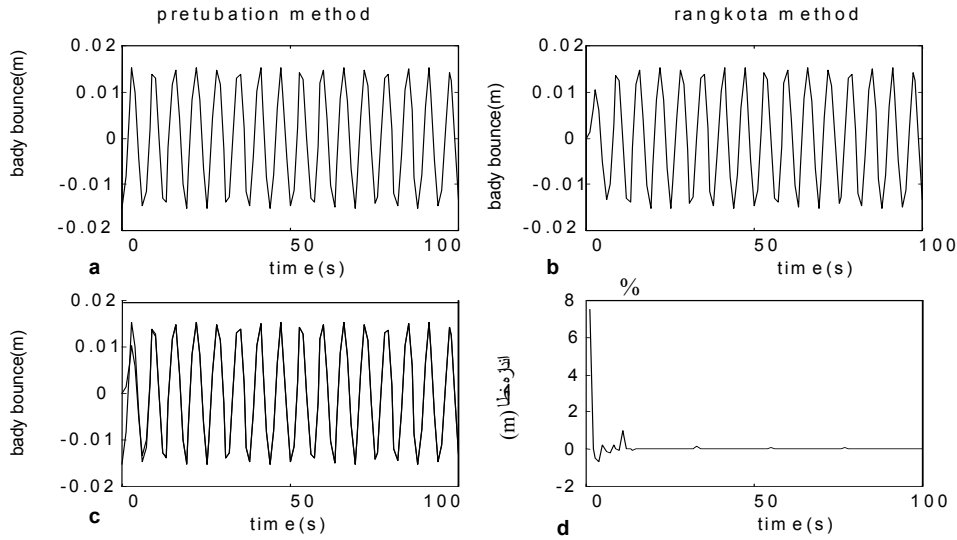
و تحلیل سیستمهای مرتبه ۲ کوپل شده که معادلاتی شبیه سیستم فوق دارند می بایست پارامترهای سیستم به نوعی انتخاب گردند که پدیده پرش دامنه عملکرد سیستم را مختل ننماید.



شکل (۱) شکل شماتیک یک مدل ۱/۴ خودرو تحت تحریک خارجی

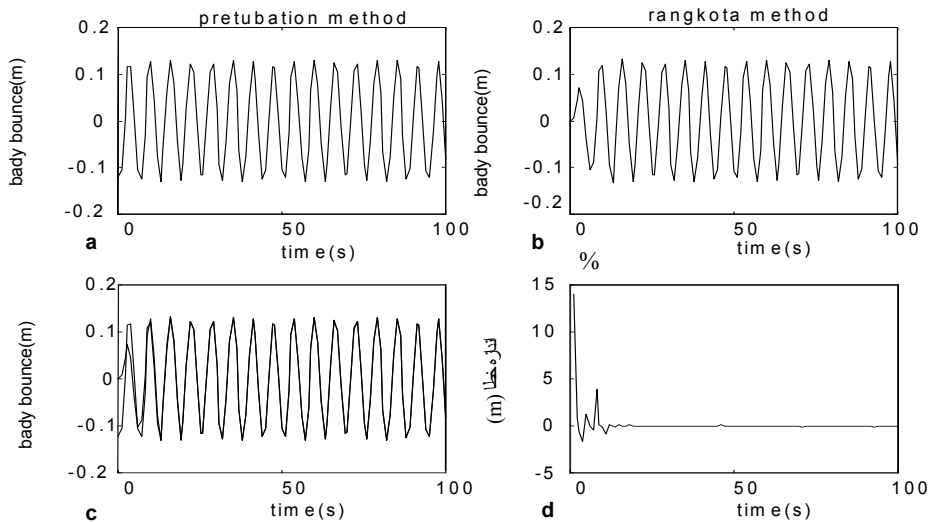


شکل (۲) مقایسه جوابهای بدست آمده
 (a) از طریق روش بسط چند مقیاسی (b) از طریق روش عددی رانگ - کوتا
 (c) انطباق دوروش (d) نمودار خطای روش بسط چند مقیاسی
 $(\varepsilon=1, \mu_2 = 0.053, h_1 = 0.53, f=0.01)$



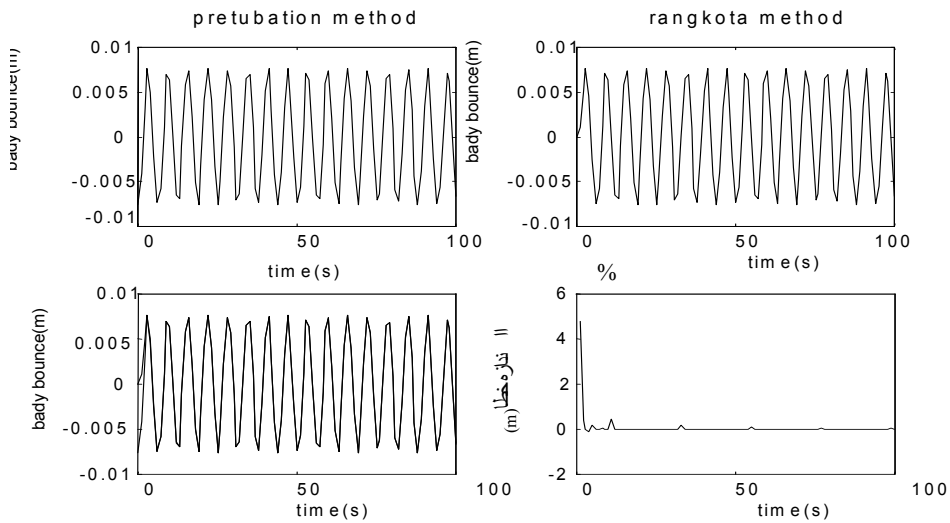
شکل ۳) مقایسه جوابهای بدست آمده

(a) از طریق روش بسط چند مقیاس (b) از طریق روش عددی رانگ - کوتا
 (c) انطباق دوروش (d) نمودار خطای روش بسط چند مقیاسی
 ($\epsilon=1, \mu_2 = 0.053, h_1 = 0.661, f=0.01$)

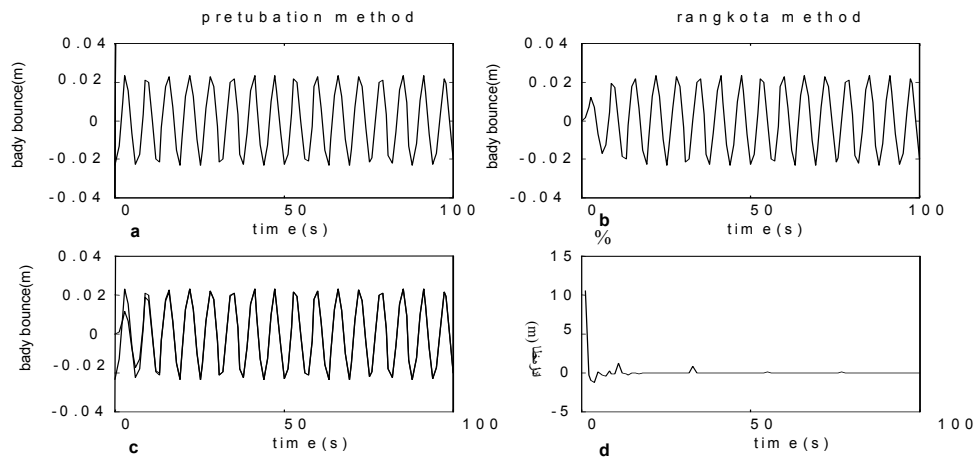


شکل ۴) مقایسه جوابهای بدست آمده

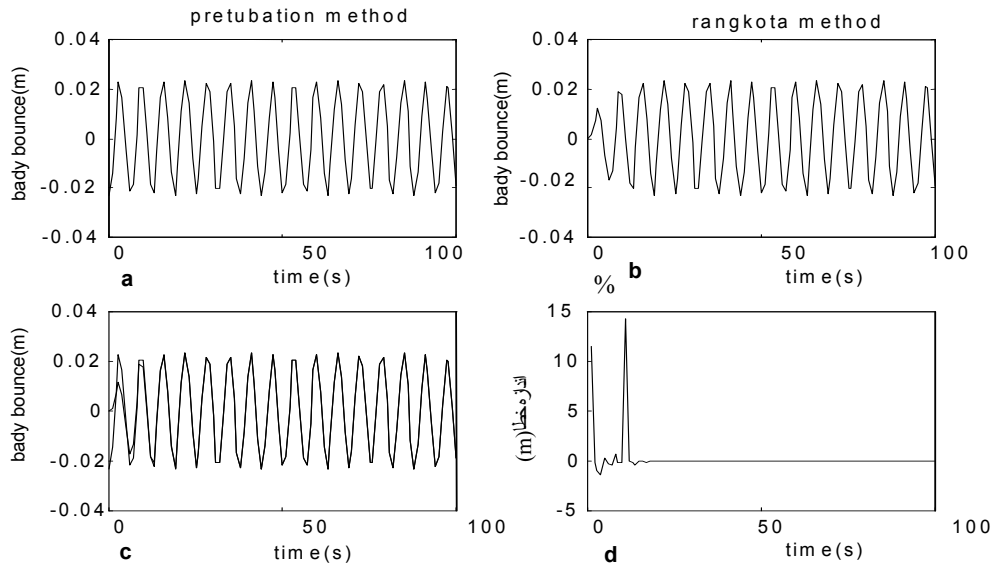
(a) از طریق روش بسط چند مقیاسی (b) از طریق روش عددی رانگ - کوتا
 (c) انطباق دوروش (d) نمودار خطای روش بسط چند مقیاسی
 ($\epsilon=1, \mu_2 = 0.053, h_1 = 0.53, f=0.05$)



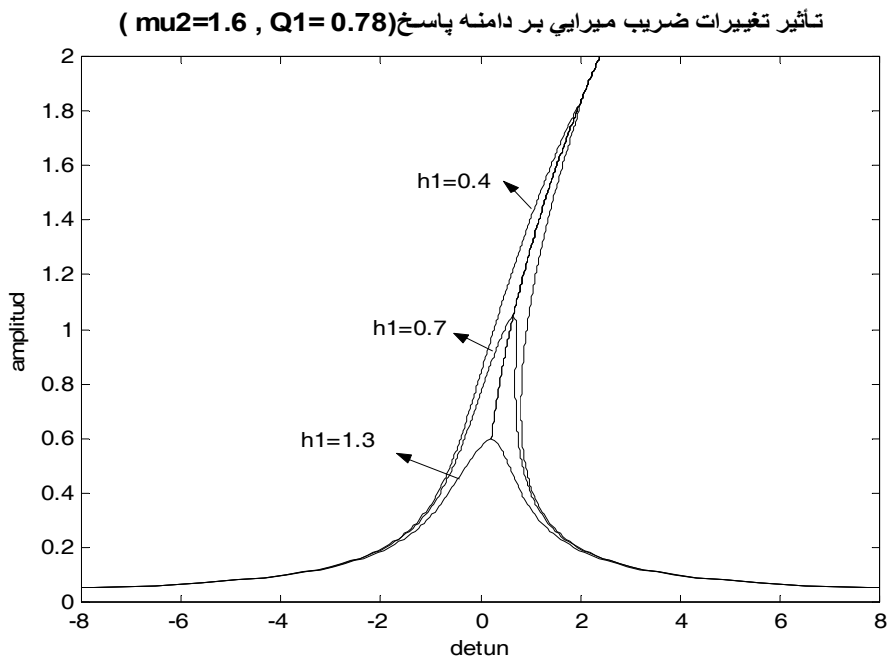
شکل ۵) مقایسه جوابهای بدست آمده
 (a) از طریق روش بسط چند مقیاسی (b) از طریق روش عددی رانگ-کوتا
 (c) انطباق دوروش (d) نمودار خطای روش بسط چند مقیاسی
 ($\epsilon=1, \mu_2 = 0.053, h_1 = 1.32, f=0.01$)



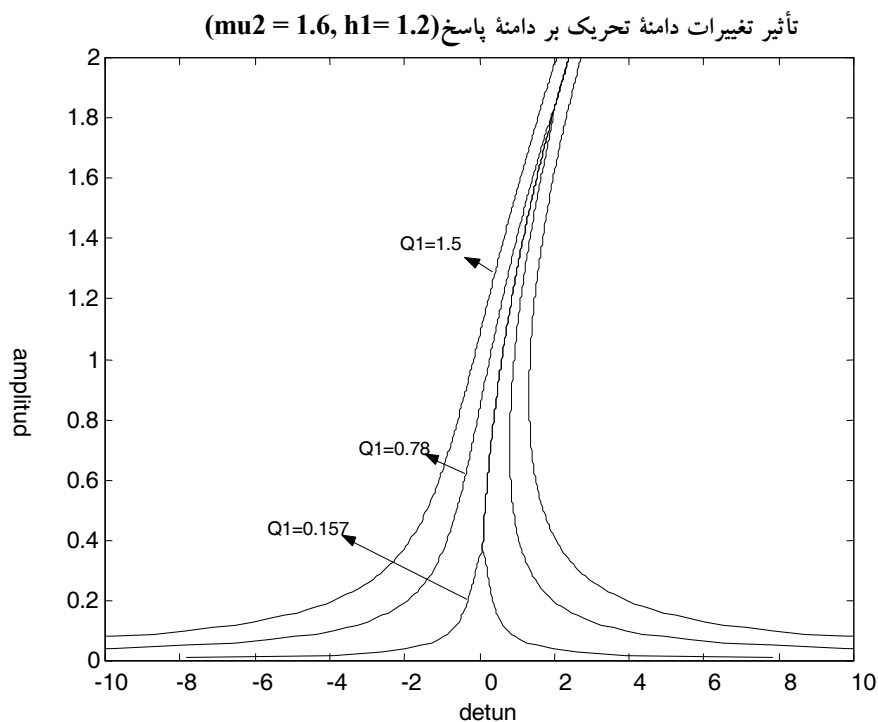
شکل ۶) مقایسه جوابهای بدست آمده
 (a) از طریق روش بسط چند مقیاسی (b) از طریق روش عددی رانگ-کوتا
 (c) انطباق دو روش (d) نمودار خطای روش بسط چند مقیاسی
 ($\epsilon=1, \mu_2 = 0.372, h_1 = 0.53, f=0.01$)



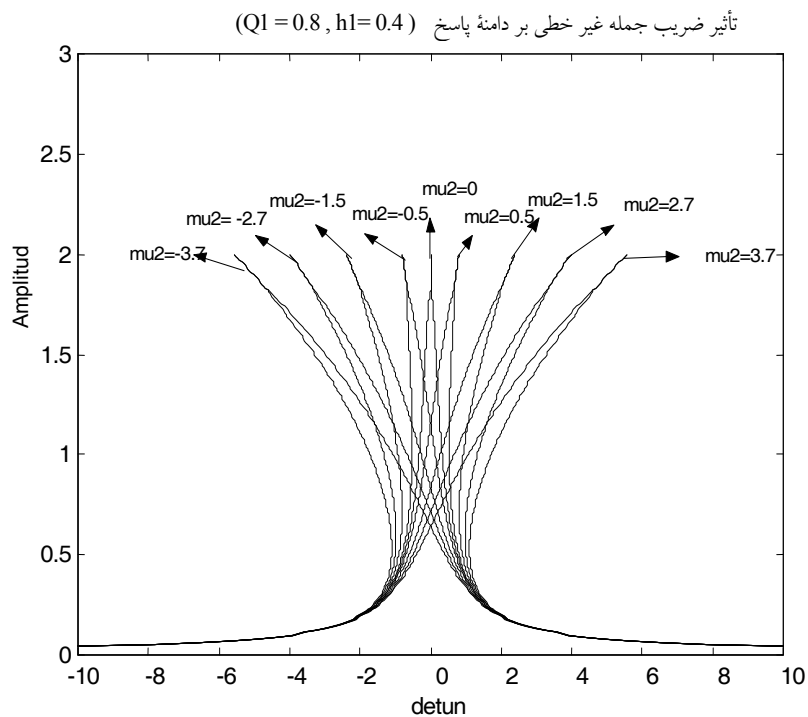
شکل ۷) مقایسه جوابهای بدست آمده
 (a) از طریق روش بسط چند مقیاسی (b) از طریق روش عددی رانگ-کوتا
 (c) انطباق دوروش (d) نمودار خطای روش بسط چند مقیاسی
 ($\epsilon=7, \mu_2 = 0.372, h_1=0.53, f=0.01$)



شکل (۸)



شکل (۹)



شکل (۱۰)

منابع

- [1] .A.H Nayfeh & D.T.Mook, Non Linear Oscilations John Welly & Sons, Ny(979).
- [2] .A.H.Nayfeh, problems in perturbation John Welly & Sons, Ny (1985).
- 3.S.Graw-Hill KELLY, Mechanical Vibrations MC Graw-Hill International Editions (1993)
- 4.R.E.MICKENS, Nan Linear Oscilations Cambridge University Press (1981).
- 5.Jon-Joel Thomsen, Vibrations & Stability Mc Graw-Hill International editions (UK) Limited (1997).
- 6.Leonard. Meirovitch, Elements Of Vibration Analys MC Graw-Hill International Editions (1986).
- ۷.مجموعه مقالات نهمین کنفرانس سالانه و پنجمین کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک ۶-۸ خرداد ۱۳۸۰ - جلد دوم - دانشگاه گیلان.
- ۸.مجموعه مقالات چهارمین همایش سالانه بررسی تحلیلی و تجربی رفتار سازه ها تحت اثر زلزله و بار دینامیکی، ۳۱ خرداد ۱۳۷۷ - دانشگاه گیلان.
- ۹.سیمنار کارشناسی ارشد یدالله نقیان - نوسانات غیر خطی در سیستم های مکانیکی و تکنیک های مختلف و حل آن ، بهمن ۱۳۷۴- دانشگاه علم و صنعت.
۱۰. پروژه کارشناسی ارشد یدالله نقیان - نوسانات غیر خطی در سیستم های مکانیکی و تکنیک های مختلف حل آن، دانشگاه علم و صنعت.
- ۱۱.نشریه مهندسی مکانیک، شماره ۱۹ - خرداد ۱۳۸۰
- ۱۲.دکتر منصور نیکخواه بهرامی تئوری ارتعاشات و کاربرد آن در مهندسی انتشارات دانشگاه تهران - جلد اول - ۱۹۴۷
۱۳. پرفسور رائو - ارتعاشات مکانیکی ترجمه دکتر منصور درویزه - دکتر ابوالفضل درویزه - جلد اول و دوم
۱۴. مجموعه مقالات دهمین کنفرانس (بین المللی) مهندسی مکانیک - انجمن مهندسان مکانیک ایران، جلد اول - دانشگاه خواجه نصیر طوسی.
۱۵. رضا نخعی ، صفا برهانی و مازیار کاظمی - لرز شهای مکانیکی
۱۶. مجله علمی خودرو ، شماره ۱۶ - دانشگاه علم و صنعت.