پیدا کردن کران برای مقادیر ویژه چند جمله ایهای ماتریسی

هاشم صابری نجفی
گروه ریاضی – دانشگاه علوم – دانشگاه گیلان
E-mail:hnajafi@Guilan.ac.ir

بهروز دانشیان
گروه ریاضی – دانشگاه آزاد اسلامی – لاهیجان

ابراهیم عباسی بهدائی
گروه ریاضی – دانشگاه آزاد اسلامی – لاهیجان

چکیده

در این مقاله بدنبال تعیین کرانهای بالا و پایین برای قدر مطلق مقادیر ویژه چند جمله ایهای ماتریسی (λ –ماتریس) هستیم . این کرانها بر مبنای نرمهای ماتریسی ضرایب بنا شده است. از موضوعات ماتریسهای همراه بلوکی ، قضایای گرشگورین و خواص چند جمله ایهای عددی به عنوان ابزاری در پیدا کردن این کرانها استفاده می شود . مثالهای عددی جهت بررسی موارد مذکور ارائه شده و نتایج حاصل به صورت جداول نمایش داده می شود.

کلید واژه ها : مقادیر ویژه ، چند جمله ای ماتریسی ، مقادیر منفرد

۱ مقدمه

پیدا کردن ریشه های چند جمله ایها یک موضوع نسبتاً قدیمی است و روش های مختلفی در سالهای گذشته توسط ریاضیدانان مطرح شده است . اما پیدا کردن کرانهای مقادیر ویژهٔ چند جمله ایهای ماتریسی کاری جدید است و در سالهای اخیر تحقیق در این زمینه شروع شده ، مراجع [٦]و [٧] را ببینید. نتایج بسیار خوبی از این تحقیقات بدست آمده است که در مقاله های مذکور و

زمانیکه چند جمله ای ماتریسی مطرح می گردد مسئله مقادیر ویژهٔ چند جمله ایها نیز مورد بحث قرار می گیرد . بخصوص پیدا کردن کرانهای مناسب برای مقادیر ویژه از مو ضوعات مورد علاقه ریاضیات محاسباتی است. در این مقاله کرانهای بالا و پایین مقادیر ویژهٔ چند جمله ایهای ماتریسی بر مبنای نرم ماتریس ضرایب محاسبه می گردند. در این راه از ماتریسهای بلوکی همراه ، قضیه گرشگورین و خواص چند جمله ایهای عددی استفاده می گردد. با مثالهایی روش های بدست آمده آزمایش می شود تا دقت آنها معلوم گردد . این نوع تحقیقات ضرورت فراوانی دارد زیرا از مقادیر ویژه و کرانهای آن در علوم و مهندسی استفاده می گردد.

۲ تعاریف مقدماتی

۲-۱ تعریف : اگر ضریب جمله پیشروی یک چند جمله ای مساوی یک باشد چند جمله ای را منفرد می نامیم. چند جمله ای منفرد $p(x)$ از درجهٔ n به صورت زیر داده شده است.

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{و} \quad a_k \in \mathbb{C} \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

که در آن $x \in \mathbb{C}^n$ و $M \in k^{n\times n}$ ماتریسی است که : $\det(M - \lambda I) = (-1)^n p(\lambda)$. در این صورت Mرا یک ماتریس همراه چند جمله ای $p(x)$ می نامیم . ریشه های $p(x)$ همان مقادیر ویژهٔ ماتریس M هستند. بنابراین یافتن ریشه های چند جمله ای $p(x)$ به مسئله یافتن n مقدار ویژهٔ ماتریس $n\times n$ ، A تبدیل می شوند.

۲-۲ تعریف مقادیر منفرد

اگر A ماتریس $m\times n$ $(m > n)$ باشد آنگاه مقادیر ویژه ماتریس متقارن $A'A$ مقادیری حقیقی و نامنفی هستند و با $\delta_1^2 \ge \delta_2^2 \ge \ldots \ge \delta_n^2$ نشان می دهیم. $\delta_n,\ldots,\delta_2,\delta_1$ مقادیر منفرد A نامیده می شود.

۲-۳ تعریف شعاع عددی یک ماتریس

اگر $A \in M_n$ داده شده باشد،آنگاه تابع $r(A) = \underset{x^*x\le 1}{Max}|x^* Ax| = \underset{z\in l'(A)}{Max}|z|$ را شعاع عددی ماتریس A می نامند.

۲-٤ تعریف قاعدهٔ علامتهای دکارت

تعداد ریشه های حقیقی مثبت یعنی P از یک معادلهٔ چند جمله ای با ضرایب حقیقی بیشتر از v نمی باشد که v تعداد تغییر علامتهای ضرایب است. بعلاوه $v-p$ یک عدد زوج نامنفی است.

۲-۵ چند جمله ای ماتریسی (λ-ماتریس)

چند جمله ای ماتریسی (یا λ - ماتریس) را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$P(\lambda) = \lambda^m A_m + \lambda^{m-1} A_{m-1} + \ldots + A_0 \qquad (۲- ۱)$$

که $k = 0,1,\ldots,m, A_k \in ¢^{n\times n}$.

چند جمله ای ماتریسی جدید وابسته به $P(\lambda)$ را معرفی می کنیم :

$$P_U(\lambda) = \lambda^m I + \lambda^{m-1} U_{m-1} + \ldots + U_0 \qquad (۲-۲)$$

که $U_i = A_m^{-1} A_i$. بنابراین $p(\lambda) = A_m P_U(\lambda)$

$$P_L(\lambda) = \lambda^m I + \lambda^{m-1} L_1 + \ldots + L_m \qquad (۲-۳)$$

که $L_i = A_0^{-1} A_i$ بنا بر این $\lambda^m P(\lambda^{-1}) = A_0 p_L(\lambda)$.

چند جمله ایهای P و P_U مقادیر ویژهٔ مشابه دارند در حالیکه مقادیر ویژهٔ P_L معکوس مقادیر ویژهٔ P است .

۲-٦ ماتریسهای بلوکی همراه وابسته به P_L, P_U

$$C_{U\equiv}\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & I & \cdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & I \\ -U_0 & -U_1 & \cdots & \cdots & -U_{m-1} \end{bmatrix} \qquad (۲-٤)$$

$$C_{U\equiv}\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & I & \cdots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & I \\ -L_m & -L_{m-1} & \cdots & \cdots & -L_1 \end{bmatrix} \qquad (۲-۵)$$

و ماتریسهای بلوکی L,U را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$U=[U_0,U_1,...,U_{m-1}] \quad (۲-۶)$$

$$L=[L_m,L_{m-1},...,L_1] \quad (۲-۷)$$

۳ کرانهایی از ماتریس بلوکی همراه

۳-۱ قضیه اوستروسکی[۱]

فرض کنید $A=(a_{ij})\in M_n$ یک ماتریس $n\times n$ باشد و $\alpha\in[0,1]$ داده شده باشد و همچنین R_i و C_iنمایش مجموع سطری و ستونی A به جز عناصر روی قطر باشد.

$$R_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right| \quad و \quad i=1,2,...,n \quad (۳-۷)$$

$$C_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right| \quad و \quad i=1,2,...,n \quad (۳-۸)$$

آنگاه همهٔ مقادیر ویژه A در اجتماع n دایرهٔ زیر قرار دارند.

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{z\in:\left|z-a_{ij}\right|\leq R_i^{\alpha}C_i^{1-\alpha}\} \quad (۳-۹)$$

برای اثبات به [۲] مراجعه شود.

۵ کرانهای مبتنی بر نرمهای C_U و C_L

لم ۵-۱ : هر مقدار ویژهٔ $A\in c^{n\times n}$ در رابطهٔ $|\lambda|\leq\|A\|$ برای هر نرم ماتریسی صدق می کند([٦])

لم ۵-۲ : برای هر مقدار ویژهٔ λاز P داریم :

$$\left(1+\sum_{j=1}^{m}\left\|L_j\right\|_p\right)^{-1}\leq|\lambda|\leq 1+\sum_{j=0}^{m-1}\left\|U_j\right\|_P \,,\ 1\leq P\leq\infty \quad (۵-۱)$$

اثبات: فرض کنیم a و b نامنفی باشند در این صورت

$$(a+b)^p=a^p+a^{p-1}b+...+ab^{p-1}+b^p\geq a^p+b^p$$

$$(a^p+b^p)^{1/p}\leq a+b \quad (۵-۲)$$

۱-Storoski

با توجه به تعریف $P-$ نرم و رابطه (۵-۲) داریم :

$$\begin{aligned}\|C_U\|_P &= \underset{1\le j\le m}{Max}\left(\sum_{j=1}^{m}\|a_{ij}\|_p^p\right)^{1/p} = Max\left\{\|U_0\|_p^p, 1+\|U_1\|_p^p,\dots,\|U_{m-1}\|_p^p\right\}^{1/p}\\ &= Max\left\{\|U_0\|_p,(1+\|U_1\|_p^p)^{1/p},\dots,(1+\|U_{m-1}\|_p^p)^{1/p}\right\}\\ &\le \mathrm{Max}\left\{\|\mathrm{U}_0\|_p,1+\|U_1\|_P,\dots,1+\|U_{m-1}\|_p\right\}\\ &\le 1+\|U_0\|_P+\|U_1\|_P+\dots+\|U_{m-1}\|_p = 1+\sum_{j=0}^{m-1}\|U_j\|_p\end{aligned}$$

از طرفی طبق لم (۵-۱) می دانیم $|\lambda|\le\|C_{ij}\|_p$ پس داریم :

$$|\lambda|\le 1+\sum_{j=0}^{m-1}\|U_j\|_p$$

اثبات کران پایین مشابه است .

لم ۵-۳ : برای هر مقدار ویژهٔ λ از p داریم :

$$Max\left(\|L_m\|_1, 1+\underset{i=:m-1}{Max}\|L_i\|_1\right)^{-1}\le|\lambda|\le Max\left(\|U_0\|_1,1+\underset{i=1:m-1}{Max}\|U_i\|_1\right) \qquad (۵-۳)$$

$$Max\left(1,\|L\|_\infty\right)^{-1}\le|\lambda|\le Max\left(1,\|U\|_\infty\right) \qquad (۵-٤)$$

$$\left\|I+LL^*\right\|^{-1/2}|\lambda|\le\left\|I+UU^*\right\|_2^{1/2} \qquad (۵-۵)$$

برای اثبات به [٦] مراجعه شود.

نتیجه ۵-۱ : برای هر مقدار ویژهٔ λ از p داریم :

$$\underset{i=1:m}{Max}\left(1,\|L_i\|_1\right)^{-1}\le|\lambda|\le\underset{i=1:m-1}{Max}\left(1,\|U_i\|_1\right) \qquad (۵-٦)$$

$$Max\left(1,\sum_{j=1}^{m}\|L_j\|_\infty\right)^{-1}\le|\lambda|\le Max\left(1,\sum_{j=0}^{m-1}\|U_j\|_\infty\right) \qquad (۵-۷)$$

$$\left(1+\sum_{j=1}^{m}\|L_j\|_2^2\right)^{-1}\le|\lambda|\le Max\left(1,\sum_{j=0}^{m-1}\|U_j\|_2^2\right) \qquad (۵-۸)$$

برای $n=1$، کران (۵-٦) کران کوشی[1] و کران (۵-۷) کران مونتل[2] و کران (۵-۸) کـران کارمیچـل[3] و ماسون است[4] . [٦]

1 - Caushy
2 - Montel
3 - Carmichael
4 - mason

می دانیم مقادیر ویژه یک ماتریس تحت تبدلات متشابه تغییر نمی کند . هدف ما این است که ماتریس متشابه C_U, C_L بسازیم . ماتریس قطری $x = diage(\alpha_1 I, ..., \alpha_m I)$ که پارامتر های α_i مثبت هستند را در نظر می گیریم . داریم :

$$C_U(\alpha) = xC_U x^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}I & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & -\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}I \\ -\frac{\alpha_m}{\alpha_1}U_0 & -\frac{\alpha_m}{\alpha_2}U_1 & \cdots & -\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}}U_{m-2} & -U_{m-1} \end{bmatrix} \qquad (۹-۵)$$

لم (۵-٤) : فرض کنید $\alpha_m = 1, \alpha_1 = 0, i = 0:m$ پارامتر های مثبت باشند. هر مقدار ویژهٔ λ از p در روابط زیر صدق می کند.

$$|\lambda| \le Max\left(\frac{\|U_0\|}{\alpha_1}, \underset{i=1:m-1}{Max}\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} + \frac{\|U_i\|_1}{\alpha_{i+1}}\right)\right) \qquad (۱۰-۵)$$

$$|\lambda| \le Max\left\|\left(\underset{i=1:m-1}{Max}\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}, \left\|\left[\frac{U_0}{\alpha_1}, ..., \frac{U_{m-1}}{\alpha_{m-1}}, U_{m-1}\right]\right\|\right)\right\|_\infty \qquad (۱۱-۵)$$

$$|\lambda| \le \left\|\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}\right)^2 + \sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{U_i}{\alpha_{i+1}}\right)^2\right\|_2^{1/2} \qquad (۱۲-۵)$$

اگر $\alpha_i = \|U_i\|_1$ باشد از (۵-۱۰) کران زیر را بدست می آوریم :

$$|\lambda| \le Max\left\{\frac{\|U_0\|_1}{\|U_1\|_1}, \underset{i=1:m-1}{Max}\left(\frac{\|U_i\|_1}{\|U_{i+1}\|_1} + \frac{\|U_i\|_1}{\|U_{i+1}\|_1}\right)\right\}$$

$$= Max\left\{\frac{\|U_0\|_1}{\|U_1\|_1}, 2Max\frac{\|U_i\|_1}{\|U_{i+1}\|_1}\right\} \qquad (۱۳-۵)$$

کران بالا کران کوجیما[۵] معروف است.

اگر $n=1$ و $\alpha_i=\|U_i\|_\infty$ باشد از (۵-۱۱) کران زیر بدست می آوریم :

$$C_U(\alpha)=\left[-\frac{\alpha_m}{\alpha_1}U_0,-\frac{\alpha_m}{\alpha_2},\ldots,-\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}}U_{m-2},-U_{m-1}\right]$$

$$\|C_U(\alpha)\|_\infty=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\|U_1\|_\infty}{\alpha_{i+1}}=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\|U_i\|_\infty}{\|U_{i+1}\|_\infty}$$

$$|\lambda|\le\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\|U_i\|_\infty}{\|U_{i+1}\|_\infty} \qquad (۵-۱٤)$$

مجموع سطری و ستونی هر ماتریس را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$s_i(A)=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\ ,\ t_j(A)=\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \qquad (۵-۱۵)$$

لم زیر کاربرد ساده ای از قضیه اوسترسکی برای C_U و C_L است.

لم ۵-۵ : برای هر مقدار ویژهٔ λ از p داریم :

$$\left(\underset{i=1:m}{Max}\, s_i(C_L)^\beta t_i(C_L)^{1-\beta}\right)^{-1}\le|\lambda|\le\underset{i=1:mn}{Max}\, s_i(C_U)^\beta t_i(C_U)^{1-\beta} \qquad (۵-۱٦)$$

برای هر $\lambda\in R,\beta\in[0,1]$.

برای اثبات به [٦]مراجعه شود.

٦ کرانهایی برای مقادیر منفرد C_U و C_L

از آنجا که برای محاسبه کرانها استفاده نرم – ۲ طولانی و هزینه بر دار است لذا برای رفع این مشکل از مقادیر منفرد C_U و C_L برای پیدا کردن استفاده می کنیم .

لم ٦-۱ : مقادیر منفرد δ_i از ماتریس همراه C_{ij} به سه گروه زیر تقسیم بندی می شوند.

$(i)\ \delta_i\le 1, i=1:n$

$(ii)\ \delta_i=1\ ,\ i=(n+1):n(m-1)$ (اگر $m\ge 3$)

---

5 - kojima

$(iii)\ \delta_i \geq 1\ , i = n(m-1)+1 : nm \quad (m \geq 2$ اگر $)$

$2n$مقدار منفرد دو گروه (i) و (iii) ریشهٔ دوم مقادیر ویژهٔ $\lambda-$ ماتریس مرتبهٔ دوم $Q(\lambda) = \lambda^2 I - \lambda(UU^* + I) + U_0 U_0^*$ هستند. [٦].

نتیجه ٦-١ : برای هر مقدار ویژهٔ λ از p داریم :

$$\lambda_{\min}(Q(\lambda))^{1/2} = \delta_{\min}(C_U) \leq |\lambda| \leq \delta_1(C_U) = \lambda_{Max}(Q(\lambda))^{1/2} \qquad (١-٦)$$

۷ کران مبتنی بر شعاع عددی

یک را دیگر برای کران دار کردن مقادیر ویژهٔ این است که مقادیر ویژه مورد استفاده در شعاع عددی ξ را کران دار کنیم :

لم ۷-۱ : فرض کنیم $z \in c^n$ $A, B \in \mathbf{c}^{m\times n}$, $\|z\|_2 = 1$ **باشد . آنگاه :**

$$|z^* BAz| \leq \frac{\|A^* B\|_2 + \|A\|_2 \|B\|_2}{2} \qquad (١-٧)$$

برای اثبات به [٦] مراجعه شود.

لم ۷-۲ : هر مقدار مقدار ویژهٔ λ از p در نامساوی زیر صدق می کند.

$$|\lambda| \leq \cos\left(\frac{\pi}{m+1}\right) + \frac{\|U_m\|_2 + \|U\|_2}{2} \qquad (٢-٧)$$

برای اثبات به [٦] مراجعه شود.

۸ پیدا کردن کران با استفاده از توسیع قضیه کوشی

لم ۸-۱ : فرض کنید A_0, A_1 نا منفرد باشند . چند جمله ایهای عددی وابسته به P را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$u(\lambda) = \lambda^m \left\|A_m^{-1}\right\|^{-1} - \lambda^{m-1}\|A_{m-1}\| - \ldots - \|A_0\| \qquad (١-٨)$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^m \|A_m\| + \ldots + \lambda\|A_1\| - \left\|A_0^{-1}\right\|^{-1} \qquad (٢-٨)$$

آنگاه هر مقدار ویژهٔ λ از P رابطه زیر صدق می کند.

$$r \le |\lambda| \le R \qquad (۳-۸)$$

که r, R ریشه های حقیقی مثبت یکتای $\ell(\lambda), u(\lambda)$ هستند . [۱]

انتخاب نرمی که در (۸-۳) بهترین کران را بدهد قابل پیش بینی نیست . توجه داریم که برعکس همهٔ کرانهای قبلی این کرانها برحسب A_i اصلی نوشته می شوند نه براساس $U_i = A_m^{-1} A_i$ یا $L_i = A_0^{-1} A_i$

لم ۸ -۲: فرض کنید $\beta = \left\| UU^* + I \right\|_2$. در این صورت هر مقدار ویژهٔ λ از P در رابطه زیر صدق می کند.

$$\frac{1}{2}\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\delta_n(U_0)^2}\right) \le |\lambda|^2 \le \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + 4\delta_1(U_0)^2}$$

۹-کرانهایی شامل نرمهای با توانهای کسری (کرانهای محمد)

لم ۹-۱ : هر مقدار ویژهٔ λ از P رابطه زیر صدق می کند.

$$\left(1 + \left\|A_0^{-1}\right\|\right)^{-1} \underset{i=1:m}{Max} \left\|A_i\right\|^{-1/i} \le |\lambda| \le \left(1 + \left\|A_m^{-1}\right\|\right) \underset{i=0:m-1}{Max} \left\|A_i\right\|^{1/(m-1)})$$

برای اثبات به [۱] و [٦] مراجعه شود.

۱۰- ایجاد کردن کران بهینه روی دایرهٔ واحد

این کران تعمیم کران محمد[۳] و [٤] برای چند جمله ایهای اسکالری است.

لم ۱۰ -۱ : هر مقدار ویژهٔ P در رابطهٔ

$$|\lambda| \le Max\left(\mu \left\|A_m^{-1}\right\|, 1\right) \qquad \textbf{(۱-۱۰)}$$

صدق می کند که

$$\mu = \underset{|z|=1}{Max} \left\| z^{m-1} A_{m-1} + \ldots + A_0 \right\| = \underset{|z|=1}{Max} \left\| A_{m-1} + \ldots + z^{m-1} A_0 \right\| \qquad \textbf{(۲-۱۰)}$$

برای اثبات به [۱]و[٦] مراجعه شود.

۱۱ - طیفهای چند جمله ایهای ماتریسی

فرض کنیم $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$ یک چند جمله ای ماتریسی درجهٔ ۲ باشد K, C, M ماتریسهای $n \times n$ هستند.

بعبارت دیگر، ضرایب ماتریسی $Q(\lambda)$ یک چند جمله ای درجهٔ دوم به نسبت اسکالر λ است که $Q(\lambda)$ را ماتریس λ –ماتریس نامیده ایم . طیف $Q(\lambda)$ را با $\Lambda(Q)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$\Lambda(Q) = \{\lambda \in c : \det(Q(\lambda)) = 0\} \tag{۱-۱۱}$$

یعنی مجموعه مقادیر ویژهٔ $Q(\lambda)$.

$Q(\lambda)$ را λ – ماتریس منظم می نامند هرگاه $Q(\lambda)$ برای تمام مقادیر λ دقیقاً صفر نباشد. در غیر اینصورت $Q(\lambda)$ نامنظم است . فرض کنیم که $Q(\lambda)$ منظم باشد و این حالت را بررسی می کنیم . $\det Q(\lambda) = \det(M)\lambda^{2n} + 2n$ چند جمله ای مشخصه است . اگر M نامنفرد باشد $Q(\lambda)$ منظم است و $2n$ مقدار ویژهٔ متناهی دارد و اگر M منفرد باشد آنگاه $\det Q(\lambda)$ از درجه $r \le 2n$ است . $r, Q(\lambda)$ مقدار ویژهٔ نامتناهی دارد و $2n - r$ مقدار ویژهٔ متناهی دارد.

به عنوان مثال :

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 6\lambda^2 - 6\lambda & 0 \\ 2\lambda & 6\lambda^2 - 7\lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$$

که

$$K = I, C = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

چون $\det(Q(\lambda)) = -6\lambda^2 + 11\lambda^4 - 12\lambda^3 + 12\lambda^2 - 6\lambda + 1 \neq 0$ است لذا $Q(\lambda)$ منظم است پس ٦ زوج مقدار ویژهٔ (λ_k, x_k) ، $K = 1:6$

λ_k	$1/3$	$1/2$	1	i	$-i$	∞
k	1	2	3	4	5	6
x_k	$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

۵ مقدار ویژهٔ متناهی هستند (اینها ریشه های $Q(\lambda)$ هستند) و یکی از آنها نامتناهی است .[۵]

۱۲ – مثالهای عددی

مثال ۱ : چند جمله ای ماتریسی از درجه ۲ که ضرایب ماتریسی آن به فرم زیر است را در نظر می گیریم :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

برخی از کرانها را محاسبه کرده و در جدول زیر قرار می دهیم :

خطا	مقادیر واقعی	مقادیر محاسبه شده	کران
۰/۰۰۳٦٦۱	٤/۹٦۹۷۲٦	٤/۹٦٦۰۷٥	کران (٥ – ٥)
۰	٥/٦	٥/٦	کران (٥ – ١٤)
۰/۰۱۹۸۷۲	٥/۰۷۰۰۸۱	٥/۰٥۰۲۰۹	کران (۷ – ۲)
۰/۳۱۳٦۹۲	٦/٥۳۰٤٥۸	٦/۲۱٦۷٦٦	کران بالای (۸ – ۳)
۰/۱٥٦٦٦٥	۰/۲۳۳۹٤٤	۰/۰۷۷۲۷۹٥	کران پایین (۸ – ۳)
۰/۰٤۱۲٤۷	۱۰/۰۰۰۰۰۰	۹/۹٥۸۷٥۳	کران (٥ – ۱۳)
۰/٤٤۰۹٤٤	۸/٤٤۹٤۹۰	۸/۰۰۸٥٤٦	کران بالای (۹ – ۱)
۰/٥۳٥۸۹۹	۹/٤٦٤۱۰۱	۱۰/۰۰۰۰۰۰	کران بالای (۱۰ – ۱)

جدول ۱

مثال ۲ : معادلهٔ دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم :

$$\begin{cases} u_n + \varepsilon a(x) u_1 = \Delta u \qquad , \qquad x \in [0,\pi] \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases} \tag{۱–۱۲}$$

جواب را بصورت $u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t) \sin(kx)$ حدس می زنیم . با بکار بردن روش گالرگین[6] معادله دیفرانسیل مرتبهٔ دوم زیر را بدست می آوریم .

6-Galerkin

مقادیر	کرانها	مقادیر	کرانها
۱۱۰/۷۹۰۲٤۳۰	کران پایین (۸ – ۳)	۲۹٦/٥۳۳٦۹۲۲	کران بالای (٥ – ٥)
۱۹۳/٤۲۷۱۷٦۰	کران بالای (۹ – ۱)	۱۳٥/۱۷۲۹۱۳۹	کران(٥ – ١٤)
۳۹۰/۳۱۳۲۱۰۰	کران بالای (۱۰ – ۱)	۲۰۳/۹۷٦۳۰۲۱	کران (۷ – ۲)
۷٥/۷٤۷٦۹۰٥٥	کران (٥ – ۱۳)	۱۹۳/٤٤۲٤۰٦۷	کران (۸ – ۳)

جدول ۲

۱۳- نتایج

با توجه به نتایج عددی بدست آمده ملاحظه می شود که پیدا کردن کران برای مقادیر ویـژه چنـد جمله ایهای ماتریسی یک موضوع جالب و مهم برای بررسی شدن اسـت . همـه کرانهـا اساسـاً بـر مبنای نرمها بیان شده اند و لذا ممکن است ضعفهایی داشته باشند زیرا حتی در حالت خـاص و در مورد یک نرم می تواند با یک مقدار دلخواه از مقادیر ویژه تفاوت کند.(به جـدول۱ مراجعـه شـود) دلیل اصلی استفاده از نرمها این است که معمولاً نرمها می توانند محاسبه شوند و با تخمینی از آنهـا بدست آید . همه ی کرانها با وارون ماتریس ضرایب پیشرو درگیر هستند . زیرا مثلاً هر کـران بـالا می تواند تنها وقتی متناهی باشد که A_m کار نیاز دارد . در بعضی از کاربرد ها A_m قطری است و در جای دیگر ساختاری دارد که به کمک آن می توان $\|A_m^{-1}\|$ را کران دار کرد بدون اینکه A_m^{-1} محاسـبه شود. لازم به یاد آوری است که اساساً رده خاصی از مسائل در موضوع بسیار مفید برای تحقیقـات در آینده نیست اما بجای آن مناسب بودن کرانها را برای رده خاصی از مسائل در موضوع های مهم دنبال می کنیم که پیشرفت در آن می تواند برای ریاضیات کاربردی بسیار ارزشمند باشد.

References

[1] N.J.Higham, F.Tisseur, Bounds for eigenvalues of matrix polynomials, Linear Algebra Appl. , 358(2003)5-22.

[2] R.A. Horn, C.R.Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1985,xiii+561pp ., ISBN 0-521-30587-1.

[3] Q.G. Mohammad, On the zero of polynomials, Amer. Math. Monthly 72(1) (1965)35-38.

[4] Q.G. Mohammad, On the zero of polynomials, Amer. Math. Monthly 72(6) (1965)631-633

[5] F. Tissur, K.Meebergen, The quadratic eigenvalue problems, SIAM Rev, 43(2)(2001).

[٦] پایان نامه کارشناسی ارشد ، دانشگاه آزاد اسلامی لاهیجان ، ابراهیم عباسی