

بدست آوردن معادلات حرکت پاندول فضایی و حل آنها برای شرایط اولیه مختلف

بهمن مهری^۱ محمد مهدی فرازمنند^۲

^۱ دانشکده علوم ریاضی - دانشگاه صنعتی شریف

^۲ دانشکده فنی مهندسی - دانشگاه صنعتی شریف

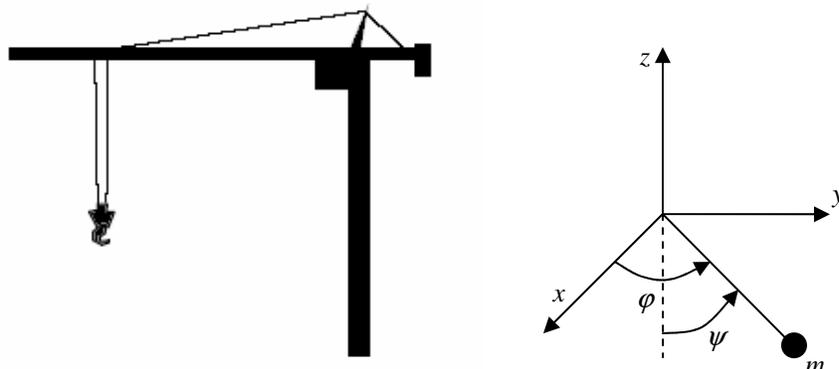
چکیده

در این مقاله به مطالعه پاندول فضایی و یافتن و حل معادلات آن برای شرایط اولیه مختلف می پردازیم. پاندول فضایی مدل ساده بسیاری از پدیده های فیزیکی و مسائل مهندسی است. برای نمونه جرثقیل های بزرگ (ساختمانی) در حال حمل بار را می توان با پاندول مدل کرد. در اینجا ابتدا به روش لاگرانژ معادلات حرکت را استخراج کرده سپس آنها را به روش عددی (برای حالت کلی) و تحلیلی (با فرض ساده شونده) حل می کنیم. در انتها نشان می دهیم که سرعت شعاعی پاندول چه تأثیری روی ماکزیمم انحرافش از حالت تعادل دارد.

کلمات کلیدی: پاندول فضایی، دینامیک لاگرانژی، دستگاه معادلات دیفرانسیل، روش عددی حل معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرالی

مقدمه

یک پاندول فضایی را مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید. فرض کنید این پاندول از حالت تعادل خارج شده و شروع به نوسان کند. جرم کابل را ناچیز فرض می کنیم. فاصله جرم m تا مبدأ را با r ، زاویه ای که کابل با محور z می سازد را با ψ و زاویه ای که تصویر کابل در صفحه $x-y$ با محور x می سازد را با φ نشان می دهیم.



شکل ۱

علاوه بر این که جرم بر اثر نوسان سرعت زاویه‌ای دارد فرض می‌کنیم که طول کابل نیز متغیر باشد. در این حالت سرعتی در راستای شعاعی نیز خواهیم داشت. در نتیجه مدل پاندول بسیار نزدیک به یک جرثقیل ساختمانی بزرگ که باری به انتهای آن آویزان است می‌شود. بار متصل به انتهای کابل جرثقیل در اثر انحرافات اولیه کوچک شروع به نوسان می‌کند که اگر جرثقیل در حال بالا بردن یا پایین آوردن بار باشد به آن سرعت شعاعی نیز می‌دهد. با داشتن معادلات حرکت و حل آن می‌توانیم ماکزیمم انحراف بار از حالت تعادل و تأثیرات سرعت شعاعی آن بر این دامنه را بیابیم.

معادلات حرکت

با توجه به آن چه گفته شد سرعت جرم m برابر است با

$$\vec{V} = \dot{r} \vec{e}_r + (r \sin \psi \dot{\phi}) \vec{e}_\phi + (r \dot{\psi}) \vec{e}_\psi \quad (1)$$

بنابراین انرژی جنبشی آن برابر است با

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r \sin \psi \dot{\phi})^2 + (r \dot{\psi})^2] \quad (2)$$

از طرفی اگر طول اولیه کابل r_0 باشد انرژی پتانسیل جرم m برابر خواهد بود با

$$V = mg(r_0 \cos \psi_0 - r \cos \psi) \quad (3)$$

بنابراین تابع لاگرانژ این سیستم عبارت است از

$$L = T - V = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + (r \sin \psi \dot{\phi})^2 + (r \dot{\psi})^2] - mg(r_0 \cos \psi_0 - r \cos \psi) \quad (4)$$

از اصل همیلتون نتیجه می‌شود که روابط زیر باید در یک سیستم دینامیکی که نیروی ناپایستار ندارد برقرار باشد.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots \quad (5)$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (۶)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (۷)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad (۸)$$

با جاگذاری (۵) در (۶) و (۷) و (۸) به ترتیب و با کوچک فرض کردن انحرافات یعنی زاویه ψ ($\sin \psi \approx \psi$) و $\cos \psi \approx 1$ داریم:

$$\ddot{r} = r\dot{\psi}^2 \dot{\varphi}^2 + r\dot{\psi}^2 + g \quad (۹)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}}{r} \dot{\varphi} - \frac{2\dot{\psi}}{\psi} \dot{\varphi} \quad (۱۰)$$

$$\ddot{\psi} = -\frac{2\dot{r}}{r} \dot{\psi} + \psi \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{r} \psi \quad (۱۱)$$

روابط (۹)، (۱۰) و (۱۱) معادلات حرکت این سیستم هستند.

تبدیل به دستگاه معادلات دیفرانسیل

در این بخش معادلات دیفرانسیل ۹ تا ۱۱ را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می‌کنیم. برای این کار تغییرات زیر را اعمال می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x_1 &= r & x_4 &= \dot{r} \\ x_2 &= \varphi & x_5 &= \dot{\varphi} \\ x_3 &= \psi & x_6 &= \dot{\psi} \end{aligned} \quad (۱۲)$$

در نتیجه معادلات حرکت تبدیل به دستگاه زیر می‌شوند.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = x_1 x_3 x_5^2 + x_1 x_6^2 + g \\ \dot{x}_5 = -\frac{2x_4}{x_1} x_5 - \frac{2x_6}{x_3} x_5 \\ \dot{x}_6 = -\frac{2x_4}{x_1} x_6 + x_3 x_5^2 - \frac{g}{x_1} x_3 \end{cases} \quad (۱۳)$$

شرایط اولیه نیز در حالت کلی عبارتند از

$$\begin{aligned} x_1(0) &= r_0 & x_4(0) &= \dot{r}(0) \\ x_2(0) &= \varphi_0 & x_5(0) &= \dot{\varphi}(0) \\ x_3(0) &= \psi_0 & x_6(0) &= \dot{\psi}(0) \end{aligned} \quad (14)$$

توجه شود که x_i ها تابعی از زمان (t) هستند.

$$x_i = x_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (15)$$

در اکثر کاربردهای واقعی جرم با سرعت شعاعی ثابتی بالا یا پایین برده می شود. در نتیجه در اینجا \dot{r} را ثابت و برابر v_0 فرض می کنیم. بنابراین $\dot{r} = 0$ و معادلات حرکت تبدیل خواهند شد به

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = 0 \\ \dot{x}_5 = -\frac{2x_4}{x_1} x_5 - \frac{2x_6}{x_3} x_5 \\ \dot{x}_6 = -\frac{2x_4}{x_1} x_6 + x_3 x_5^2 - \frac{g}{x_1} x_3 \end{cases} \quad (16)$$

حل دستگاه به روش عددی

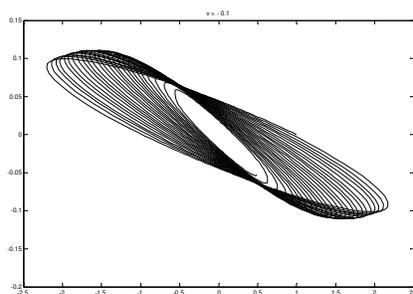
در اینجا شرایط اولیه را این گونه در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} x_1(0) &= r_0 = 10 & x_4(0) &= \dot{r}(0) = v_0 \\ x_2(0) &= \varphi_0 = 0 & x_5(0) &= \dot{\varphi}(0) = 0.1 \\ x_3(0) &= \psi_0 = 0.1 & x_6(0) &= \dot{\psi}(0) = -0.2 \end{aligned} \quad (17)$$

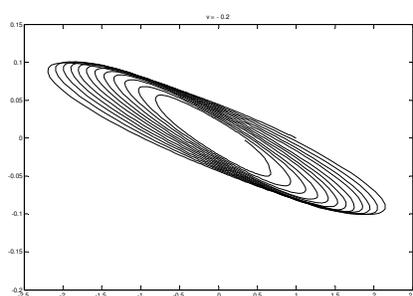
این دستگاه را به روش عددی برای مقادیر مختلف v_0 حل کرده و تصویر مسیر حرکت جرم m را در صفحه $x-y$ در هر مورد به دست آورده ایم. بالا بردن وزنه ($v_0 < 0$) و پایین آوردن آن ($v_0 > 0$) هر یک جداگانه بررسی شده اند و نتایج در شکل های ۲ تا ۱۰ آورده شده است.

بالا بردن جرم

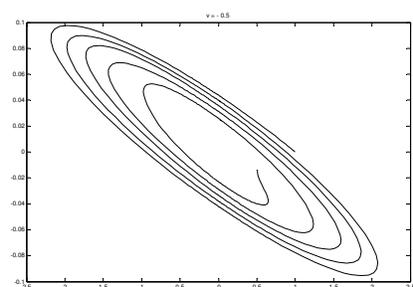
شکل های ۲ تا ۵ مربوط به بالا بردن جرم m با سرعت های مختلف است. \max نشان دهنده ماکزیمم انحراف جرم از حالت تعادل (دامنه حرکت) است.



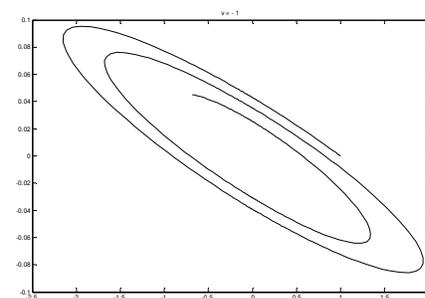
شکل ۲: $v_0 = -0.1$ و $\max = 2.2044$



شکل ۳: $v_0 = -0.2$ و $\max = 2.1990$



شکل ۴: $v_0 = -0.5$ و $\max = 2.1819$

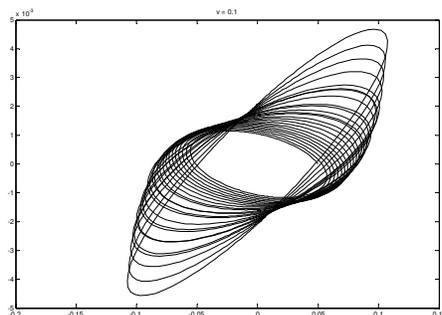


شکل ۵: $v_0 = -1$ و $\max = 2.1515$

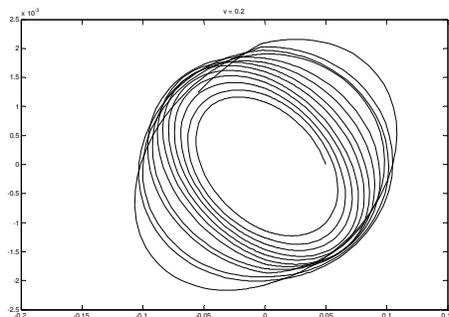
قابل توجه است که با افزایش سرعت بالا کشیدن بار میزان حداکثر انحراف از حالت تعادل (max) کمتر می شود. در نتیجه برای یک حالت کاربردی مثل جرثقیل برای بالا کشیدن جسم بهینه است که سرعت بالا کشیدن تا حد امکان بالا باشد تا در زمان صرفه جویی گردد بدون این که مشکلی از نظر برخورد بار با دیواره ها داشته باشیم.

پایین بردن جسم

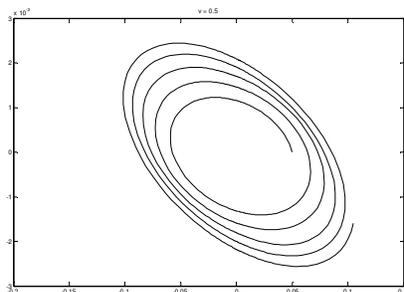
شکل های ۶ تا ۹ مربوط به پایین بردن جرم m با سرعت های مختلف است. باز هم max نشان دهنده ماکزیمم انحراف جرم از حالت تعادل (دامنه حرکت) است.



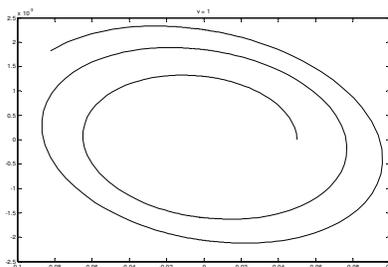
شکل ۶: $v_0 = 0.1$ و $\max = 0.1079$



شکل ۷: $v_0 = 0.2$ و $\max = 0.1083$



شکل ۸: $v_0 = 0.5$ و $\max = 0.1047$



شکل ۹: $v_0 = 1$ و $\max = 0.0959$

مشاهده می گردد که در پایین بردن با افزایش سرعت شعاعی، ماکزیمم انحراف از حالت تعادل (\max) از الگوی خاصی پیروی نمی کند.

تبدیل معادله دیفرانسیل به معادله انتگرالی

برای تبدیل معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم به یک معادله انتگرالی ابتدا مدل را اندکی ساده می کنیم. بدین منظور از سرعت شعاعی جرم m صرف نظر می کنیم یعنی فرض می کنیم طول آونگ مقدار ثابت l است. در نتیجه $\dot{r} = \dot{x}_1 = 0$ و دستگاه (۱۳) تبدیل می شود به

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = 0 \\ \dot{x}_5 = -\frac{2x_6}{x_3} x_5 \\ \dot{x}_6 = x_3 x_5^2 - \frac{g}{l} x_3 \end{cases} \quad (18)$$

از دو معادله آخر دستگاه فوق می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{d}{dt}(x_3^2 x_5) = 0 \quad (19)$$

$$\dot{x}_6 + \frac{g}{l} x_3 = x_3 x_5^2 \quad (20)$$

یا

$$\frac{d}{dt}(\psi^2 \dot{\psi}) = 0 \quad (21)$$

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l} \psi = \psi \dot{\psi}^2 \quad (22)$$

با استفاده از روش لاگرانژ و نوشتن معادلات حرکت نیز می توانستیم به همین روابط برسیم.

از رابطه (۲۱) نتیجه می شود

$$\psi^2 \dot{\phi} = K \quad (23)$$

که ثابت K از شرایط اولیه به دست می آید.

با جاگذاری برای $\dot{\phi}$ از (۲۳) در (۲۲) داریم

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{\ell} \psi = \frac{K^2}{\psi^3} \quad (24)$$

در صورتی که ψ در زمانی مثل t_0 صفر گردد آنگاه از (۲۳) ثابت K برابر صفر خواهد بود و معادله (۲۴) به

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{\ell} \psi = 0$$

شهود از فیزیک مساله نیز به دست می آید که اگر پاندول از حالت عمودی تحریک شده شروع به حرکت کند همیشه در یک صفحه مجازی باقی می ماند.

اگر همواره $\psi \neq 0$ ، جواب تحلیلی معادله دیفرانسیل ۲۴ (به فرم یک معادله انتگرالی) عبارت است از

$$\psi(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{K^2}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-s) \frac{ds}{\psi^3(s)} \quad (25)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} \quad \text{که}$$

ثابت های A و B از شرایط اولیه محاسبه می شوند.

$$A = \frac{1}{\omega} \frac{d\psi}{dt}(t=0) \quad \text{و} \quad B = \psi(t=0) \quad (26)$$

از طرفی داریم

$$\psi(0) = B \quad (27)$$

$$\psi\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -B + \frac{K^2}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\omega s) \frac{ds}{\psi^3(s)} \quad (28)$$

$$\psi\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = B - \frac{K^2}{\omega} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega s) \frac{ds}{\psi^3(s)} \quad (29)$$

اگر $\psi(\frac{\pi}{\omega}) - B$ و $\psi(\frac{2\pi}{\omega}) - B$ مختلف علامه باشند آنگاه نقطه ای مانند T وجود دارد که

$$\psi(0) = \psi(T) = B, \quad \frac{\pi}{\omega} < T < \frac{2\pi}{\omega} \quad (30)$$

از آنجا که نوع تحریک اولیه مقدار B را تعیین می کند این شرط قابل دسترسی است.
حال تعریف می کنیم

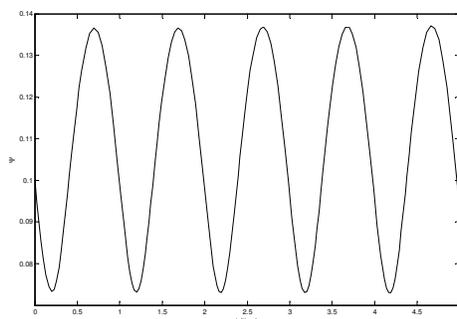
$$y(t) = \begin{cases} \psi(t) - B & 0 < t < T \\ -\psi(2T - t) + B & T < t < 2T \end{cases} \quad (31)$$

$y(t)$ یک تابع پیوسته است که مشتقش نیز پیوسته است.

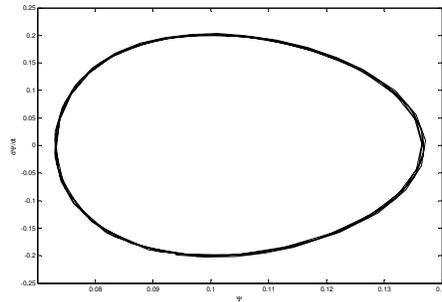
$$y(t) = \begin{cases} \psi'(t) & 0 < t < T \\ \psi'(2T - t) & T < t < 2T \end{cases} \quad (32)$$

در نتیجه $y(t) \in C^1$ و تابع متناوب $y(t)$ با دوره تناوب $2T$ جواب معادله دیفرانسیل (۲۴) است.
با حل عددی معادله (۲۴) و رسم تغییرات ψ بر حسب زمان و رسم فضای فاز می توان این رفتار تناوبی را به وضوح مشاهده کرد. شکل ۱۰ و ۱۱ این نمودارها را نشان می دهند. شرایط اولیه همان شرایط رابطه (۱۷) هستند.

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 & \dot{\varphi}(0) &= 0.1 \\ \psi(0) &= 0.1 & \dot{\psi}(0) &= -0.2 \end{aligned} \quad (33)$$

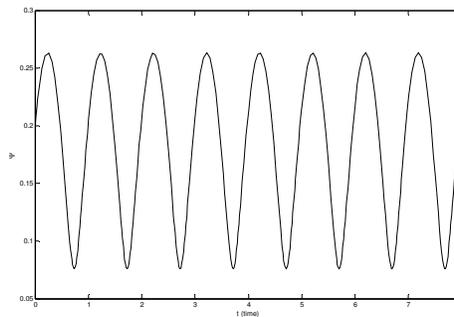


شکل ۱۰: تغییرات ψ بر حسب زمان با شرایط اولیه $\psi(0) = 0.1$, $\dot{\psi}(0) = -0.2$

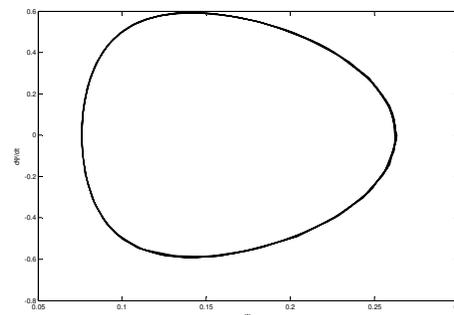


شکل ۱۱: فضای فاز با شرایط اولیه $\psi(0) = 0.1$, $\dot{\psi}(0) = -0.2$

همین نتیجه را می توان با شرایط اولیه دیگر نیز دید. برای نمونه شکل های ۱۲ و ۱۳ نتیجه را برای شرایط اولیه متفاوتی نشان می دهند.



شکل ۱۲: تغییرات ψ بر حسب زمان با شرایط اولیه $\psi(0) = 0.2$, $\dot{\psi}(0) = 0.5$



شکل ۱۳: فضای فاز با شرایط اولیه $\psi(0) = 0.2$, $\dot{\psi}(0) = 0.5$

نتایج

در مساله آونگ فضایی با طول متغیر و سرعت شعاعی ثابت، در بالا کشیدن وزنه ($\dot{r} < 0$) هر چه سرعت بالا بردن بیشتر باشد انحراف از حالت تعادل کمتر است به خصوص در جرثقیل های بزرگ (ساختمانی) که انجام دادن کار در حداقل زمان مطرح است بهتر است تا جایی که مقاومت سازه و توان در دسترس اجازه می دهد سرعت را بالا ببریم ولی در پایین آوردن ($\dot{r} > 0$) با زیاد شدن سرعت ماکزیمم انحراف از حالت تعادل از الگوی خاصی پیروی نکرده و احتمالاً بتوان مقدار بهینه ای برای این سرعت یافت.

برای آونگ فضایی با طول ثابت نیز با تبدیل معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرالی نشان دادیم که یک جواب متناوب برای معادله حرکتش وجود دارد.

منابع

- [1] B.Jerman , p.podrzaj, J.Kramar , An investigation of slewing-crane dynamics during slewing motion – development and verification of a mathematical model , International Journal of mechanical Sciences 46 (2004) 729 -750.
- [2] Coddington, Earl A., An introduction to ordinary differential equations, Prentice – hall, 1961.
- [3] F.Ju, y.s. choo, f.s. Cui, Dynamic response of tower crane induced by the pendulum motion of the payload, International Journal of Solids and structures 43 (2006) 376-389.
- [4] Hale, Jack K, Functional differential equations, springer – Verlag, 1977.
- [5] Kilmister, C.W., Lagrangian dynamics : an introduction for Students , Logos p., 1968.
- [6] L.C. young, calculus of variations and control theory, Academic Press, 1976.
- [7] Lutzky M., Conserved Quantities and Velocity Dependent Symmetries in Lagrangian dynamics , Journal of nonlinear dynamics , vol. 33, No. 2 , pp 393-396, 1998.
- [8] Mohamed Al-Hussein, Muhammad Athar Niaz , Haitao Yu, Hyoungkwan Kim, integrating 3D visualization and simulation for tower crane operations on construction sites , Journal of Automation in Construction 15 (2006) 554-562.