

رتبه‌بندی تحلیل پوششی داده‌های فازی بر مبنای داده‌های آماری و فاصله‌ی اطمینان آماری

عباسعلی نورا^۱ محمد تقی یحیی پور^۲

^۱ گروه ریاضی - دانشگاه سیستان و بلوچستان

^۲ گروه ریاضی - دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک تکنیک غیرپارامتری برای اندازه‌گیری کارآیی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) است که در آن امکان استفاده از چندین ورودی و چندین خروجی وجود دارد. در مدل DEA با تشکیل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی مناسب کارایی هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده محاسبه می‌شود. در این مقاله تحلیل پوششی داده‌های فازی (FDEA) بر اساس فاصله اطمینان آماری سطح $(1-\alpha)$ بررسی می‌شود و با تبدیل به برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای، به روش نور آن را حل، و جوابی در فاصله اطمینان سطح $(1-\alpha)$ برای مساله ارائه می‌گردد و با استفاده از رتبه‌بندی ارائه شده در این مقاله به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده پرداخته و این روش را برای چند مثال مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، برنامه‌ریزی خطی فازی، اعداد فازی

مقدمه

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی پروفیسور لطفی عسگرزاده در بسیاری از شاخه‌های علوم وارد شده است. در همین راستا، برنامه‌ریزی خطی و تحلیل پوششی داده‌ها DEA نیز توجه خاصی را به این شاخه از علم معطوف کرده است. حل مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفی فازی توسط زیمرمن (۱۹۷۶) [۹]، برنامه‌ریزی با ضرایب فازی و حل آن توسط تاناکا و آسال (۱۹۸۴) [۸]، حل مسائل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای و فازی توسط تانگ شوچنگ (۱۹۹۴) [۱۰] و تحلیل پوششی داده‌های نادقیق توسط دیمیتریس دیس پوتیز (۲۰۰۲) [۷] و همکاران از آن جمله هستند. اما برنامه‌ریزی خطی فازی با داده‌های آماری کمتر مورد توجه قرار گرفته است. ژرشان چانگ (۲۰۰۲) [۴] برنامه‌ریزی خطی فازی را بر پایه‌ی داده‌های آماری بررسی نموده است.

در این مقاله از داده‌های آماری برای مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها استفاده می‌کنیم. ابتدا واحدهای تصمیم‌گیرنده را با ورودی‌ها و خروجی‌های فازی در نظر می‌گیریم. وقتی داده‌ها بصورت اعداد فازی باشند در این حالت با مساله برنامه ریزی خطی با ضرایب فازی سروکار داریم، که از دو روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با ضرایب فازی استفاده می‌کنیم. در روش اول با استفاده از مفهوم α برش جواب بهین مساله را به ازاء α ‌های مختلف بصورت بازه‌ای از روش نور محاسبه می‌کنیم. روش دوم با استفاده از رتبه بندی فاصله علامتدار برای اعداد فازی مساله برنامه‌ریزی خطی فازی را به مساله برنامه‌ریزی خطی قطعی تبدیل می‌کنیم.

ابتدا مساله تحلیل پوششی داده‌ها را بر اساس داده‌های آماری و فاصله اطمینان آماری مورد ارزیابی قرار داده سپس تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های فازی را به سه روش مورد ارزیابی و رتبه بندی قرار می‌دهیم. در روش اول مدل DEA فازی را با استفاده از فاصله علامتدار DEA فازی را به برنامه ریزی خطی تبدیل و کارآیی آنها را محاسبه می‌نماییم. در روش دوم با α برش‌ها به برنامه ریزی خطی بازه‌ای تبدیل کرده و با استفاده از روش نور بازه کارآیی آن را محاسبه نموده، سپس با بکارگیری رتبه بندی بازه‌ای، DMU ‌ها را رتبه بندی می‌کنیم. در روش سوم با به کارگیری از روشی جدید مبنی بر دسته بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارای قوی و کارا DMU ‌ها را مورد ارزیابی قرار داده و رتبه بندی می‌نماییم. در پایان این روش‌ها را در ارتباط با مثال‌هایی به کار می‌بریم.

تعیین کارآیی تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس داده‌های آماری و بازه اطمینان نامتقارن

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیرنده را که دارای m ورودی و s خروجی هستند در نظر می‌گیریم و از

برای نمایش ورودی‌ها که در آن فرض می‌کنیم $x_{ij} = \frac{1}{N_{ij}} \sum_{p=1}^{n_{ij}} x_{ijp}$ مقدار متوسط ورودی‌ها

باشد استفاده می‌کنیم. و از $y_{rjp} = 1, 2, \dots, n_{rj}$ برای نمایش خروجی‌ها استفاده می‌کنیم که در آن

مقدار متوسط خروجی‌ها می‌باشد. فرض کنید $0 < \alpha_j < 1$ ، $j = 1, 2$ ، $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ باشد آنگاه

می‌توان بازه اطمینان آماری نامتقارن $(1-\alpha)$ زیر برای x_{ij} بدست آورد:

$$x_{ij} \in [x_{ij}^l, x_{ij}^u] = [x_{ij} - w_{ij}(\alpha_1), x_{ij} + w_{ij}(\alpha_2)] \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$w_{ij}(\alpha) = t_{n_{ij}-1}(\alpha) \left[\frac{1}{n_{ij}(n_{ij}-1)} \sum_{p=1}^{n_{ij}} (x_{ijp} - x_{ij})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

همچنین فرض کنید $0 < \alpha_j < 1$ ، $j = 3, 4$ باشد آنگاه می توان بازه اطمینان آماری نامتقارن $(1 - \alpha)$ زیرا برای y_{rj} به دست آورد:

$$y_{rj} \in [y_{rj}^l, y_{rj}^u] = [y_{rj} - \theta_{rj}(\alpha_3), y_{rj} + \theta_{rj}(\alpha_4)] \quad r = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$\theta_{rj}(\alpha) = t_{n_j-1}(\alpha) \left[\frac{1}{n_{rj}(n_{rj}-1)} \sum_{p=1}^{n_{rj}} (y_{rjp} - y_{rj})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی را با داده های فوق برای DMU_o به فرم زیر در نظر می گیریم:

$$Max \theta_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \quad (3)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

مدل فوق را می توان به روش نور حل نمود و دو مسأله نامطلوبترین و مطلوبترین مقدار زیر را به دست آورد:

$$Max \theta_o^l = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^l$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^u = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^l - \sum_{i=1}^m v_i x_{io}^u \leq 0$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^u - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^l \leq 0$$

$$u_r \geq 0$$

$$v_i \geq 0$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0$$

$$r = 1, 2, \dots, s$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

(4)

$$\text{Max } \theta_0^u = \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}^u \quad (5)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}^l = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}^u - \sum_{i=1}^m v_i x_{i0}^l \leq 0$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^l - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^u \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq 0$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m$$

مدل (۴) که از حل مدل (۳) به دست می آید مؤید این نتیجه است که DMU_o (واحد تحت بررسی) در بدترین شرایط (ورودیهای DMU_o در کران بالا و خروجیهای آن در کران پایین) سایر DMU ها در ایده آل ترین حالت (ورودیها آنها در کران پائین و خروجیهای آن در کران بالا) قرار دارند. هر واحد تصمیم گیرنده را که با مدل (۳) ارزیابی می کنیم مقدار کارایی که برای واحد تحت ارزیابی از این مدل بدست می آوریم. در یک بازه قرار دارد که کران بالای این بازه را از مدل (۵) و کران پائین این بازه را از حل مدل (۴) می توان بدست آورد و براحتی می توان نشان داد که $\theta_o \in [\theta_o^l, \theta_o^u]$ با توجه به اینکه برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده در این روش بازه کارایی $[\theta_o^l, \theta_o^u]$ به دست آمده برای رتبه بندی این واحدها می توان از رتبه بندی بازه ای (ارایه شده در بخش ۴) استفاده نمود.

تحلیل پوششی داده ها با اعداد فازی

با فرض اینکه ورودی ها و خروجی های واحد های تصمیم گیرنده بصورت اعداد فازی LR هستند. شکل کلی مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی را در نظری می گیریم.

$$\text{Max } \sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{r0} \quad (6)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{i0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

که در آن $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}, \underline{y}_{rj}, \bar{y}_{rj})_{LR}$ ، $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}, \underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij})_{LR}$ اعداد فازی LR می باشند، y_{rj} ، x_{ij} ، \underline{y}_{rj} ، \underline{x}_{ij} ، \bar{y}_{rj} ، \bar{x}_{ij} مدها، \tilde{y}_{rj} ، \tilde{x}_{ij} پهنه های چپ و \bar{y}_{rj} ، \bar{x}_{ij} پهنه های راست می باشند.

تعیین کارآیی تحلیل پوششی داده های فازی با استفاده از فاصله علامتدار

تعریف (عدد فازی سطح λ): اگر تابع عضویت مجموعه فازی \tilde{A} در R بصورت زیر باشد آنگاه \tilde{A} ، عدد فازی سطح λ ، $0 < \lambda \leq 1$ نامیده می شود و بصورت $\tilde{A} = (p, q, r; \lambda)$ می نویسند [۴].

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(x-p)}{(q-p)} & p \leq x \leq q \\ \frac{\lambda(r-x)}{(r-q)} & q \leq x \leq r \\ 0 & o.w \end{cases} \quad (۷)$$

$F_N(\lambda)$ خانواده از همه اعداد فازی سطح λ ، $0 < \lambda \leq 1$ می نامیم یعنی:

$$F_N(\lambda) = \{(p, q, r; \lambda) \mid \forall p < q < r, \quad p, q, r \in R\} \quad 0 < \lambda \leq 1$$

تعریف فاصله علامتدار d^* بصورت زیر تعریف می شود [۵]:

۱- اگر $a > 0$ و $d^*(a, 0) = a$ باشد به طور ضمنی a در سمت راست 0 قرار دارد و فاصله آن از 0 برابر است با $d^*(a, 0) = a$ ، $a, 0 \in R$.

۲- اگر $a < 0$ و $d^*(a, 0) = a$ باشد به طور ضمنی a در سمت چپ 0 قرار دارد و فاصله آن از 0 برابر است با $-d^*(a, 0) = -a$ ، $a, 0 \in R$.

برای هر $\tilde{A} = (p, q, r; \lambda) \in F_N(\lambda)$ ، برش α از $0 \leq \alpha \leq \lambda$ بازه $[A'(\alpha), A''(\alpha)]$ است که $A'(\alpha) = p + (q-p)\alpha/\lambda$ نقطه سمت چپ α برش و $A''(\alpha) = r - (r-q)\alpha/\lambda$ نقطه سمت راست α برش است.

فاصله علامتدار بازه فازی $[A'(\alpha)_\alpha, A''(\alpha)_\alpha]$ سطح α از $\tilde{0}_1$ (محور y) بصورت

$$d([A'(\alpha)_\alpha, A''(\alpha)_\alpha], \tilde{0}_1) = \frac{1}{2}[p+r+(2q-p-r)]\alpha/\lambda$$

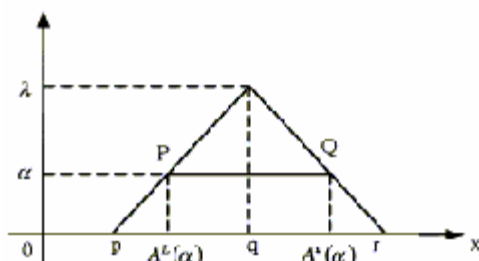
تعریف می شود که یک تابع پیوسته از α در $[0, \lambda]$ است. از تعریف انتگرال برای به دست آوردن میانگین استفاده می کنیم.

تعریف اگر $\tilde{A} = (p, q, r; \lambda) \in F_N(\lambda)$ باشد آنگاه فاصله علامتدار \tilde{A} از $\tilde{0}_1$ بصورت زیر است [۴]:

$$d(\tilde{A}, \tilde{0}_1) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{1}{2} [p + q + (2q - p - r)\alpha/\lambda] d\alpha = \frac{1}{4}(2q + p + r)$$

تعریف برای هر $\lambda \in (0, 1]$ ، رتبه بندی اعداد فازی سطح λ در $F_N(\lambda)$ به صورت زیر تعریف می شود [۴]:

$$\begin{aligned} \tilde{B} < \tilde{A} & \quad \text{iff} \quad d(\tilde{B}, \tilde{0}_1) < d(\tilde{A}, \tilde{0}_1) \\ \tilde{B} \approx \tilde{A} & \quad \text{iff} \quad d(\tilde{B}, \tilde{0}_1) = d(\tilde{A}, \tilde{0}_1) \\ \tilde{A} < \tilde{B} & \quad \text{iff} \quad d(\tilde{A}, \tilde{0}_1) < d(\tilde{B}, \tilde{0}_1) \end{aligned}$$



شکل ۱: برش α از \tilde{A}

گزاره ۱ سه تایی $(F_N(\lambda), \approx, <)$ در اصل تثلیث صدق می کند [۴]:

مساله (۶) را در نظر می گیریم، با استفاده از تعریف ۲ و با در نظر گرفتن $\lambda = 1$ فاصله علامتدار

بصورت زیر می باشد: $\tilde{y}_{ij} = (y_{ij}, \underline{y}_{ij}, \bar{y}_{ij})_{LR}$, $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}, \underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij})_{LR}$

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}_{ij}, \tilde{0}_1) &= \int_0^1 \frac{1}{2} [2x_{ij} + \bar{x}_{ij}R^{-1}(\alpha) - \underline{x}_{ij}L^{-1}(\alpha)] d\alpha \\ d(\tilde{y}_{ij}, \tilde{0}_1) &= \int_0^1 \frac{1}{2} [2y_{ij} + \bar{y}_{ij}R^{-1}(\alpha) - \underline{y}_{ij}L^{-1}(\alpha)] d\alpha \end{aligned} \quad (8)$$

با قرار دادن مقادیر (۸) در مساله (۶) به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \sum_{r=1}^s u_r d(\tilde{y}_{ro}, \tilde{0}_1) \\
 & \text{s.to} \\
 & \sum_{i=1}^m v_i d(\tilde{x}_{io}, \tilde{0}_1) = 1 \quad (9) \\
 & \sum_{r=1}^s u_r d(\tilde{y}_{rj}, \tilde{0}_1) - \sum_{i=1}^m v_i d(\tilde{x}_{ij}, \tilde{0}_1) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
 & u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \\
 & v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

اگر اعداد فازی مفروض در مدل (۶) در حالت خاص اعداد فازی مثلثی $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^l, x_{ij}^m, x_{ij}^u)$ $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}^l, y_{rj}^m, y_{rj}^u)$ باشد آنگاه:

$$d(\tilde{x}_{ij}, \tilde{0}_1) = \int_0^1 \frac{1}{2} [x_{ij}^l + x_{ij}^u + (2x_{ij}^m - x_{ij}^l - x_{ij}^u)\alpha] d\alpha = \frac{1}{4} (2x_{ij}^m + x_{ij}^l + x_{ij}^u) \quad (10)$$

$$d(\tilde{y}_{rj}, \tilde{0}_1) = \int_0^1 \frac{1}{2} [y_{rj}^l + y_{rj}^u + (2y_{rj}^m - y_{rj}^l - y_{rj}^u)\alpha] d\alpha = \frac{1}{4} (2y_{rj}^m + y_{rj}^l + y_{rj}^u)$$

با قرار دادن مقادیر (۱۰) در مساله (۱۲) به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \frac{1}{4} \sum_{r=1}^s (2y_{ro}^m + y_{ro}^l + y_{ro}^u) u_r \\
 & \text{s.to} \\
 & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m (2x_{io}^m + x_{io}^l + x_{io}^u) v_i = 1 \quad (11) \\
 & \frac{1}{4} \sum_{r=1}^s (2y_{rj}^m + y_{rj}^l + y_{rj}^u) u_r - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m (2x_{ij}^m + x_{ij}^l + x_{ij}^u) v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\
 & u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \\
 & v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

مدل های (۹) و (۱۱) همان مدل مضربی CCR در ماهیت ورودی با داده های قطعی می باشد. که برای رتبه بندی این DMU ها از رتبه بندی مدل های MAJ [۶] استفاده شده است.

تعیین بازه کارآیی با استفاده از α برش

در مساله (۶)، α برش اعداد فازی $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}, \underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij})_{LR}$ ، $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}, \underline{y}_{rj}, \bar{y}_{rj})_{LR}$ بصورت زیر می باشد:

$$(\tilde{x}_{ij})_{\alpha} = [x_{ij} - \underline{x}_{ij}L^{-1}(\alpha), x_{ij} + \bar{x}_{ij}R^{-1}(\alpha)] \quad (12)$$

$$(\tilde{y}_{rj})_{\alpha} = [y_{rj} - \underline{y}_{rj}L^{-1}(\alpha), y_{rj} + \bar{y}_{rj}R^{-1}(\alpha)]$$

پس از جاگذاری روابط (۱۲) در رابطه مدل (۶) مضربی CCR [۳] در ماهیت ورودی با داده های بازه ای زیر بدست می آید:

$$\theta_o = \text{Max} \sum_{r=1}^s [y_{ro} - \underline{y}_{ro}L^{-1}(\alpha), y_{ro} + \bar{y}_{ro}R^{-1}(\alpha)]u_r$$

(۱۳)

s.t.

$$\sum_{i=1}^m [x_{io} - \underline{x}_{io}L^{-1}(\alpha), x_{io} + \bar{x}_{io}R^{-1}(\alpha)]v_i = 1$$

$$\sum_{r=1}^s [y_{rj} - \underline{y}_{rj}L^{-1}(\alpha), y_{rj} + \bar{y}_{rj}R^{-1}(\alpha)]u_r$$

$$\sum_{i=1}^m [x_{ij} - \underline{x}_{ij}L^{-1}(\alpha), x_{ij} + \bar{x}_{ij}R^{-1}(\alpha)]v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

مساله برنامه ریزی خطی بازه ای فوق را می توان با استفاده از روش نور [۱] به دو مساله مطلوبترین مقدار و نامطلوبترین مقدار به صورت زیر تبدیل نمود:

$$\text{Max} \sum_{r=1}^s [y_{ro} + \bar{y}_{ro}R^{-1}(\alpha)]u_r = \theta_o^u$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m [x_{io} - \underline{x}_{io}L^{-1}(\alpha)]v_i = 1 \quad (14)$$

$$\sum_{r=1}^s [y_{rj} + \bar{y}_{rj}R^{-1}(\alpha)]u_r - \sum_{i=1}^m [x_{ij} - \underline{x}_{ij}L^{-1}(\alpha)]v_i \leq 0 \quad j = o$$

$$\sum_{r=1}^s [y_{rj} - \underline{y}_{rj}L^{-1}(\alpha)]u_r - \sum_{i=1}^m [x_{ij} + \bar{x}_{ij}R^{-1}(\alpha)]v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad j \neq o$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

و

$$\begin{aligned} & \text{Max} \sum_{r=1}^s [y_{ro} - \underline{y}_{ro} L^{-1}(\alpha)] u_r = \theta_o^l \\ & \text{s.t.} \end{aligned} \tag{۱۵}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m [x_{io} + \bar{x}_{io} R^{-1}(\alpha)] v_i = 1 \\ & \sum_{r=1}^s [y_{rj} - \underline{y}_{rj} L^{-1}(\alpha)] u_r - \sum_{i=1}^m [x_{ij} + \bar{x}_{ij} R^{-1}(\alpha)] v_i \leq 0 \quad j = o \\ & \sum_{r=1}^s [y_{rj} + \bar{y}_{rj} R^{-1}(\alpha)] u_r - \sum_{i=1}^m [x_{ij} - \underline{x}_{ij} L^{-1}(\alpha)] v_i \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad j \neq o \\ & u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \\ & v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

بنابراین مقدار بهینه θ_o مساله (۱۳) همواره در بازه $[\theta_o^l, \theta_o^u]$ قرار دارد.

حال دو آل مدل های فوق به ترتیب برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \theta_o^u \\ & \text{s.t.} \end{aligned} \tag{۱۶}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [x_{ij} + \bar{x}_{ij} R^{-1}(\alpha)] \lambda_j + [x_{io} - \underline{x}_{io} L^{-1}(\alpha)] \lambda_o \leq [x_{io} - \underline{x}_{io} L^{-1}(\alpha)] \theta_o^u \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [y_{rj} - \underline{y}_{rj} L^{-1}(\alpha)] \lambda_j + [y_{ro} + \bar{y}_{ro} R^{-1}(\alpha)] \lambda_o \geq [y_{ro} + \bar{y}_{ro} R^{-1}(\alpha)] \quad r = 1, \dots, s \\ & \lambda_j \geq 0 \\ & \lambda_o \geq 0 \\ & \theta_o^u \geq \bar{z}^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Min} \theta_o^l \\ & \text{s.t.} \end{aligned} \tag{۱۷}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [x_{ij} - \underline{x}_{ij} L^{-1}(\alpha)] \lambda_j + [x_{io} + \bar{x}_{io} R^{-1}(\alpha)] \lambda_o \leq [x_{io} + \bar{x}_{io} R^{-1}(\alpha)] \theta_o^l \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [y_{rj} + \bar{y}_{rj} R^{-1}(\alpha)] \lambda_j + [y_{ro} - \underline{y}_{ro} L^{-1}(\alpha)] \lambda_o \geq [y_{ro} - \underline{y}_{ro} L^{-1}(\alpha)] \quad r = 1, \dots, s \\ & \lambda_j \geq 0 \\ & \lambda_o \geq 0 \\ & \theta_o^l \geq \bar{z}^j \end{aligned}$$

قضیه ۱ اگر θ_o^{l*} و θ_o^{u*} به ترتیب مقدارهای بهینه ی مدل های (۱۶) و (۱۷) باشند آنگاه $\theta_o^{l*} \leq \theta_o^{u*}$ [۲].

اثبات: فرض کنید $(\lambda^*, \theta_o^{u*})$ جواب بهینه مدل (۱۶) باشد، کافی است نشان دهیم که این جواب، یک جواب شدنی برای مدل (۱۷) می باشد. از مجموعه محدودیت های اول محدودیت های (۱۶) داریم:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [x_{io} - \underline{x}_{io} L^{-1}(\alpha)] \lambda_j^* \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [x_{ij} + \bar{x}_{ij} R^{-1}(\alpha)] \lambda_j^* \leq [x_{io} - \underline{x}_{io} L^{-1}(\alpha)] (\theta_o^{u*} - \lambda_o^*) \leq [x_{io} + \bar{x}_{io} R^{-1}(\alpha)] (\theta_o^{u*} - \lambda_o^*)$$

و یا

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [x_{io} - \underline{x}_{io} L^{-1}(\alpha)] \lambda_j^* + [x_{io} + \bar{x}_{io} R^{-1}(\alpha)] \lambda_o^* \leq [x_{io} + \bar{x}_{io} R^{-1}(\alpha)] \theta_o^{u*}$$

و همچنین از مجموعه محدودیت های دوم محدودیت های (۱۶) داریم:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [y_{rj} + \bar{y}_{rj} R^{-1}(\alpha)] \lambda_j^* \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [y_{rj} - \underline{y}_{rj} L^{-1}(\alpha)] \lambda_j^* \geq [y_{ro} + \bar{y}_{ro} R^{-1}(\alpha)] (1 - \lambda_o^*) \geq [y_{ro} - \underline{y}_{ro} L^{-1}(\alpha)] (1 - \lambda_o^*)$$

و یا

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [y_{rj} + \bar{y}_{rj} R^{-1}(\alpha)] \lambda_j^* + [y_{ro} - \underline{y}_{ro} L^{-1}(\alpha)] \lambda_o^* \geq [y_{ro} - \underline{y}_{ro} L^{-1}(\alpha)] (1 - \lambda_o^*)$$

واضح است $(\lambda^*, \theta_o^{u*})$ در محدودیت های (۱۵) صدق می کند. بنابراین این جواب، یک جواب شدنی است. از طرفی مساله (۱۷) یک مساله مینیم سازی است بنابراین: $\theta_o^{l*} \leq \theta_o^{u*}$ ، Δ .

در حالت خاص اگر اعداد فازی مساله (۶) اعداد فازی مثلثی $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^l, x_{ij}^m, x_{ij}^u)$ و $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}^l, y_{rj}^m, y_{rj}^u)$ باشد در این صورت مسائل (۱۳) و (۱۶) و (۱۷) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\text{Max} \sum_{r=1}^s [y_{ro}^l + \alpha(y_{ro}^m - y_{ro}^l), y_{ro}^u - \alpha(y_{ro}^u - y_{ro}^m)] u_r = \theta_o$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m [x_{io}^l + \alpha(x_{io}^m - x_{io}^l), x_{io}^u - \alpha(x_{io}^u - x_{io}^m)] v_i &= 1 \\ \sum_{r=1}^s [y_{rj}^l + \alpha(y_{rj}^m - y_{rj}^l), y_{rj}^u - \alpha(y_{rj}^u - y_{rj}^m)] u_r - \\ \sum_{i=1}^m [x_{ij}^l + \alpha(x_{ij}^m - x_{ij}^l), x_{ij}^u - \alpha(x_{ij}^u - x_{ij}^m)] v_i &\leq 0 \end{aligned} \quad j = 1, \dots, n$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

Min θ_o^u

s.t.

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [x_{ij}^u - \alpha(x_{ij}^u - x_{ij}^m)] \lambda_j + [x_{io}^l + \alpha(x_{io}^m - x_{io}^l)] \lambda_o \leq [x_{io}^l + \alpha(x_{io}^m - x_{io}^l)] \theta_o^u \quad i = 1, \dots, m \quad (19)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [y_{rj}^l + \alpha(y_{rj}^m - y_{rj}^l)] \lambda_j + [y_{ro}^u - \alpha(y_{ro}^u - y_{ro}^m)] \lambda_o \geq [y_{ro}^u - \alpha(y_{ro}^u - y_{ro}^m)] \quad r = 1, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0$$

$$\lambda_o \geq 0$$

$$\theta_o^u \text{ آزاد} \quad (20)$$

Min θ_o^l

s.to

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [x_{ij}^l + \alpha(x_{ij}^m - x_{ij}^l)] \lambda_j + [x_{io}^u - \alpha(x_{io}^u - x_{io}^m)] \lambda_o \leq [x_{io}^u - \alpha(x_{io}^u - x_{io}^m)] \theta_o^l \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n [y_{rj}^u - \alpha(y_{rj}^u - y_{rj}^m)] \lambda_j + [y_{ro}^l + \alpha(y_{ro}^m - y_{ro}^l)] \lambda_o \geq [y_{ro}^l + \alpha(y_{ro}^m - y_{ro}^l)] \quad r = 1, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0$$

$$\lambda_o \geq 0$$

$$\theta_o^l \text{ آزاد}$$

رتبه بندی بازه ای

تعریف

الف) DMU_o را کارای قوی گویند هرگاه $\theta_o^{l*} = \theta_o^{u*} = 1$.

ب) DMU_o را کارا گویند هرگاه $\theta_o^{l*} < 1, \theta_o^{u*} = 1$.

ج) DMU_o را ناکارا گویند هرگاه $\theta_o^{u*} < 1$.

اگر در مدل CCR ماهیت ورودی، داده ها بازه ای باشند، مقدار کارآیی هم بازه ای خواهد بود لذا با رتبه بندی بازه ای سرو کار داریم به همین دلیل یک رتبه بندی بازه ای را در زیر تعریف می کنیم. اگر واحد i دارای بازه ی بهینه $[\theta_i^{l*}, \theta_i^{u*}]$ باشد آنگاه رتبه بندی را می توانیم براساس کران بالا و یا کران پایین انجام دهیم. اگر واحد i دارای بازه ی بهینه $[\theta_i^{l*}, \theta_i^{u*}]$ باشد و عدد K را به ازاء هر i ، $K = \text{Max} \theta_i^{u*}$ را در نظر بگیریم، آنگاه مقدار $R_i = 2K - (\theta_i^{l*} + \theta_i^{u*})$ به ازاء هر i محاسبه نموده و هر DMU ای که مقدار R_i آن کمتر باشد از رتبه بهتری برخوردار خواهد بود.

$$\text{Rank}(DMU_i) \geq \text{Rank}(DMU_j) \Leftrightarrow R_i \leq R_j \Leftrightarrow 2K - (\theta_i^l + \theta_i^u) \leq 2K - (\theta_j^l + \theta_j^u)$$

با توجه به ثابت بودن مقدار K برای همه واحدهای تصمیم گیرنده می توان از طرفین نامساوی فوق حذف نمود:

$$2K - (\theta_i^l + \theta_i^u) \leq 2K - (\theta_j^l + \theta_j^u) \Leftrightarrow -(\theta_i^l + \theta_i^u) \leq -(\theta_j^l + \theta_j^u) \Leftrightarrow (\theta_i^l + \theta_i^u) \geq (\theta_j^l + \theta_j^u)$$

پس کافی است برای هر واحد تصمیم گیرنده مقدار $(\theta_i^l + \theta_i^u)$ را محاسبه نمود و هر واحد تصمیم گیرنده که مقدار $(\theta_i^l + \theta_i^u)$ آن بیشتر باشد از رتبه‌ی بهتری برخوردار خواهد بود.

دسته بندی واحدهای تصمیم گیرنده به روش جدید

دسته بندی واحدهای تصمیم گیرنده براساس واحدهای تصمیم گیرنده کارآی قوی

در این برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده در روش تحلیل پوششی داده‌ها، ابتدا بازه کارآیی واحدهای تصمیم گیرنده را با استفاده از α برش‌ها و روش نور بدست می‌آوریم سپس با استفاده از تعریف ۵ واحدهای تصمیم گیرنده کارآی قوی را به عنوان دسته اول از مجموعه واحدهای تصمیم گیرنده حذف نموده، و بازه کارآیی سایر واحدهای تصمیم گیرنده را مستقل از دسته اول محاسبه می‌کنیم مجدداً واحدهای تصمیم گیرنده کارآی قوی را به عنوان دسته دوم از مجموعه واحدهای تصمیم گیرنده حذف نموده، و سپس بازه کارآیی سایر واحدهای تصمیم گیرنده را مستقل از دسته اول و دوم محاسبه می‌نمائیم. این فرآیند را تا زمانی ادامه می‌دهیم که مجموعه واحدهای تصمیم گیرنده بیشتر از یک عضو نداشته یا واحد تصمیم گیرنده کارآی قوی وجود نداشته باشد. در پایان با توجه به شماره دسته‌ها هر دسته‌ای که دارای شماره کمتری باشد دارای رتبه بهتری است.

دسته بندی واحدهای تصمیم گیرنده براساس واحدهای تصمیم گیرنده کارآ

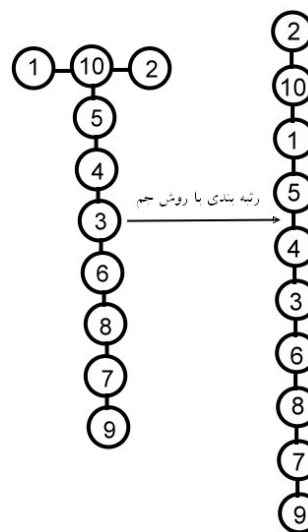
در این روش رتبه‌بندی ابتدا بازه کارآیی واحدهای تصمیم گیرنده را با استفاده از α برش‌ها و روش نور به دست می‌آوریم سپس با استفاده از تعریف ۵ واحدهای تصمیم گیرنده کارآ (کارا و کارای قوی) را به عنوان دسته اول از مجموعه واحدهای تصمیم گیرنده حذف نموده، و بازه کارآیی سایر واحدهای تصمیم گیرنده را مستقل از دسته اول محاسبه می‌نمائیم و مجدداً واحدهای تصمیم گیرنده کارآ (کارا و کارای قوی) را به عنوان دسته دوم را نیز از مجموعه واحدهای تصمیم گیرنده حذف می‌کنیم و بازه کارآیی سایر واحدهای تصمیم گیرنده را مستقل از دسته اول و دوم محاسبه می‌نمائیم و این فرآیند را تا زمانی ادامه می‌دهیم که مجموعه واحدهای تصمیم گیرنده بیشتر از یک عضو نداشته یا واحد تصمیم گیرنده کارآ (کارا و کارای قوی) وجود نداشته باشد. در پایان با توجه به شماره دسته‌ها هر دسته‌ای که دارای شماره کمتری باشد از رتبه بهتری برخوردار خواهد بود.

مثال ۱ ده واحد تصمیم گیرنده با دو ورودی و دو خروجی با اعداد فازی مثلثی در جدول ۱ ارایه شده است:

		x_{rj}^l	x_{rj}^m	x_{rj}^u		y_{rj}^l	y_{rj}^m	y_{rj}^u
DMU_1	\tilde{x}_{11}	6	7	8	\tilde{y}_{11}	35.5	38	41
	\tilde{x}_{12}	29	30	32	\tilde{y}_{12}	409	411	416
DMU_2	\tilde{x}_{21}	5.5	6	6.5	\tilde{y}_{21}	39	40	43
	\tilde{x}_{22}	33	35	36.5	\tilde{y}_{22}	478	480	484
DMU_3	\tilde{x}_{31}	7.5	9	10.5	\tilde{y}_{31}	32	35	38
	\tilde{x}_{32}	43	45	48	\tilde{y}_{32}	297	299	301
DMU_4	\tilde{x}_{41}	7	8	10	\tilde{y}_{41}	28	31	31
	\tilde{x}_{42}	37.5	39	42	\tilde{y}_{42}	347	352	360
DMU_5	\tilde{x}_{51}	9	11	12	\tilde{y}_{51}	33	35	38
	\tilde{x}_{52}	43	44	45	\tilde{y}_{52}	406	411	415
DMU_6	\tilde{x}_{61}	10	10	10	\tilde{y}_{61}	36	38	40
	\tilde{x}_{62}	53	55	57.5	\tilde{y}_{62}	282	286	289
DMU_7	\tilde{x}_{71}	10	12	14	\tilde{y}_{71}	34.5	36	38
	\tilde{x}_{72}	107	110	113	\tilde{y}_{72}	396	400	405
DMU_8	\tilde{x}_{81}	9	13	16	\tilde{y}_{81}	37	41	46
	\tilde{x}_{82}	95	100	101	\tilde{y}_{82}	387	393	402
DMU_9	\tilde{x}_{91}	12	14	15	\tilde{y}_{91}	24	27	28
	\tilde{x}_{92}	120	125	131	\tilde{y}_{92}	400	404	406
DMU_{10}	\tilde{x}_{101}	5	8	10	\tilde{y}_{101}	48	50	51
	\tilde{x}_{102}	35	38	39	\tilde{y}_{102}	470	470	470

جدول ۱

	کارایی DMU ها
DMU_1	1
DMU_2	1
DMU_3	0.5912
DMU_4	0.6516
DMU_5	0.6796
DMU_6	0.5716
DMU_7	0.4660
DMU_8	0.4793
DMU_9	0.3664
DMU_{10}	1



شکل ۱: رتبه بندی DMU ها با فاصله علامتدار

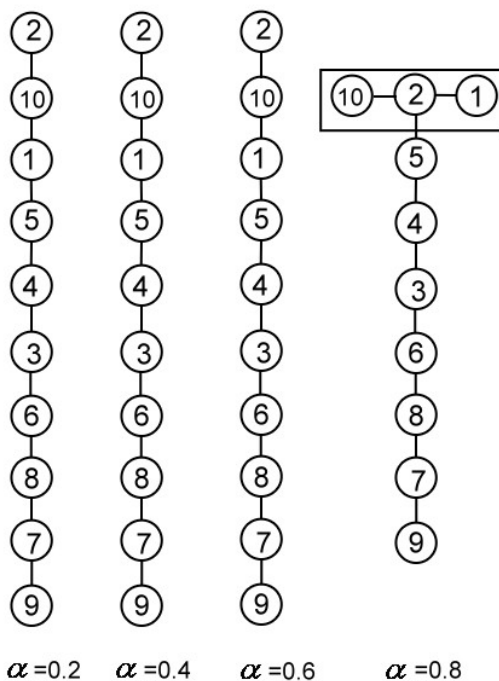
جدول ۲: اندازه کارایی DMU ها با فاصله علامتدار

مثال ۲ مثال ۱ را به ازاء α های مختلف با استفاده از روش بخش ۳ حل کرده و بازه کارآیی آن را محاسبه می کنیم و با به کارگیری رتبه بندی بازه ای ارایه شده در بخش ۴ رتبه بندی می نمائیم جدول ۲ بازه کارآیی واحدهای تصمیم گیرنده را به ازاء α های مختلف با استفاده از روش بخش ۳ نشان می دهد.

	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$
DMU_1	[0.8963,1]	[0.9308,1]	[0.9666,1]	[1,1]
DMU_2	[0.9746,1]	[0.9981,1]	[1,1]	[1,1]
DMU_3	[0.4820,0.7357]	[0.5075,0.7485]	[0.5342,0.7053]	[0.6606,0.5620]
DMU_4	[0.5810,0.7357]	[0.5993,0.7155]	[0.6183,0.6976]	[0.6386,0.6523]
DMU_5	[0.6280,0.7507]	[0.6410,0.7289]	[0.6342,0.7081]	[0.6675,0.6887]
DMU_6	[0.4475,0.6697]	[0.4660,0.6476]	[0.5019,0.6257]	[0.5494,0.6037]
DMU_7	[0.3381,0.5903]	[0.3591,0.5508]	[0.3846,0.5144]	[0.4184,0.4809]
DMU_8	[0.2960,0.7497]	[0.3324,0.6637]	[0.3784,0.5906]	[0.4295,0.5270]
DMU_9	[0.3139,0.4376]	[0.3225,0.4165]	[0.3365,0.3968]	[0.3484,0.3782]
DMU_{10}	[0.9013,1]	[0.9339,1]	[0.9675,1]	[1,1]

جدول ۳

رتبه بندی بازه ای واحدهای تصمیم گیرنده مساله فوق بر اساس جدول ۳ و به ازاء α برشهای مختلف به صورت زیر می باشد:



شکل ۲: رتبه بندی بازه ای واحدهای تصمیم گیرنده مساله فوق بر اساس روش بخش ۴

همان طور که در شکل ۲ نشان داده شده است رتبه بندی تمامی واحدهای تصمیم گیرنده به ازاء α برشهای متفاوت دارای رتبه بندی یکسانی می باشند. فقط به ازاء $\alpha = 0.8$ سه واحد تصمیم گیرنده DMU_1, DMU_2, DMU_{10} دارای بازه کارآیی برابر هستند، که برای رتبه بندی واحدهای کارآی قوی می توان به روشهای سوپرکارآیی برای رتبه بندی استفاده نمود. استفاده از روش MAJ [۶] آن را برای α برش اعداد فازی مثلثی ارایه شده در این مقاله برای DMU_o باز نویسی نمود:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } w_o \\
 & \text{s.to} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j [x_{ij} - \underline{x}_{ij}L^{-1}(\alpha), x_{ij} + \bar{x}_{ij}R^{-1}(\alpha)] \leq \quad (21) \\
 & \quad [x_{io} - \underline{x}_{io}L^{-1}(\alpha), x_{io} + \bar{x}_{io}R^{-1}(\alpha)] + w_o \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j [y_{rj} - \underline{y}_{rj}L^{-1}(\alpha), y_{rj} + \bar{y}_{rj}R^{-1}(\alpha)] \geq \\
 & \quad [y_{ro} - \underline{y}_{ro}L^{-1}(\alpha), y_{ro} + \bar{y}_{ro}R^{-1}(\alpha)] \quad r = 1, 2, \dots, s \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

حال می توان مسایل مطلوب ترین مقدار و نامطلوبترین مقدار w_o را برای DMU_o به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } w_o^l \\
 & \text{s.to} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j [x_{ij} - \underline{x}_{ij}L^{-1}(\alpha)] \leq [x_{io} + \bar{x}_{io}R^{-1}(\alpha)] + w_o^l \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j [y_{rj} + \bar{y}_{rj}R^{-1}(\alpha)] \geq [y_{ro} - \underline{y}_{ro}L^{-1}(\alpha)] \quad r = 1, 2, \dots, s \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } w_o^u \\
 & \text{s.to} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j [x_{ij} + \bar{x}_{ij}R^{-1}(\alpha)] \leq [x_{io} - \underline{x}_{io}L^{-1}(\alpha)] + w_o^u \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq o}}^n \lambda_j [y_{rj} - \underline{y}_{rj}L^{-1}(\alpha)] \geq [y_{ro} + \bar{y}_{ro}R^{-1}(\alpha)] \quad r = 1, 2, \dots, s \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \quad (23)$$

بر اساس مدل های فوق برای سه واحد تصمیم گیرنده DMU_1, DMU_2, DMU_{10} که به ازاء $\alpha = 0.8$ دارای کارایی برابر هستند، مقدار $[w'_o, w''_o]$ برای این واحدهای تصمیم گیرنده به صورت جدول ۴ و با توجه به رتبه بندی بازه ای این واحدهای تصمیم گیرنده دارای رتبه بندی زیر می باشد:

	$\alpha = 0.8$
DMU_1	[0.1105 , 2.0253]
DMU_2	[1.5853 , 2.531]
DMU_{10}	[0.2696 , 3.2955]

جدول ۴



شکل ۳

مثال ۳ مجدداً مثال ۱ به ازاء $\alpha = 0.8$, $\alpha = 0.6$ در نظر بگیرید:

	بازه کارایی DMU ها	بازه کارایی DMU ها پس از حذف دسته اول	بازه کارایی DMU ها پس از حذف دسته دوم	بازه کارایی DMU ها پس از حذف دسته سوم
DMU_1	[0.9666,1]	[1,1]	حذف	حذف
DMU_2	[1,1]	حذف	حذف	حذف
DMU_3	[0.5342,0.7053]	[0.5342,0.7708]	[0.5341,0.7708]	[0.8992,1]
DMU_4	[0.6183,0.6976]	[0.6297,0.8431]	[0.6817,0.8750]	[0.9832,1]
DMU_5	[0.6542,0.7081]	[0.6602,0.7297]	[0.7212,0.7732]	[0.9959,1]
DMU_6	[0.5019,0.6257]	[0.5562,0.6940]	[0.5561,0.6940]	[0.8947,1]
DMU_7	[0.3846,0.5144]	[0.4503,0.6498]	[0.4503,0.6720]	[0.6757,0.9197]
DMU_8	[0.3784,0.5906]	[0.3980,0.6746]	[0.3980,0.6746]	[0.6625,1]
DMU_9	[0.3365,0.3968]	[0.4043,0.5532]	[0.4043,0.5742]	[0.5979,0.7710]
DMU_{10}	[0.9675,1]	[0.9675,1]	[1,1]	حذف

جدول ۵: بازه کارایی برای $\alpha = 0.6$ (شکل ۴-ا)

	بازه کارایی DMU ها	بازه کارایی DMU ها پس از حذف دسته اول	بازه کارایی DMU ها پس از حذف دسته اول و دوم	بازه کارایی DMU ها پس از حذف دسته اول و دوم و سوم	بازه کارایی DMU ها پس از حذف دسته اول تا چهارم	بازه کارایی DMU ها پس از حذف دسته اول تا پنجم
DMU_1	[1,1]	حذف	حذف	حذف	حذف	حذف
DMU_2	[1,1]	حذف	حذف	حذف	حذف	حذف
DMU_3	[0.6606,0.5620]	[0.9409,1]	[1,1]	حذف	حذف	حذف
DMU_4	[0.6386,0.6523]	[1,1]	حذف	حذف	حذف	حذف
DMU_5	[0.6675,0.6887]	[1,1]	حذف	حذف	حذف	حذف
DMU_6	[0.5494,0.6037]	[0.9189,1]	[0.9189,1]	[1,1]	حذف	حذف
DMU_7	[0.4184,0.4809]	[0.7228,0.8627]	[0.9355,1]	[0.9948,1]	[0.9948,1]	[1,1]
DMU_8	[0.4295,0.5276]	[0.7319,0.9319]	[0.8351,1]	[0.9146,1]	[1,1]	حذف
DMU_9	[0.3484,0.3782]	[0.6263,0.7116]	[0.8218,0.9236]	[0.8410,0.9236]	[0.8436,0.9236]	[0.8716,0.9236]
DMU_{10}	[1,1]	حذف	حذف	حذف	حذف	حذف

جدول ۶: بازه کارایی به ازاء $\alpha = 0.8$ (شکل ۴-ب)

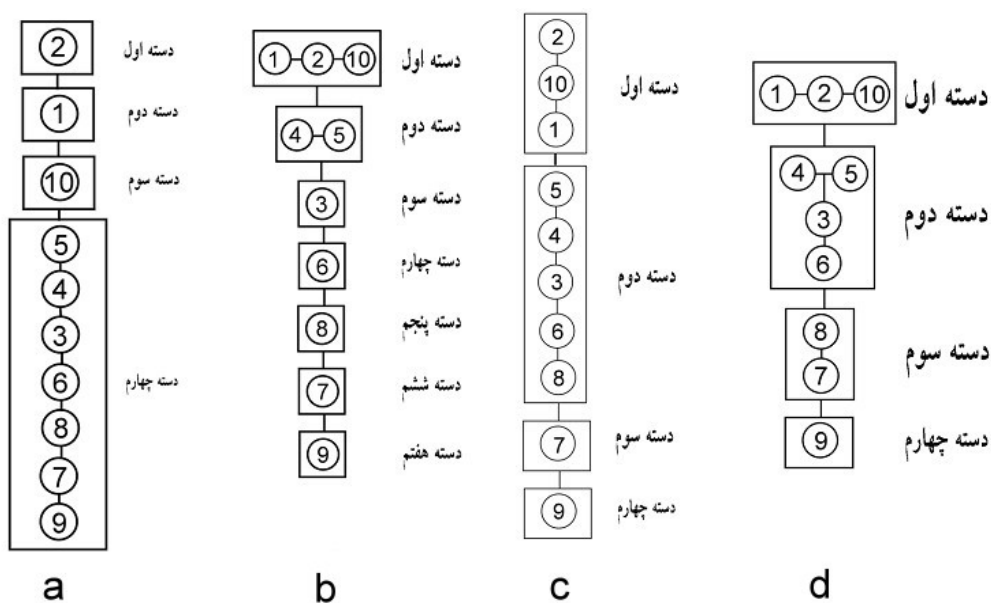
مثال ۴ مجدداً مثال ۱ به ازاء $\alpha = 0.8$, $\alpha = 0.6$ در نظر بگیرد:

	بازه کارایی DMU ها	بازه کارایی DMU ها پس از حذف دسته اول	بازه کارایی DMU ها پس از حذف دسته دوم
DMU_1	[0.9666,1]	حذف	حذف
DMU_2	[1,1]	حذف	حذف
DMU_3	[0.5342,0.7053]	[0.8992,1]	حذف
DMU_4	[0.6183,0.6976]	[0.9832,1]	حذف
DMU_5	[0.6542,0.7081]	[0.9959,1]	حذف
DMU_6	[0.5019,0.6257]	[0.8947,1]	حذف
DMU_7	[0.3846,0.5144]	[0.6757,0.9197]	[1,1]
DMU_8	[0.3784,0.5906]	[0.6625,1]	حذف
DMU_9	[0.3365,0.3968]	[0.5979,0.7710]	[0.8548,0.9853]
DMU_{10}	[0.9675,1]	حذف	حذف

جدول ۷: بازه کارایی به ازاء $\alpha = 0.6$ (شکل ۴-ج)

	بازه کارایی DMU ها	بازه کارایی DMU ها پس از حذف دسته اول	بازه کارایی DMU ها پس از حذف دسته دوم
DMU_1	[1,1]	حذف	حذف
DMU_2	[1,1]	حذف	حذف
DMU_3	[0.6606, 0.5620]	[0.9409, 1]	حذف
DMU_4	[0.6386, 0.6523]	[1,1]	حذف
DMU_5	[0.6675, 0.6887]	[1,1]	حذف
DMU_6	[0.5494, 0.6037]	[0.9189, 1]	حذف
DMU_7	[0.4184, 0.4809]	[0.7228, 0.8627]	[0.8947, 1]
DMU_8	[0.4295, 0.5276]	[0.7319, 0.9319]	[1,1]
DMU_9	[0.3484, 0.3782]	[0.6263, 0.7116]	[0.7976, 0.9853]
DMU_{10}	[1,1]	حذف	حذف

جدول ۸: بازه کارایی به ازاء $\alpha = 0.8$ (شکل ۴-د)



شکل ۴

نتیجه گیری

تکنیک‌هایی که تاکنون برای محاسبه کارآیی در *DEA* نادقیق (فازی و بازه‌ای) ارائه شده بسیار محدود بوده و در بعضی موارد دارای نواقصی هستند ولی بنابر آن چه که در این مقاله آمده، روش نور در به دست آوردن بازه کارآیی موثرتر از سایر روش‌های ارائه شده می‌باشد همچنین رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده در این مقاله نسبت به سایر روشها بهبود یافته است روش‌های رتبه‌بندی قبلی در مواردی که واحدهای تصمیم‌گیرنده دارای کارآیی قوی می‌باشند دارای ضعف هستند. در این مقاله این ضعف با روش سوپر کارایی که ارائه نموده‌ایم، مرتفع گردیده است و روشی جدید برای دسته‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده حاصل شده است این روش واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که دارای کارآیی نسبتاً برابر هستند در یک دسته قرار می‌دهد. مثال‌های حل شده نشان دهنده این مطلب می‌باشند. در پایان مفهوم فاصله اطمینان آماری را به تحلیل پوششی داده‌ها تعمیم داده و از آن در بدست آوردن بازه کارآیی و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که دارای داده‌های آماری و فاصله اطمینان آماری هستند، استفاده کردیم.

منابع

- [۱] عباسعلی نورا و فرانک حسین زاده سلجوقی، روش حلی برای مسائل برنامه ریزی خطی بازه ای و برنامه ریزی خطی فازی، پنجمین کنفرانس سیستم‌های فازی ایران، دانشگاه امام حسین (ع) ۱۳۸۳ ص (۵۰۰-۴۹۱)
- [۲] یحیی پور شیخ‌زاهدی، محمد تقی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان، ۱۳۸۳
- [3] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., *Measuring The Efficiency of Decision Making Units*, *European Journal of Operational Research* 2 (1978) 429-444.
- [4] Jershan Chiang , *Fuzzy linear programming based on statistical confidence Interval and interval-valued fuzzy set* , *European Journal of Operational Research* 129 (2001)65-86.
- [5] J.-S. Yao, K. Wu, *Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance*, *Fuzzy Sets and Systems* 116 (2000) 275-288.
- [6] S.Mehrabiani , R . Alirezaee , G.R . Jahanshahloo, *A complete efficiency ranking of decision making units in data envelopment analysis* , *Computational optimization and applications* 14 (1999) 261-266.
- [7] D. K. Despotis, Y. G. Similaris, *Data envelopment analysis with imprecise data*, *European Journal of Operational Research* 140 (2002) 29-36.
- [8] H. Tanaka, K. Asal, *Fuzzy linear programming problem with fuzzy numbers*, *Fuzzy sets and systems* 13 (1984) 1-10.
- [9] H. J. Zimmerman, *Discretion and optimization on fuzzy system*, *Internat. J. General system* 2 (1976) 209-212.
- [10] T. Shocheng, *Interval numbers and fuzzy linear programming*, *Fuzzy sets and systems* 66 (1994) 301-306.