

تعیین کران روی وزن ها با استفاده از شرایط مکمل زاید قوی

فرهاد حسین زاده لطفی^۱، غلامرضا جهانشاهلو^۲، سهند دانشور^۳، منیره ذریه حبیب^۴

^۱گروه ریاضی - دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران

^۲گروه ریاضی - دانشگاه تربیت معلم

^۳گروه ریاضی - دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز

^۴گروه ریاضی - دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

چکیده

تحلیل پوششی داده ها با ارایه مدل های ریاضی بر آن است تا کارآیی نسبی را دقیقاً محاسبه کند. چون از تمام مدل های ارایه شده تا کنون نتایج دقیق و قابل اطمینانی به دست نیامده، لذا مقالات زیادی برای اصلاح مدل ها ارایه شده است. چنانچه می دانیم مدل های اساسی در تحلیل پوششی داده ها همچون مدل پوششی CCR^2 یا مدل مضربی آن بر اساس DMU^3 های مشاهده شده، یک مرز کارایی می سازند و بر پایه این مرز، مقدار کارایی هر DMU محاسبه می شود که این مرز کارایی ممکن است ابر صفحه کارای قوی یا ضعیف باشد. در الگوریتم ارایه شده توسط زو، موریتا و چن [۱] نحوه در نظر گرفتن مرز کارایی جهت بررسی DMU های واقع در $FUNF$ [۲] بحث شده است. از آنجا که این مدل اصلاحی طبق جواب های $SCSC^4$ ، رویه های فرضی متعددی را به عنوان مرز در نظر می گیرد و در نتیجه مسایل متعددی را حل می کند لذا در این مقاله پیشنهاد شده است که مقدار کارایی یک DMU که خود یا تصویر آن روی ابر صفحه کارای ضعیف است با کران های به دست آمده از جواب $SCSC$ که فقط با یک بار حل کردن مدل مربوطه برای هر DMU حاصل می شود، تعیین گردد که این روند علاوه بر کاهش تعداد مسایلی که باید حل شوند، مقدار کارایی تمام DMU ها را همانند الگوریتم پیشنهادی زو، موریتا و چن [۱] محاسبه می کند.

کلمات کلیدی: مدل CCR ، کران، وزن، مکمل زاید قوی

* Corresponding Author Email: hosseinzadeh-lotfi@yahoo.com

² Cooper & Rhodes, Charnes

³ Decision Making Unit

⁴ Strong Complementary Slackness Condition

مقدمه

بحث تحلیل پوششی داده ها از سال ۱۹۷۸ با مقاله ای که توسط چارلز و کوپر و رودز ارایه شد مطرح گردید. تحلیل پوششی داده ها یک مدل برنامه ریزی ریاضی است که برای داده های مشاهده شده به کار می رود و با استفاده از این مدل، روش جدید یافتن تخمین تجربی روابطی مانند تابع تولید و یا مرز کارایی و تعیین کارایی فراهم می آید. در طی پیشرفت هایی که در این علم حاصل شده مقالات زیادی در رابطه با تعیین دقیق کارایی ارایه شده است. در این مقاله ضمن اشاره به برخی از مدل های اصلاحی در تعیین کارایی، الگوریتمی برای سنجش مقادیر مشاهده شده با مرز کارایی آورده شده است.

مروری بر مدل های CCR / ε اصلاحی ارایه شده تا کنون

فرض کنید n واحد تصمیم گیرنده $\{DMU_1, \dots, DMU_j\}$ موجود است که ورودی DMU_j ورودی $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ را برای تولید خروجی $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$ استفاده می کند. برای هر j ، $X_j \geq 0$ ، $Y_j \geq 0$ ، $Y_j \neq 0$ ، $X_j \neq 0$ ، هم چنین فرض کنید مطابق مدل CCR / ε (۱) تمامی n واحد تصمیم گیرنده به شش دسته $E_c, E'_c, F_c, NE_c, NE'_c$ و NF_c در T_c تقسیم شده باشد.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & s_r^+ \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \theta \text{ آزاد}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

که در آن θ مقدار کارایی را نشان می دهد و s_i^- و s_r^+ متغیرهای کمکی ورودی و خروجی می باشند. شش دسته مذکور را می توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$E_c : \theta^* = 1, \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ = 0$$

$$E'_c : \theta^* < 1, \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ = 0$$

$$F_c : \theta^* = 1, \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ > 0$$

$$NE_c \cup NE'_c : \theta^* < 1, \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ = 0$$

$$NF_c : \theta^* < 1, \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ > 0$$

که در آن (*) نشان دهنده جواب بهینه است. طبق این طبقه بندی E_c مجموعه تمام DMU های کارای رأسی، E'_c مجموعه تمام DMU های کارای غیر رأسی و F_c مجموعه تمام DMU هایی که کارای ضعیف هستند، می باشد. DMU های واقع در E_c, E'_c و F_c مرزی هستند و سایر DMU ها روی مرز قرار ندارند. DMU های واقع در F_c و NF_c متغیرهای کمکی غیر صفر دارند در صورتی که سایر DMU ها متغیرهای کمکی غیر صفر ندارند. مدل اصلاحی CCR / ε جهت تعیین دقیق تر کارایی DMU ها مطرح شد که در آن با اثر گذاردن روی نرمال ابر صفحه تکیه کننده از صفر شدن مؤلفه های بردار نرمال ابر صفحه جلوگیری می کند [۳]. مدل مضربی CCR / ε برای ارزیابی DMU_o به صورت زیر است:

$$\max \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}$$

$$s.t. \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{ro} - \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \leq 0, \quad (2)$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m.$$

از آنجا که در این مدل ممکن است DMU هایی که پاراتو^۵ کارا نیستند مقدار کارایی یک بگیرند، مدل اصلاحی چانگ و گاه [۴] مطرح شد که طبق این مدل، به جای ε مقدار $\delta = \min \{ u_r^*, v_i^* \}$ به عنوان کران پایین روی وزن ها قرار داده می شود. اما نشدنی بودن مدل منجر به مدل اصلاحی دودویی مختلط گرین و همکاران [۵] شد. مدل اصلاحی دودویی مختلط گرین و همکاران به صورت زیر است:

⁵ Pareto

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{r=1}^s u_r y_{rf} \\
 & s.t. \sum_{r=1}^s u_r y_{re} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ie} \leq 0, \quad e \in E_c, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{re} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ie} + Mz_e \geq 0, \quad e \in E_c, \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{if} = 1, \\
 & \sum_{e \in E} z_e = |E_c| - (m + s - 1) \\
 & u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & z_e \in \{0, 1\} \quad e \in E_c.
 \end{aligned} \tag{۳}$$

که در آن متناظر هر محدودیت " \leq " در (۳) یک محدودیت " \geq " وجود دارد که شامل متغیر دودویی z_e است و M به مقدار کافی بزرگ است. حالت تساوی وقتی اتفاق می افتد که z_e مقدار صفر بگیرد و دقیقاً $m + s - 1$ محدودیت " \geq " متناظر با $|E_c|$ باشد. در واقع $\sum_{e \in E_c} z_e = |E_c| - (m + s - 1)$ تعداد محدودیت هایی که به صورت تساوی برقرارند را نشان می دهد. یک رویه کارآ هم می تواند $FDEF^6$ گسترده با $m + s - 1$ DMU کارآی رأسی CCR باشد یا یک رویه غیر $FDEF$ گسترده با بعضی از DMU های کارآی رأسی CCR که تعداد آنها کمتر از $m + s - 1$ است. لازم به ذکر است که هر زیر مجموعه $m + s - 1$ DMU کارآی رأسی که به طور خطی مستقل باشند نیاز داریم تا $FDEF$ بسازیم در غیر این صورت اگر هر زیر مجموعه $m + s - 1$ DMU کارآی رأسی به طور خطی مستقل نباشند پس بعد رویه کارآ اکیداً کمتر از $m + s - 1$ خواهد بود و لذا $FDEF$ نمی شود. ایرادی که بر روند ارایه شده توسط گرین وارد می باشد آن است که اگر یک DMU کارآی رأسی باشد اما روی $FDEF$ نباشد، با حل این مدل مقدار کارآیی CCR آن ممکن است کمتر از یک ارزیابی شود. [۶]

⁶ Full Dimension Efficient Facet

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} \\
 & s.t. \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j \neq 0 \\
 & u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{۴}$$

DMU_o تحت ارزیابی خارج از مجموعه مرجع مدل (۴) است. $DMU_o \in E_c$ اگر و فقط اگر مقدار بهینه مدل فوق بیشتر از یک باشد یا این مدل نشدنی باشد.

از مدل زیر برای یافتن جواب SCSC برای یک $DMU \in E_c$ استفاده کنید.

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{j \neq 0} t_j + \sum_{r=1}^s u_r + \sum_{i=1}^m v_i \\
 & s.t. -\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = t_j, \quad j \neq 0 \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} = 1, \\
 & u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & t_j \geq 0.
 \end{aligned} \tag{۵}$$

مدل فوق را حل کرده و v_i, u_r, t_j مثبت را بر داشته و آنگاه حل مدل (۵) تا جایی ادامه می یابد تا جواب بهینه صفر شود و v_i, u_r, t_j ها همه از تابع هدف برداشته شوند. یک جفت جواب بهینه (u_r^0, v_i^0) که در SCSC صدق می کند میانگین همه (u_r, v_i) ها در هر مرحله است.

به تعداد Q از DMU های واقع در مجموعه E_c را در نظر گرفته که در آن $DMU_q \in E_c$ برای $q = 1, \dots, Q$. جواب های SCSC را برای هر DMU_q به صورت u_r^q, v_i^q نشان دهید، سپس الگوریتم زیر دنبال شود:

گام ۱: با استفاده از مدل (۴) همه DMU های کارای رأسی را بیابید.

گام ۲: جواب SCSC را برای هر $DMU \in E_c$ با استفاده از مدل (۵) پیدا کنید.

گام ۳: $u_r^* = \min_{q=1, \dots, Q} \{u_r^q\}$ و $v_i^* = \min_{q=1, \dots, Q} \{v_i^q\}$

گام ۴: مجموعه های زیر را مشخص کنید:

$$I = \{ i \text{ s.t. } DMU_j \in NF_c \text{ یا } DMU_j \in F_c \text{ و Slack } x_{ij} \}$$

$$R = \{ r \text{ s.t. } DMU_j \in NF_c \text{ یا } DMU_j \in F_c \text{ و Slack } y_{rj} \}$$

گام ۵: محدودیت های $i \in I$, $v_i \geq v_i^*$, $u_r \geq u_r^*$, $r \in R$ را به مدل کسری DEA بی کران با $(\varepsilon = 0)$ اضافه کنید.

گام ۶: مدل (۶) را با کران های وزنی پایین اجرا کنید.

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m w_i x_{io}} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m w_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \mu_r \geq u_r^*, \quad r \in R, \\ & w_i \geq v_i^*, \quad i \in I. \end{aligned} \tag{۶}$$

پس از خطی سازی مدل (۶) مدل زیر را حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & -u_r + t_o u_r^* \leq 0, \quad r \in R, \\ & -v_i + t_o v_i^* \leq 0, \quad i \in I, \\ & u_r \geq 0, \quad r \notin R, \\ & v_i \geq 0, \quad i \notin I. \end{aligned} \tag{۷}$$

روند ارایه شده نه تنها در مدل اصلی DEA آزادی وزنی را اعمال می کند بلکه مثبت بودن وزن را نیز به مدل تحمیل می کند سپس می توان به جای یک مرز ضعیف، یک مرز کارا به دست آورد، همچنین هیچ نیازی به وجود FDEF نیست.

بنابراین واضح است که نتیجه حاصل، به انتخاب جواب $SCSC$ وابسته است. در واقع کران های پایین تعدادی رویه کارای فرضی در انتهای رویه های کارای اصلی معرفی می کند. این رویه ها بخشی از ابر صفحه های تکیه کننده مختلف DMU های واقع در E_c هستند پس اگر جواب های مختلفی را انتخاب کنیم کران پایین وزن ها تغییر می کند و لذا مقدار کارایی به دست آمده برای DMU های واقع در $F_c \cup NF_c$ نیز تغییر می کند، که با ارایه الگوریتم اصلاحی زیر در این مقاله به آن می پردازیم.

گام ۱: ابتدا تمام DMU های کارای رأسی را به کمک مدل (۴) به دست می آوریم.

گام ۲: مدل (۸) را برای به دست آوردن جواب $SCSC$ برای هر DMU واقع در E_c به کار می گیریم.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \neq 0} t_j + \sum_{r=1}^s u_r + \sum_{i=1}^m v_i \\ \text{s.t.} \quad & -\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = t_j, \quad j \neq 0 \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{r0} = 1, \\ & u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\ & v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & t_j \geq 0. \end{aligned} \tag{۸}$$

مدل فوق را برای هر DMU یک بار حل کرده و u_r, v_i های مثبت متناظر آن را برمی داریم.

گام ۳: برای هر $DMU_j \in E_c$ ، u_r, v_i های مثبت را به صورت $\mathcal{E}_r^j, \mathcal{E}_i^j$ نشان می دهیم [۸]. قرار می دهیم:

$$\mathcal{E}_i^* = \{ \mathcal{E}_i^j \text{ s.t. } DMU_j \in E_c \}$$

$$\mathcal{E}_r^* = \{ \mathcal{E}_r^j \text{ s.t. } DMU_j \in E_c \}$$

گام ۴: از مدل زیر جهت تعیین کارایی DMU های تحت ارزیابی استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \\ \text{S.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & u_r \geq \varepsilon_r^*, \quad r = 1, \dots, s, \\ & v_i \geq \varepsilon_i^*, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (9)$$

داده های جدول (۱) را که داده های مثال ارایه شده توسط زو و همکاران است، با الگوریتم ارایه شده در فوق حل می کنیم.

DMUs	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
Input 1, x_1	1	2	4	5	3	2	9
Input 1, x_2	4	2	1	1	2	3	2
Output 1, y	1	1	1	1	1	1	1

جدول ۱: داده های ارایه شده توسط زو و همکاران با دو ورودی و یک خروجی

همان طور که در شکل (۱) نشان داده شده است داریم:

$$\begin{aligned} E_c &= \{ P_1, P_2, P_3 \} \\ NE_c' &= \{ P_5, P_6 \} \\ F_c &= \{ P_4 \} \\ NF_c &= \{ P_7 \} \end{aligned}$$

با مفروضات فوق گام های الگوریتم به ترتیب زیر می باشد:

گام ۱: با حل مدل (۴) DMU های واقع در E_c عبارتند از:

$$\{ P_1, P_2, P_3 \}$$

گام ۲: جواب های حاصل از حل مدل (۸) برای DMU های واقع در E_c عبارت است از:

$$(u^1, v_1^1, v_2^1) = (1, 1, 0)$$

$$(u^2, v_1^2, v_2^2) = (1, 0.1667, 0.3333)$$

$$(u^3, v_1^3, v_2^3) = (1, 0, 1)$$

گام ۳: با در نظر گرفتن مقادیر مثبت u_r, v_i ها گام ۳ را اجرا می کنیم.

$$\varepsilon_i^* = \min \{ 1, 1, 1 \} = 1$$

$$\varepsilon_1^* = \min \{ 1, 0.1667 \} = 0.1667$$

$$\varepsilon_2^* = \min \{ 0.3333, 1 \} = 0.3333$$

گام ۴: حال مدل (۹) را برای تعیین کارایی DMU های مورد نظر حل می کنیم:

$$\max uy_o$$

$$s.t. \quad uy_j - v_1x_{1j} - v_2x_{2j} \leq 1, \quad j = 1, \dots, 7,$$

$$v_1x_{1o} + v_2x_{2o} = 1,$$

$$u \geq 1,$$

$$v_1 \geq 0.1667,$$

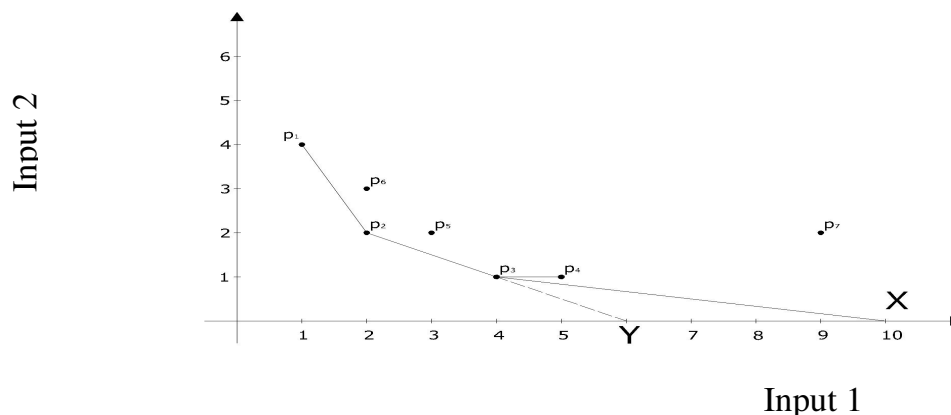
$$v_2 \geq 0.3333.$$

مقدار کارایی به دست آمده در جدول (۲) درج شده است.

با مقایسه نتایج حاصل از روند اصلاحی مدل زو و همکاران که مقادیر $\frac{10}{11}, \frac{10}{21}$ به ترتیب برای P_4, P_7 می باشد [۱] و نتایج حاصل از الگوریتم فوق واضح است که نتایج مشابه با حل مسایل کمتر به دست آمده است.

$DMUs$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
کارایی CCR بدون ε	1	1	1	1	0.8571	0.8571	0.5
کارایی CCR با مدل اصلاحی	1	1	1	0.9814	0.8571	0.8571	0.4907

جدول ۲: مقایسه نتایج دو مدل کارایی CCR



شکل ۱: رویه کارای فرضی با دو ورودی و یک خروجی

در ادامه، الگوریتم فوق را برای داده های جدول (۳) با دو خروجی و یک ورودی حل می کنیم [۸].

DMUs	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8
Output 1, y_1	1	1	2	3	4	4	5	6
Output 2, y_2	7	5	7	4	3	6	5	2
Input x	1	1	1	1	1	1	1	1

جدول ۳: داده هایی با دو خروجی و یک ورودی

گام ۱: با حل مدل (۴) DMU های واقع در E_c عبارتند از:

$$\{ P_3, P_6, P_7, P_8 \}$$

گام ۲: جواب های حاصل از حل مدل (۸) برای DMU های واقع در E_c عبارت است از:

$$(u_1^3, u_2^3, v) = (0, 0.1429, 1)$$

$$(u_1^6, u_2^6, v) = (0.0625, 0.125, 1)$$

$$(u_1^7, u_2^7, v) = (0.15, 0.05, 1)$$

$$(u_1^8, u_2^8, v) = (0.1667, 0, 1)$$

گام ۳: با در نظر گرفتن مقادیر مثبت u_r, v_i ها گام ۳ را اجرا می کنیم.

$$\varepsilon_r^* = \min \{ 1, 1, 1 \} = 1$$

$$\varepsilon_1^* = \min \{ 0.0625, 0.1667, 0.15 \} = 0.0625$$

$$\varepsilon_2^* = \min \{ 0.1429, 0.05, 0.125 \} = 0.05$$

گام ۴: مدل (۹) را برای تعیین کارآیی DMU های مورد نظر حل می کنیم:

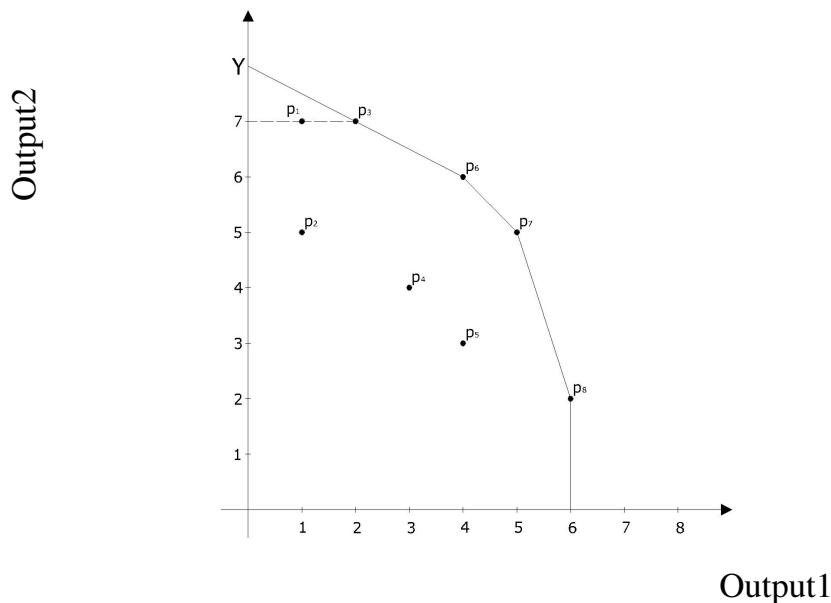
$$\begin{aligned} \max \quad & uy_o \\ \text{s.t.} \quad & uy_j - v_1x_{1j} - v_2x_{2j} \leq 0, \quad j = 1, \dots, 8, \\ & v_1x_{1o} + v_2x_{2o} = 1, \\ & u \geq 1, \\ & v_1 \geq 0.0625, \\ & v_2 \geq 0.05. \end{aligned}$$

مقدار کارآیی به دست آمده در جدول (۴) درج شده است.

$DMUs$	کارآیی CCR بدون ε	کارآیی CCR با مدل اصلاحی
P_1	1	0.98
P_2	0.714	0.709
P_3	1	1
P_4	0.7	0.7
P_5	0.75	0.75
P_6	1	1
P_7	1	1
P_8	1	1

جدول ۴: مقایسه دو مدل کارآیی CCR

این نتایج نشان می دهد که الگوریتم فوق رویه کارای فرضی p_6p_3Y را که بردار نرمال آن با استفاده از جواب های $SCSC$ به دست می آید، در نظر گرفته و برای DMU های واقع در $F_c \cup NF_c$ مقدار کارآیی مطلوب را ارائه کرده است. این مطلب در شکل (۲) نمایش داده شده است.



شکل ۲: رویه کارای فرضی با دو خروجی و یک ورودی

منابع

- [1] Chen Y., Morita H., Zhu J., (2003), "Multiplier bounds in DEA via strong complementary slackness condition solution", *International Journal of Production Economics* 86(2003)11-14.
- [2] Charnes A., Cooper W.W., Thrall R.M., (1991), "A structure for classifying and characterizing efficiency and inefficiency in data envelopment analysis", *Journal of Productivity Analysis* 2, 197-237.
- [3] Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E., (1978), "Measuring the efficiency of decision making units", *European Journal of Operational Research* 2, 429-444.
- [4] Chang K.P., Guh Y.Y., (1991), "Linear production functions and data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research* 52, 215-223.
- [5] Green R.H., Doyle J.R., Cook W.D., (1996), "Efficiency bounds in data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research* 89, 482-490.
- [6] Bessent A., Bessent W., Elam J., Clark T., (1988), "Efficiency frontier determination by constrained facet analysis", *Operations Research* 36, 785-796.
- [7] Andersen P., Petersen N.C., (1993), "A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis", *Management Science* 39, 1261-1264.
- [8] Daneshvar S., (2001), "Facet analysis in data envelopment analysis", *Science & Research Azad University :chapter4, Modification of CCR model*, 41-51.