یک مدل شبه DEA برای اندازه گیری کارآیی تجمعی و کارآیی مولفه ای

سهراب کرد رستمی[1] علیرضا امیر تیموری[2] عطا اله نظری معافی[1]
[1]گروه ریاضی- دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان
[2] گروه ریاضی- دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت

چکیده

در بسیاری از کاربردهای تحلیل پوششی داده ها، مدل های ارایه شده تنها برای به دست آوردن یک برآورد کلی از اندازهٔ کارآیی طراحی شده اند. اما در اغلب کاربرد های عملی ممکن است واحدهای تصمیم گیری تحت ارزیابی به مولفه های متفاوت تقسیم شوند که هر مولفه خود به تنهایی ورودی هائی را جهت تولید خروجی ها مصرف می کند، لذا به عنوان یک واحد تصمیم گیری مستقل در نظر گرفته می شود. در این کاربرد ها، اغلب یک ورودی مشترک در بین مولفه های یک واحد تصمیم گیری مشترک است و تمام مولفه ها با سهم های مختلف در مصرف آن سهیم اند. در این مقاله یک مدل شبه - DEA برای اندازه گیری کارآیی تجمعی واحدهای تصمیم گیری ارایه می شود.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، مدل شبه – DEA، کارآیی چند مولفه ای، کارآیی تجمعی.

مقدمه

(تحلیل پوششی داده ها) DEA [1] یک تکنیک غیر پارامتری برای اندازه گیری کارآیی نسبی یک مجموعه از واحد های تصمیم گیری متجانس است. این تکنیک که نخستین بار توسط چارنز، کوپر و رودز [۳] معرفی شد، اکنون به عنوان یک ابزار قدرتمند در بخش های متنوعی از صنعت و اقتصاد به کار گرفته می شود. یکی از موضوعات جالب در حیطه DEA مساله اندازه گیری کارآیی چند مولفه ای است.

ایده ی اندازه کارآیی چند مولفه ای نخستین با توسط فیرو گروسکوف [۵] مطرح شد. فیرو گروسکوف در مقاله ی خودشان مساله تولید را به عنوان یک فرآیند چند مرحله در نظر گرفتند که در آن خروجی یک مولفه به عنوان ورودی مولفهٔبعدی در نظر گرفته می شد. اما آنها تنها یک شاخص کارآیی کلی بدست می آوردند و در داخل سیستم کارآیی مولفه هارا نادیده گرفتند.

[1]Data Envelopment Analysis

پس از آن کوک و همکاران [۴] مدلی مبتنی بر برای اندازه گیری کارآیی تجمعی یک واحد تصمیم گیری و کارآیی مولفه های آن پیشنهاد کردند. کوک و همکاران به دلایل خاص تنها دو مولفه از یک واحد تصمیم گیری را در نظر گرفتند. آنها فرض کردند که یک ورودی مشترک در بین تمام مولفه های یک واحد تصمیم گیری وجود دارد که تمامی این مولفه ها در مصرف آن سهیم اند. در مقاله کوک و همکاران شاخص کارآیی تجمعی و کارآیی مولفه ای با استفاده از فرم مضربی بدست آمده است. آنها ثابت کردند که کارائی تجمعی یک ترکیب محدب از اندازه های کارآیی مولفه ای می باشد.

در این مقاله یک مدل شبه- DEA برای اندازه گیری کارآیی تجمعی و کارآیی مولفه ای واحد های تصمیم گیری چند مولفه ای ارایه می شود . در این مدل فرض می شود یک منبع مشترک در بین تمام مولفه های یک واحد تصمیم گیری وجود دارد که تمامی مولفه ها در مصرف آن با سهم های مختلف سهیم اند. شاخص کارآیی در این مدل از فرم پوششی بدست می آید. اندازه ی کارآیی به دست آمده در این مدل یک ترکیب محدب از کارآیی مولفه هاست . مدل پیشنهاد شده در این مقاله ابتدا روی یک مجموعه از داده ها که از مقاله کوک وهمکاران گرفته شده است پیاده می شود. سپس یک مطالعه کاربردی روی داده های مربوط به چهارده شعبه ی بانکی یکی از بانکهای تجاری کشور ارایه می شود. سازماندهی فصول بعدی این مقاله بصورت زیر است : پیش نیازی از تحلیل پوششی داده ها در بخش دوم آمده است . مدل پیشنهاد شده توسط کوک و همکاران در بخش سوم ارایه می شود، یک مدل مبتنی بر DEA برای اندازه گیری کارآیی چند مولفه ای در بخش چهارم آمده است . در بخش پنجم این مقاله دو مطالعه کاربردی روی بانک ها ارایه می شود. نتیجه گیری در بخش آخر ارایه شده است.

پیش نیاز

مجموع داده ها در مطالعات DEA بصورت ماتریس $A=\left[a^1,a^2,...,a^n\right]$ است که در آن a^j مرکب از دو بردار X_j به عنوان بردار ورودی ، DMU_j و $Y_j \neq 0$ به عنوان بردار خروجی DMU_j می باشد. پس داریم :

$$A=\left[a^1,a^2,...,a^n\right];\quad a^j=\begin{bmatrix} Y_j \\ -X_j \end{bmatrix}\qquad j=1,...,n$$

که درآن
$$Y_j=(y_{1j},...,y_{sj})^t \geq 0\ \ ,\ \ X_j=(x_{1j},...,x_{mj})^t \geq 0$$

مجموعه امکان تولید به صورت زیر تعریف می شود:

$$T=\left\{(X,Y)\ \middle|\ X \geq \sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j\ ,Y \leq \sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j\ ,\lambda_j \geq 0\,,\ j=1,...,n\right\}$$

برای اندازه گیری کارآیی نسبی DMU_P از مدل DEA زیر استفاده می کنیم:

$$
\begin{aligned}
& Min\ \ Z_P=\theta_P-\varepsilon(\sum_{i=1}^{m}s_i^-+\sum_{r=1}^{s}s_r^+) \\
& s.t \qquad \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{j}}x_{ij}+s_i^-=\theta_p x_{ip} \qquad i=1,\dots,m \\
& \qquad\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_r^+=y_{rp} \qquad \mathrm{r}=1,\dots,\mathrm{s} \\
& \qquad\quad \lambda_j\ge 0,\ \mathrm{s}_{\mathrm{i}}^{-}\ge 0,\ s_r^+\ge 0 \qquad \forall\, i,j,r
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

در آن $\varepsilon>0$ یک کمیت ثابت ناارشمیدسی است. این مدل در ماهیت ورودی بیان شده است. دوآل مدل (۱) به صورت زیر می باشد:

$$
\begin{aligned}
& Max \qquad Z_p=\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rp} \\
& s.t \qquad \sum_{i=1}^{m}v_i x_{ip}=1 \\
& \qquad \sum_{i=1}^{s}u_i y_{rj}-\sum v_i x_{ij}\le 0 \quad j=1,\dots,n \\
& \qquad u_r\ge\varepsilon, v_i\ge\varepsilon \qquad \forall i,r
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

واضح است که مقدار بهینه مدل (۱)و(۲) نابیشتر از یک می باشند اگرمقدار بهینه هرمدل یک باشد DMU_P کارآ نامیده می شود و در غیر اینصورت DMU_P ناکارا است .

مدل کوک و همکاران

در این بخش مدل پیشنهادی کوک و همکاران معرفی می شود DMU_k را در نظر بگیرید ، فرض کنید این DMU به دو مولفهٔ اول و دوم تقسیم شده است .

خروجی های مولفه اول $Y_k^{(1)}=(y_{1k}^{(1)},\dots,y_{s_1k}^{(1)})^t\ge 0$

خروجی های مولفه دوم $Y_k^{(2)}=(y_{1k}^{(2)},\dots,y_{s_2k}^{(2)})^t\ge 0$

ورودی های مولفه اول $X_k^{(1)}=(x_{1k}^{(1)},\dots,x_{m_1k}^{(1)})^t\ge 0$

ورودی های مولفه دوم $X_k^{(2)}=(x_{1k}^{(2)},\dots,x_{m_2k}^{(2)})^t\ge 0$

ورودی های مشترک $X_k^{(c)}=(x_{1k}^{(c)},\dots,x_{tk}^{(c)})^t\ge 0$

سهم مولفه اول $\alpha^{(1)} = (\alpha_1^{(1)},...,\alpha_t^{(1)})$

سهم مولفه دوم $\alpha^{(2)} = (\alpha_1^{(2)},...,\alpha_t^{(2)})$

بافرض

$$e_k^a = \frac{\mu^1 y_k^{(1)} + \mu^2 y_k^{(2)}}{v^1 x_k^{(1)} + v^{s1}(\alpha^{(1)} x_k^{(c)}) + v^{s2}(\alpha^{(2)} x_k^{(c)}) + v^2 x_k^{(2)}}$$

$$e_k^1 = \frac{\mu^1 y_k^{(1)}}{v^1 x_k^{(1)} + v^{s1}(\alpha^{(1)} x_k^{(c)})}$$

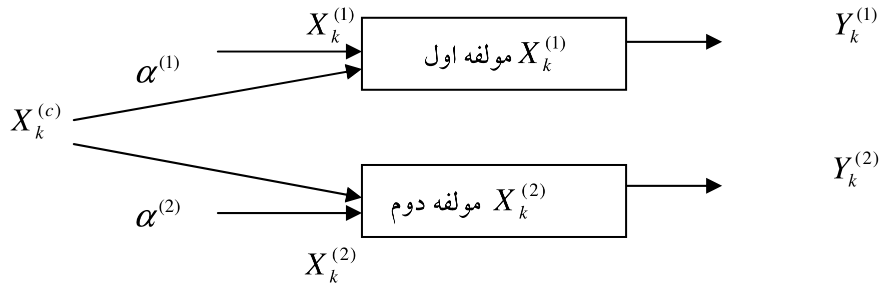
$$e_k^2 = \frac{\mu^2 y_k^{(2)}}{v^{s_2}(\alpha^{(2)} x_k^{(c)}) + v^2 x_k^{(2)}}$$

مدل کوک وهمکاران به صورت زیر فرمول بندی می شود:

$$\begin{array}{ll} Max & e_0^a \\ s.t & e_k^a \le 1 \quad \forall k \\ & e_k^1 \le 1 \quad \forall k \\ & e_k^2 \le 1 \quad \forall k \\ & 0 \le \alpha_i \le 1 \quad \forall i \\ & \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = 1 \\ & (\mu^1, \mu^2) \in \Omega_1 \\ & (v^1, v^{s_1}, v^{s_2}, v^2) \in \Omega_2 \\ & \mu_j^1, \mu_j^2, v_j^1, v_j^2, v_j^{s_1}, v_j^{s_2} \ge \delta \quad , \forall j \end{array} \qquad (۳)$$

یک مدل مبتنی بر DEA برای اندازه گیری کارآیی چندمولفه ای

در این بخش مدلی برای اندازه گیری کارآیی تجمعی و کارآیی کلی یک واحد تصمیم گیری ارایه می شود. صورت تصویری مصرف ورودی – تولیدخروجی در DMU_k با دو مولفه در شکل زیر نشان داده می شود.



شکل ۱

مجموعه امکان تولید در این حالت به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned}
T_{com_k} = \{ & (X^{(1)}, X^{(2)}, \alpha^{(1)} X^{(c)}, \alpha^{(2)} X^{(c)}, Y^{(1)}, Y^{(2)}): \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(1)} X_j^{(1)} \le X^{(1)} \;\&\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2)} X_j^{(2)} \le X^{(2)} \;\& \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(1)} X_j^{(c)} \le \alpha^{(1)} X^{(c)} \;\&\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2)} X_j^{(c)} \le \alpha^{(2)} X^{(c)} \;\& \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(1)} Y_j^{(1)} \ge Y^{(1)} \;\&\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2)} Y_j^{(2)} \ge Y^{(2)} \;\&\; \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = 1 \,,\; \lambda_j^{(1)} \ge 0 \,,\; \lambda_j^{(2)} \ge 0 \}
\end{aligned}$$

با

توجه به این مجموعه امکان تولید، در ماهیت خروجی سعی می کنیم خروجی های مولفهٔ اول را با فاکتور ϕ_1 و خروجی های مولفه دوم را با فاکتور ϕ_2 منبسط می کنیم به طوری که واحد جدید همچنان در T_{com_k} قرار داشته باشد. به عبارت دیگر به دنبال واحدی مثل $(X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, \alpha^{(1)} X_k^{(c)}, \alpha^{(2)} X_K^{(c)}, \phi_1 Y_k^{(1)}, \phi_2 Y_K^{(2)})$ در T_{com_k} هستیم.

اکنون برای به دست آوردن یک شاخص کارآیی تجمعی، مجموع توزین شدهٔ ϕ_2, ϕ_1 را بیشینه می کنیم. اگر μ_1 را وزن شاخص ϕ_1 و μ_2 را وزن شاخص ϕ_2 بگیریم مدل زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
& Max \;\; Z_k = \mu_1 \phi_1 + \mu_2 \phi_2 \\
& s.t \quad (X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, \alpha^{(1)} X_k^{(c)}, \alpha^{(2)} X_K^{(c)}, \phi_1 Y_k^{(1)}, \phi_2 Y_K^{(2)}) \in T_{com_k} \\
& \qquad \mu_1 + \mu_2 = 1 \\
& \qquad \mu_1, \mu_2 \ge 0
\end{aligned} \tag{۴}$$

با توجه به تعریف T_{com_k} مدل (۲) به صورت زیر خواهد بود.

$$
\begin{aligned}
& Max \;\; Z_k = \mu_1\phi_1 + \mu_2\phi_2 \\
& s.t \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(1)} X_j^{(1)} \le X_k^{(1)} \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2)} X_j^{(2)} \le X_k^{(2)} \\
& \qquad \sum_{g=1}^{n} \lambda_j^{(1)} \alpha^{(1)} X_j^{(c)} \le \alpha^{(1)} X_j^{(c)} \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2)} \alpha^{(2)} X_j^{(c)} \le \alpha^{(2)} X_j^{(c)} \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(1)} Y_k^{(1)} \ge \mu_1\phi_1 Y_k^{(1)} \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2)} Y_k^{(2)} \ge \mu_2\phi_2 Y_k^{(2)} \\
& \qquad \mu_1 + \mu_2 = 1 \\
& \qquad \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = 1 \\
& \qquad \mu_1, \mu_2 \ge 0 \\
& \qquad \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \ge 0
\end{aligned} \qquad (۵)
$$

اما مدل فوق به دلیل وجود $\mu_1, \mu_2, \phi_1, \phi_2, \lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2$ یک مدل غیر خطی است از این رو پیچیدگی محاسباتی در حل مدل فوق خیلی بالاست.

برای برطرف کردن این پیچیدگی ، با توجه به شکل (۱) می بینیم که مولفه های (۱) و (۲) روی هم هیچ تاثیری نمی گذارد لذا جدا از هم اند. پس می توان کارآیی هر مولفه را جدا گانه از حل مدل زیر به دست آورد:

$$
\begin{aligned}
& \phi_1^* = Max \;\; \phi_1 \\
& s.t \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(1)} X_j^{(1)} \le X_k^{(1)} \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(1)} \alpha^{(1)} X_j^{(c)} \le \alpha^{(1)} X_k^{(c)} \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(1)} Y_j^{(1)} \ge \phi_1 Y_k^{(1)} \\
& \qquad \phi^1 \ge 0 \\
& \qquad \lambda_j^{(1)} \ge 0 \qquad j = 1, ,..., n
\end{aligned} \qquad (۶)
$$

$$
\begin{aligned}
&\phi_2^{*} = Max \quad \phi_2 \\
&s.t \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2)} X_j^{(2)} \le X_k^{(2)} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2)} \alpha^{(2)} X_j^{(c)} \le \alpha^{(2)} X_k^{(c)} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2)} Y_j^{(2)} \ge \phi_2 Y_k^{(2)} \\
&\qquad \phi_2 \ge 0 \\
&\qquad \lambda_j^{(2)} \ge 0 \qquad j = 1,,\dots,n
\end{aligned} \tag{۷}
$$

اکنون ϕ_1^* کارآیی نسبی مولفه اول و ϕ_2^* کارآیی نسبی مولفه دوم است.

حال می توانیم از مدل (۵) برای به دست آوردن کارآیی تجمعی استفاده کنیم این مدل به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&\phi_k^{(a)} = \mathrm{M}ax = \mu_1 \phi_1^* + \mu_2 \phi_2^* \\
&s.t \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(1)} X_j^{(1)} \le X_k^{(1)} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2)} X_j^{(2)} \le X_k^{(2)} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(1)} \alpha^{(1)} X_j^{(c)} \le \alpha^{(1)} X_k^{(c)} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2)} \alpha^{(2)} X_j^{(c)} \le \alpha^{(2)} X_k^{(c)} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(1)} Y_k^{(1)} \ge \mu_1 \phi_1^* Y_k^{(1)} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(2)} Y_k^{(2)} \ge \mu_2 \phi_2^* Y_k^{(2)} \\
&\qquad \mu_1 + \mu_2 = 1 \\
&\qquad \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \ge 0 \\
&\qquad \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = 1 \\
&\qquad \mu_1, \mu_2 \ge 0 \\
&\qquad \lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)} \ge 0
\end{aligned} \tag{۸}
$$

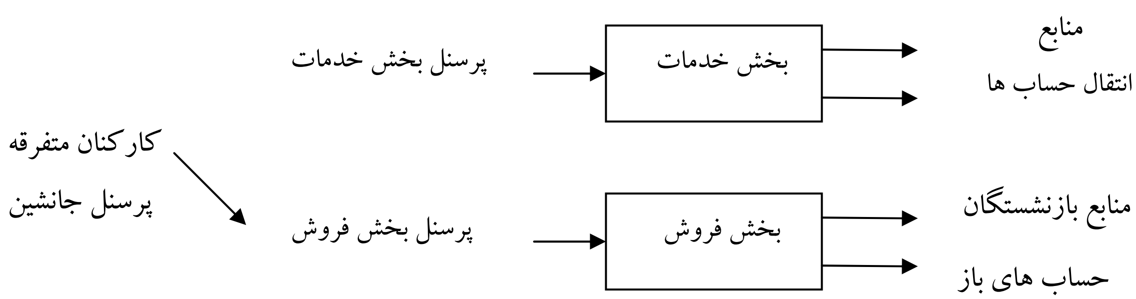
مدل (۸) به دلیل وجود $\alpha^{(2)},\alpha^{(1)}$ هنوز غیر خطی است. اگر بخواهیم کارآیی تجمعی و کارآیی مولفه ای را حساب کنیم به سادگی می توان $\alpha^{(2)},\alpha^{(1)}$را از دو طرف قیود سوم و چهارم حذف کنیم اما اگر بخواهیم $\alpha^{(2)},\alpha^{(1)}$ را نیز داشته باشیم مدل غیر خطی (۸) را با حضور $\alpha^{(2)},\alpha^{(1)}$ حل می کنیم.

دو مطالعهٔ کاربردی

مطالعه اول

در این بخش روش پیشنهاد شده را روی مجموعه ای از داده ها شامل ۲۰ شعبه بانکی یکی از بانکهای کشور کانادا پیاده می کنیم. داده ها از مقاله ی کوک و همکاران برداشته شده است و شامل چهار ورودی و چهار خروجی است. هر شعبه بانکی به دو بخش فروش و خدمات تقسیم شده است. بخش خدمات ورودی پرسنل و قسمتی از ورودی های کارکنان متفرقه و پرسنل جانشین را برای تولید خروجی ها ی منابع و انتقال حساب ها مصرف می کند. همچنین بخش فروش ورودی های پرسنل وقسمتی از ورودی های کارکنان متفرقه و پرسنل جانشین را برای تولید خروجی های منابع بازنشستگان و حساب های باز مصرف می کند.

شکل زیر نحوه ی مصرف و تولید ورودی ها و خروجی ها را نشان می دهد.



شکل ۲

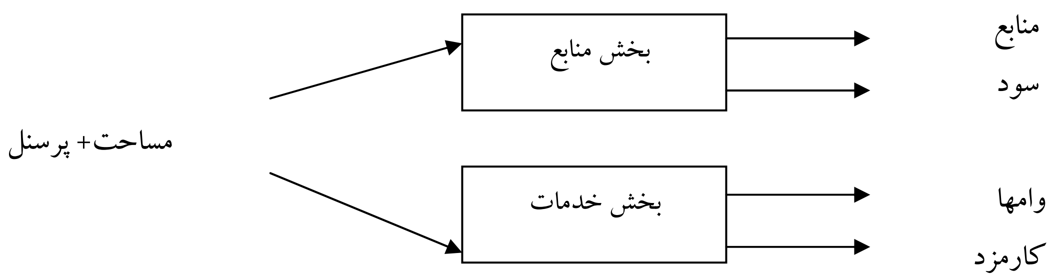
داده ها ی خام به همراه نتیجه ی اجرای روش پیشنهادی در این مقاله در جدول (۱) خلاصه شده اند.

شعبه	خروجی مولفه اول		خروجی مولفه دوم		ورودی مولفه اول	ورودی مولفه دوم	ورودی مشترک		کارآیی مولفه اول	کارآیی مولفه دوم	کارآیی تجمعی
۱	۱/۴۹۸	۲/۸۷۳	۴/۲	۳/۶	۰/۴۵۵	۰/۴۹۲	۰/۷۳	۰/۱۷	۲/۲۹۷	۲/۳۵۸	۲/۳۲۵۱۳
۲	۱/۲۲۶	۳/۰۳۹	۹/۷	۵/۹	۰/۹۴۲	۰/۶۶۱	۱/۰۰	۱/۸۸	۲/۷۲۵	۱/۴۴۷	۲/۱۸۵۹۹
۳	۰/۸۶۵	۱/۸۵۷	۴/۹	۳/۷	۰/۵۱۰	۰/۲۹۳	۱/۰۱	۰/۴۷	۳/۷۴۰	۱/۳۵۹	۲/۰۵۸۰۶
۴	۳/۲۹۰	۸/۵۳۲	۱۲/۲	۴/۸	۱/۲۳۹	۰/۹۱۶	۰/۱۰	۱/۱۳	۱/۰۰۰	۱/۳۷۷	۱/۱۶۹۷۴
۵	۱/۷۷۷	۳/۳۰۴	۱۶/۸	۷/۹	۱/۰۱۵	۰/۷۲۴	۰/۱۲	۴/۴۸	۱/۹۸۲	۱/۰۰۰	۱/۵۳۹۸۵
۶	۰/۱۱۰	۴/۳۴۰	۰/۹	۰/۵	۰/۸۸۳	۱/۴۷۴	۰/۳۳	۳/۶۱	۱/۸۹۵	۲۰/۰۰۰	۹/۷۳۳۸۵
۷	۱/۴۹۳	۴/۶۴۰	۵/۲	۸/۷	۰/۵۹۴	۰/۳۲۰	۰/۲۱	۲/۸۶	۱/۵۵۹	۱/۰۰۰	۱/۲۷۱۴۳
۸	۳/۲۴۳	۶/۸۲۱	۱۱/۰	۷/۴	۰/۸۱۵	۰/۶۶۹	۰/۱۶	۲/۹۹	۱/۱۷۲	۱/۲۱۷	۱/۱۹۴۰۷
۹	۲/۵۹۹	۴/۷۰۹	۶/۳	۶/۵	۰/۸۶۲	۰/۶۷۰	۱/۲۱	۰/۹۲	۱/۵۹۴	۱/۶۴۱	۱/۶۱۶۰۸
۱۰	۰/۰۳۷	۰/۰۱۵	۲/۹	۰/۶	۰/۰۰۰	۰/۰۶۰	۱/۵۵	۵/۴۵	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰۰
۱۱	۴/۳۳۲	۸/۵۳۲	۷/۲	۹/۷	۰/۹۷۲	۱/۲۱۶	۰/۱۴	۰/۱۲	۱/۰۰۰	۱/۲۱۹	۱/۱۸۰۳۵
۱۲	۲/۷۱۸	۵/۳۱۲	۳/۵	۳/۵	۰/۰۳۵	۱/۰۰۷	۰/۳۱	۰/۴۲	۱/۰۰۰	۳/۰۹۲	۱/۵۱۵۴۰
۱۳	۲/۱۱۵	۳/۶۴۳	۶/۴	۸/۴	۱/۳۱۷	۰/۵۵۰	۰/۱۷	۲/۵۹	۲/۰۴۸	۱/۲۳۴	۱/۶۱۹۲۳
۱۴	۳/۰۱۰	۴/۸۷۸	۶/۰	۵/۹	۰/۶۱۰	۰/۹۳۹	۰/۲۱	۰/۵۴۰	۱/۲۳۲	۱/۸۲۴	۱/۴۹۵۰۶
۱۵	۱/۹۹۳	۴/۱۰۹	۶/۲	۶/۰	۰/۵۱۱	۰/۶۵۹	۰/۰۱	۱/۹۶	۱/۶۹۱	۱/۷۲۲	۱/۷۰۱۹۹
۱۶	۲/۹۵۰	۴/۹۵۰	۴/۷	۵/۳	۰/۷۱۹	۰/۶۰۲	۰/۴۹	۱/۱۷	۱/۳۲۱	۱/۹۵۶	۱/۷۵۸۹۸
۱۷	۲/۴۱۵	۶/۳۸۹	۷/۸	۱۲/۳	۱/۴۸۵	۰/۶۸۹	۰/۲۶	۵/۰۳	۱/۳۳۵	۱/۰۰۰	۱/۲۰۹۱۶
۱۸	۱/۳۷۷	۲/۹۳۹	۴/۳	۹/۰	۰/۵۲۸	۰/۴۳۶	۰/۱۳	۰/۳۹	۲/۳۸۴	۱/۰۹۲	۱/۶۴۷۵۸
۱۹	۱/۹۷۵	۶/۱۸۴	۴/۳	۲/۷	۰/۷۴۳	۰/۵۴۶	۰/۵۶	۰/۸۳	۱/۲۵۲	۲/۸۱۱	۲/۱۲۰۸۴
۲۰	۰/۹۵۱	۳/۰۵۳	۳/۲	۱/۰	۰/۵۰۸	۰/۲۹۵	۱/۲۵	۱/۴۴	۲/۲۷۲	۳/۰۹۸	۲/۸۲۲۹۸

جدول ۱: داده های مطالعۀ اول و نتایج

مطالعه دوم

در این مثال عملکرد ۱۴ شعبه ی بانکی یکی از بانکهای تجاری بزرگ کشور را مورد تحلیل قرار می دهیم. هر شعبه بانکی به دو مولفه بخش خدمات و بخش منابع تقسیم می شوند و ورودی های بخش خدمات و بخش منابع، مساحت شعبه و پرسنل در نظر گرفته شده است. خروجی بخش منابع عبارتند از میزان منابع و سود، خروجی بخش خدمات عبارت از وامها و کارمزد است. یک شعبه بانکی در یک نگاه به صورت شکل زیر در نظر گرفته شد.



شکل ۳

شعبه	ورودی مشترک		خروجی مولفه اول		خروجی مولفه دوم		کارآیی مولفه اول	کارآیی مولفه دوم	کارآیی تجمعی
	(۱)	(۲)	(۱)	(۲)	(۱)	(۲)			
۱	۲۳۲	۱۰/۶۶۳۸۷	۴/۱۰۲۱۸۹	۲۰۵۹۹	۵۹۳۰۲۱۴۶	۰	۷/۷۰۰	۷/۱۸۷	۷/۴۴۳۵
۲	۲۱۵	۱۱/۸۸۲۱۵	۶/۸۵۴۱۸	۳۷۴۸۱۹	۷۴۹۳۳۱۵	۳۸۵۲۴۱۰۸	۱/۰۰۰	۵۰/۰۰۰	۱۹/۹۸۰
۳	۳۶۵	۱۲/۶۴۸۵۵	۸/۱۷۵۳۲۴	۶۲۶۸۱	۸۱۲۶۹۱۸	۱۷۸۵۷۴۸۳۱	۴/۱۶۹	۳۰/۰۰۰	۱۴/۹۴۰
۴	۶۷۴	۲۲/۱۰۱۵۹	۶۶۵۰۴	۳۶۵۰۲	۱۶۲۶۴۹۳۸	۲۰۹۱۸۰۲۷۷	۱۰/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۱۸/۳۴۰
۵	۳۶۴	۱۰/۸۲۵۸۲	۶/۳۲۰۰۴۸	۳۱۴۷۸	۳۰۲۲۵۳۵	۸۸۷۲۴۶۲۴۷	۲/۴۶۹	۷/۲۳۹	۴/۵۰۶۰
۶	۲۷۱	۱۵/۴۵۷۷۸	۸/۷۰۱۲۴	۳۶۵۳۱	۶۰۸۵۸۲۸۱	۱۶۷۵۴۲۹۹۳۶	۹/۹۰۹	۳/۸۷۶	۷/۳۵۲۲
۷	۲۷۴	۱۱/۸۱۱۶	۴/۴۸۲۲۸	۲۴۱۴۰۵	۱۵۹۷۱۸۶۸	۷۱۱۰۵۹۷۹۵۲	۱/۵۴۳	۱/۰۰۰	۱/۳۱۲۸
۸	۱۹۸	۱۳/۰۴۰۱۱	۶/۷۹۱۵۱	۹۲۳۶۵	۱۵۲۰۴۸۸۷۹	۳۰۸۱۰۷۹۵۳۲	۳/۹۴۵	۱/۵۴۹	۲/۹۲۹۵
۹	۲۴۲	۹/۱۰۱۵۷۶	۸/۱۴۷۸۴۷	۲۷۰۰۵	۶۸۴۹۶۴۸۵	۱۷۰۵۳۸۱۹۲۸	۴/۵۴۳	۲/۱۶۸	۳/۵۳۶۴
۱۰	۷۵	۱۲/۰۴۵۷۷	۶/۸۸۸۸۶۰	۲۰۷۳۴۸	۴۸۱۴۳۶۱۷۶	۱۱۶۹۷۳۸۰۲۶	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۱۱	۶۴۶	۲۴/۵۴۴۷۹	۴/۲۲۷۷۳۲	۳۳۲۴۸	۲۶۴۸۷۴۴۴	۱۷۳۴۱۸۵۴۶۹	۷/۹۵۳	۷/۳۱۱	۷/۶۳۳۸
۱۲	۵۳۴	۱۰/۲۵۴۳۶	۴/۵۶۲۵۱	۵۱۳۶۵	۲۱۰۱۷۹۸۲	۱۷۴۸۸۵۴۵۱۴	۵/۳۴۶	۳/۱۴۰	۴/۲۴۹۵
۱۳	۲۰۸	۱۲/۲۸۶۸۷	۸/۴۲۲۲۷	۱۸۵۷۳	۷۶۱۴۰۶۷	۵۴۵۹۵۸۸۱۸	۱۰/۰۰۰	۹/۷۰۳	۹/۸۵۲۳
۱۴	۴۹۱	۱۸/۹۸۷۶۴	۱۴۱۶۳۵/۴	۱۴۹۹۶	۱۹۶۵۱۸۷	۷۵۳۰۸۶۱۴۱	۹/۸۹۲	۲۰/۰۰۰	۱۴/۹۲۰

جدول ۲: داده های خام به همراه نتایج اجرای روش پیشنهادی

ستون هشتم و نهم این جدول کارآیی مولفه ای بخش منابع و بخش خدمات را نشان می دهد. اندازهٔ کارآیی تجمعی در ستون دهم جدول خلاصه شده است.

نتیجه گیری

در این مقاله روشی برای اندازه گیری کارآیی تجمعی و کارآیی مولفه ای واحد های تصمیم گیری چند مولفه ای ارایه شده است. در این روش با استفاده از دو مدل برنامه ریزی خطی اندازه کارآیی های مولفه ای بدست می آید سپس با یک مساله برنامه ریزی ریاضی دیگر کارآیی تجمعی واحد های تصمیم گیری اندازه گیری می شود. کارآیی تجمعی واحد های تصمیم گیری طوری تعریف شده است که بصورت ترکیب محدبی از کارآیی مولفه های این واحد می باشد. دو مطالعه کاربردی از روش پیشنهاد شده روی بانکهای تجاری کشور کانادا (که از مقاله کوک و همکاران برداشته شده است) و بانکهای تجاری ایران ارایه شده است.

منابع

[1] R. D Banker, A. Charnes, W. W .Cooper,” Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis”, Manage.sci 30(9) (1984)1078-1092.

[2] A.Charnes, W.W.Cooper,” programming With Linear fractional functions”, Naval Res. Logist.Quart.9 (1962)181-186.

[3] A.Charnes, W.W.Cooper, E.Rhodes, “Measuring the efficiency of decision making Units”, Eur.J.operat.Res.2 (6) (1978)429-444.

[4] W.D.Cook, M.Hababou, H.J.H.Tuenter,” Multicomponent efficiency measurement And shared inputs in DEA: an application to sales and service performance in Bank branches”, J. product, Anal. (2000).

[5] R.Fare,S,Grosskopf,”productivity and intermediate products: a frontier approach”, Econ.lett. 50(1)(1996)65-70.