Archive of SID

کاربرد گراف های n- مکعبی در شبکه ها

محسن میرزائی[1] عطا اله نظری معافی[2]
[1]گروه ریاضی- دانشگاه آزاد اسلامی واحد آستارا
[2] گروه ریاضی - دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان

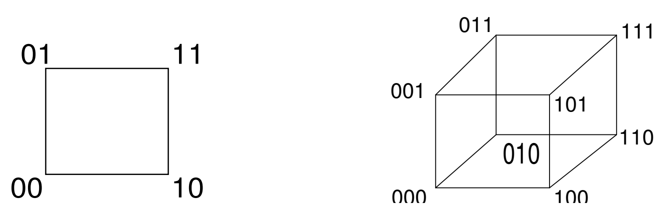
چکیده
در این مقاله ابتدا گراف های Q_n را معرفی می کنیم و به دنبال آن مطالبی در باره ی این گراف ها را بیان می نماییم الگوریتمی را برای رسم شبکه های D_m، یعنی مقسوم علیه های عدد صحیح مثبت m، به دست می آوریم.

کلمات کلیدی: گراف های مکعبی، شبکه، رأس منبع، رأس چاه

مقدمه

معرفی گراف های مکعبی

فرض کنید $\mathbf{B}_n$ نشان دهنده ی گروه $(Z_2)^n$ متشکل از تمام n– تایی های دوتایی، همراه نمایش مولفه ای به سنج ۲ باشد. n_1 – مکعبی که با Q_n نشان می دهیم، گرافی است که مجموعه رئوس آن $V(Q_n) = B_n$ بوده، و اینکه دو راس (n– تایی های) U و V مجاورند اگر و فقط اگر تنها در یک مختص اختلاف داشته باشند.



Q_2 Q_3

شکل ۱

www.SID.ir

Archive of SID

حقایقی از گراف های Q_n

حقیقت۱: گراف Q_n، n منتظم بوده و دارای 2^n رأس و $2^{n-1}n$ یال می باشد.

حقیقت ۲: دو رأس (n- تایی) U و V در Q_n مجاورند اگر و تنها اگر جمع مولفه ای به سنج ۲، U+V یک n- تایی باشد که درست یک ۱ در بر داشته باشد.

حقیقت ۳: Q_n یک گراف دو بخشی بوده، یک مجموعه افراز شده دارای 2^{n-1} رأس که یک تعداد زوج یک دارد، دیگری دارای 2^{n-1} رأس که دارای یک تعداد فرد یک را شامل می شود.

رسم نمودارهای مقسوم علیه های یک عدد با کمک گراف های Q_n

از نظریه ی اعداد می دانیم که مجموعه ی اعداد مثبت N با عمل های زیر یک شبکه است

$$a \vee b = l.c.m.(a,b) \qquad , \qquad a \wedge b = g.c.d.(a,b)$$

که در آن l.c.m به معنی کوچکترین مضرب مشترک و g.c.d به معنی بزرگترین مقسوعلیه مشترک است.

قضیه: اگر L یک شبکه باشد آنگاه رابطهٔ $a \, 9 \, b$ که با $a \wedge b = a$ یا $a \vee b = b$ تعریف می شود یک ترتیب جزئی روی L است.

حال دو عضو a و b از یک مجموعهٔ مرتب خطی را در نظر می گیریم که در آن $a \, 9 \, b$ آنگاه $\inf(a,b) = a$ و $\sup(a,b) = b$. از آنجا که برای هر عضو $\inf(a,b)$ و $\sup(a,b)$ وجود دارد، از این رو یک مجموعه مرتب خطی، یک شبکه است.

فرض کنیم که می خواهیم شبکه L را روی D_m یعنی مقسوم علیه های عدد صحیح مثبت m رسم نماییم، لذا گامهای زیر را طی می کنیم؛

الف) عدد m را به حاصلضرب عوامل اول تجزیه و بصورت زیر می نویسیم.

$$m = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}$$

که در آن

$P_i = 2,3,5,...$	عاملهای اول متمایز
$\alpha_i = 1,2,3,...$	تعداد تکرار هر عامل اول
n	تعداد عامل های اول متمایز عدد A

ب) با توجه به عدد n گراف Q_n را انتخاب می کنیم.

ج) به تعداد $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i$، حاصلضرب نماهای عامل های اول m، به Q_n نیاز داریم.

www.SID.ir

Archive of SID

د) برای هریک از عامل های اول P_i جهتی را تحت عنوان جهت P_i یا جهت عاد کردن در نظر می گیریم.

ه) ابتدا یک Q_n را روی صفحه رسم و عدد m را روی یکی از رئوس آن قرار می دهیم، روی یال های منشعب از این رأس عامل های اول را بطور دلخواه قرار می دهیم. در واقع با این کار یک شناسه به هریک از یال ها داده ایم.

حال برای هر یک از یال های شناخته شده جهتی در نظر می گیریم که مخصوص آن یال می باشد. و عمل عاد کردن را در این جهت انجام می دهیم. پس هر یال را بصورت کمانی در نظر می گیریم که انتهای کمان نتیجه عاد کردن ابتدای کمان با α_i باشد. در حقیقت با این عمل گراف جهتدهی شده و گرافی جهت دار به تعداد حاصلضرب نماهای عاملهای اول متمایز m ، Q_n متصل بهم پدید می آید. که رأس شامل عدد m ، رأس منبع[1] می باشد. و با تقسیمات متوالی بر عاملهای اول رئوس بعدی بدست می آیند. این روند تقسیمات متوالی بر عامل های اول را ادامه داده و با حفظ اصول ساختار Q_nها به رأس عدد یک که برسیم ، شبکه مورد نظر و تعداد مقسوم علیه های m کامل شده است. در حقیقت رأس حاوی عدد ۱ رأس چاه[2] نامیده می شود.

پس شبکه بدست آمده یک گراف متشکل از Q_nها بوده که جهت دار همبند بوده و همیشه دارای دو رأس منبع ، موید عدد m و رأس چاه ، موید عدد یک می باشد. در حقیقت با رسیدن به رأس چاه الگوریتم خاتمه می یابد.

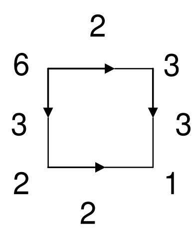
تذکر ۱: Q_1 گرافی با دو رأس و یک یال است. پس هر یال یک Q_1 است و Q_2 گرافی با چهار راس و چهار یال می باشد.

تذکر ۲: گراف Q_3 گراف مکعبی نامیده می شود.

تذکر ۳: به ازای هر $n > 2$، گراف Q_n، از اتصال 2^{n-3} گراف مکعبی به همدیگر مطابق تعریف بدست می آید.

چند مثال:

$D_6 = \{1,2,3,6)$



$6 = 2\times 3$

$\Rightarrow Q_2$

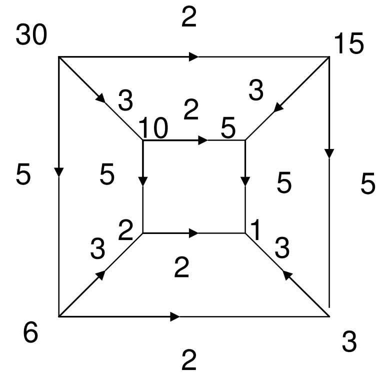
1. منبع، رأسی است که درجه ورودی آن صفر باشد *Source*

2. چاه، رأسی است که درجه خروجی آن صفر است. *Sink*

www.SID.ir

Archive of SID

$30 = 2\times3\times5 \qquad D_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$



شکل ۲

درمثال D_{30} به جهت ها توجه شود. تقسیم بر۲ در جهت چپ به راست و تقسیم بر ۵ در جهت بالا به پائین و تقسیم بر عدد ۳ در جهت شمال غربی به جنوب شرقی انجام شده است.

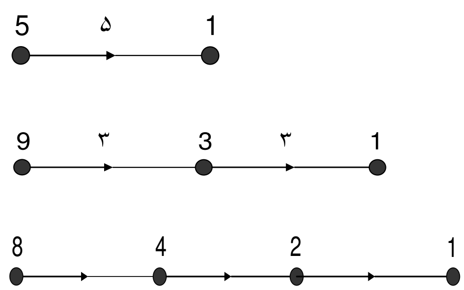
اکنون برای روش شدن مطلب، اعداد را بر حسب تعداد عامل های اول به دسته های مختلف دسته بندی می کنیم.

- اعدادی که تنها دارای یک عامل اول هستند، یعنی به صورت $m = P_1^{\alpha_1}$ نوشته می شوند که P_1 عامل اول و α_1 مرتبه ی تکرار آن است. چون یک عامل اول دارد پس شبکه مورد نظر از اتصال α_1 تعداد Q_1 به همدیگر بوجود می آید.

$5=۵^۱ \longrightarrow Q_1$ یک $\longrightarrow$

$9=۳^۲ \longrightarrow Q_1$ دو $\longrightarrow$

$8=۲^۳ \longrightarrow Q_1$ سه $\longrightarrow$

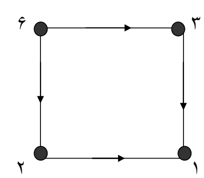


شکل ۳

- اعدادی که دو عامل اول متمایز دارند یعنی بصورت $m = P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}$ نوشته می شوند.پس شبکه حاصل آنها از اتصال گراف های Q_2 به هم دیگر بوجود می آید. که باید به تعداد $\alpha_1\times\alpha_2$ گراف Q_2 به هم اتصال یابند.

مثال: شبکه D_6 و D_{12} و D_{72} را رسم می کنیم.

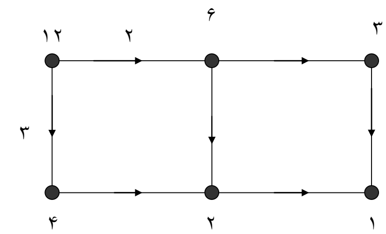
$6 = 2^1\times3^1 \longrightarrow 1\times1=1 \longrightarrow Q_1$ یک



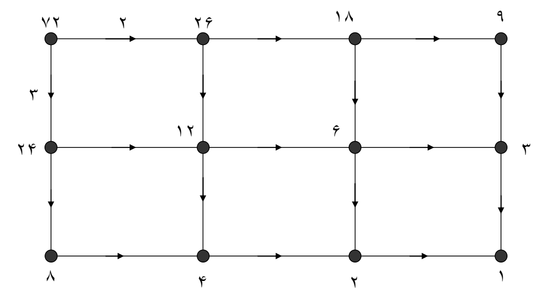
www.SID.ir

Archive of SID

$12 = 2^2 \times 3^1 \longrightarrow 2\times 1 = 2 \longrightarrow Q_2$ دو



$72 = 2^3 \times 3^2 \longrightarrow 3\times 2 = 6 \longrightarrow Q_2$ شش

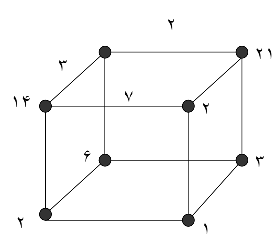


– اعدادی که دارای ۳ عامل اول متمایز هستند یعنی $m = P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}.P_3^{\alpha_3}$. که شبکه حاصل از آن به تعداد $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3$ گراف Q_3 نیاز دارد.

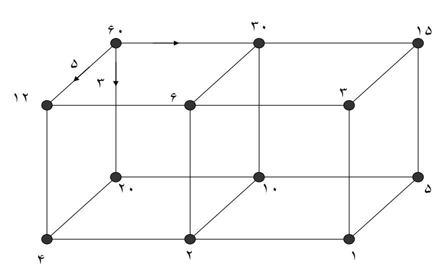
مثال: شبکه D_{42} و D_{60} و D_{180} را رسم می کنیم.

$30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \longrightarrow 1\times 1\times 1 = 1 \longrightarrow Q_3$ یک

$D_{30} = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$



$D_{60}: \quad 60 = 2^2 \times 3 \times 5 \qquad 2\times 1\times 1 = 2 \ : Q_3$

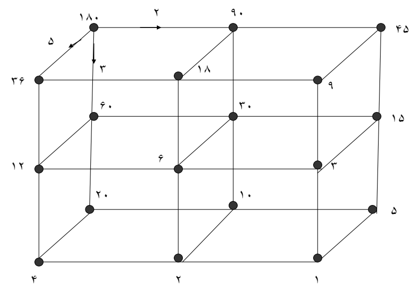


$D_{60} = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$

www.SID.ir

Archive of SID

$D_{180}:\quad 180=2^2\times3^2\times5^1 \longrightarrow 2\times2\times1=4 \longrightarrow Q_3$ 4 تا



$D_{180}=\{1,2,3,4,5,6,9,10,12,15,18,20,30,36,45,60,90,180\}$

پس این موضوع را می توان تعمیم داد. یعنی اگر داشته باشیم:

$m=P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}.P_3^{\alpha_3}.....P_n^{\alpha_k}$

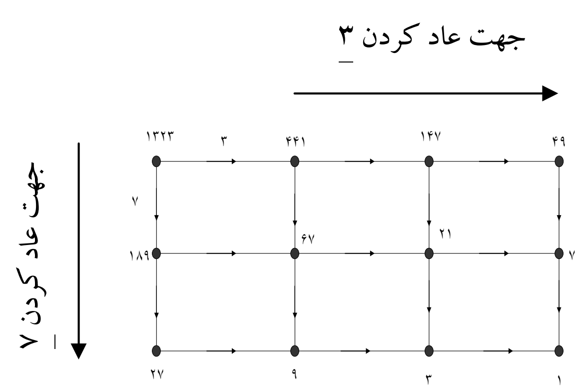
آنگاه نمودار شبکه D_m از اتصال $\alpha_1\times\alpha_2\times...\times\alpha_k$ گراف Q_n به همدیگر بدست می آید. که در حقیقت برای سهولت در رسم آن، بهتر است گراف حاصل را یک گراف جهتدار مجسم نمود، بقسمی که m راس منبع و عدد ۱ راس چاه آن باشد. و جهتدهی کمان ها برحسب عاد کردن عوامل اول α_i ها، $i=1,2,...,k$ می باشد.

هر عامل اولی در گراف معرف کمانی است جهت دار، که دارای جهت خاص خود می باشد. نحوه اتصال Q_nهای متعدد به هم نیز به این عامل ها و تکرار شان وابسته است. عاملی که تکرار شده(یعنی نمای آن بزرگتر از یک است) را در نظر می گیریم. به تعداد آن عدد، گراف Q_n در جهت کمان مؤید عدد اول متناظر تکرار می شود. به عنوان مثال در نمودار $m=2^5\times3^2\times7^1$ ؛ ۱۰ گراف Q_3 نیاز است که ۵ تای آن در جهت کمان عاد کردن ۲ و در جهت کمانهای عاد کردن ۳ باید دو گراف Q_3 موجود باشد. پس گراف های Q_3 در آرایشی 5×2 یا 2×5 بهم دیگر اتصال می یابد.

مثلاً شبکه D_{1323} بصورت زیر است:

$1323=3^3\times7^2$

یعنی گراف های Q_2 در آرایشی 3×2 یا 2×3 بهم اتصال می یابد.



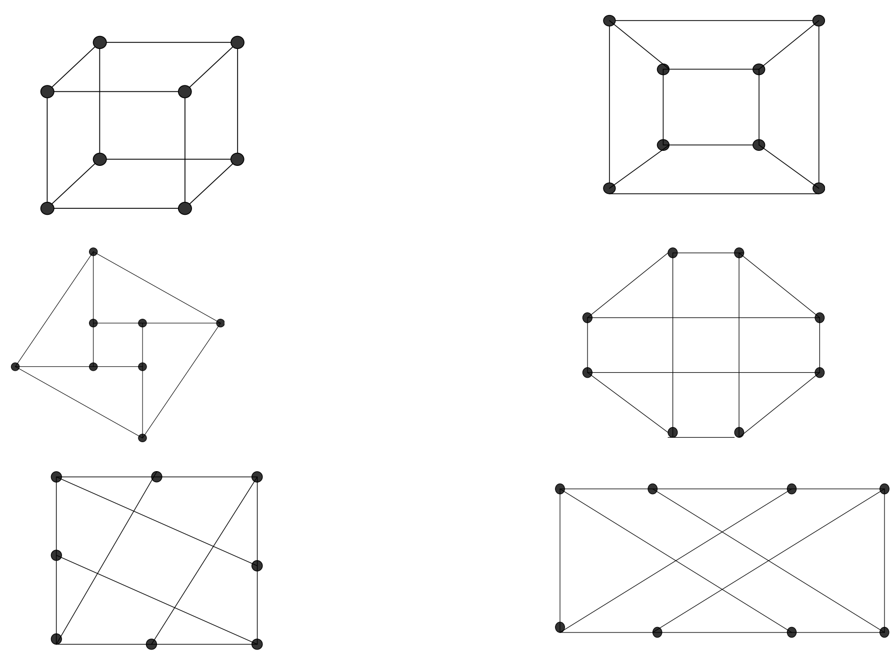
www.SID.ir

Archive of SID

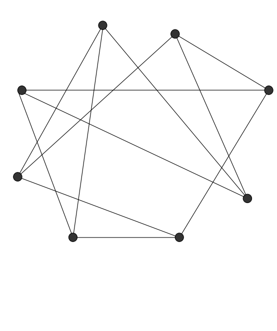
لازم به تذکر است که با کمی دقت حتی می توان این شبکه ها را بصورت گراف های غیر جهتدار فرض نمود که این امر کمک شایانی در تجسم اشکال فضایی حاصل از D_m خواهد کرد.

نتیجه گیری

فکر کردن در بارهٔ اشیاء در ابعاد فضایی مرتفع تر برای مردم مشکل می باشد، یک راه برای کمک به درک ابعاد فضایی مرتفع تر، مطالعه کردن در بارهٔ مثال هایی از اشیایی است که در چنین فضاهایی وجود دارد. یکی از این اشیاء گراف های n – مکعبی می باشد که خاصیت های نمایشی (ترسیمی) جالبی دارد. مثلاً راه های مختلفی برای نمایش گراف حاصل از 3-Cubes (مکعبی) وجود دارد که عبارتند از:



نمودار های فوق کاملاً متقارن می باشند اماکسی نیز ممکن است نمودارهایی از 3-Cubes را که بی قاعده می باشند نیز رسم نماید که این عمل آن را کاملاً غیر قابل تشخیص می نماید. مثلاً ممکن است فردی یک 3-Cubes را به صورت زیر رسم نماید.



www.SID.ir

Archive of SID

پس در این مقاله ضمن معرفی گراف های n- مکعبی به صورت گراف فضایی، توانستیم نشان دهیم که نمودار حاصل از تمام D_m ها بصورت یک الگوی خاص بوده، بقسمی که شناخت گراف های n- مکعبی، تجسم، شناخت و رسم شبکه های حاصل از D_m ها را هموار می سازد . همچنین با تبعیت از این الگو می توان به الگوریتمی رسید کـه رسـم شبکه های D_m را تسهیل و بدست آوردن مقسوم علیه های هر عدد صحیح را هموار می سازد.

منابع

[1] Hart S. A note on the edges of the n-cube, Discrete Math. 14(1976), 157-1630. 14(1976), 157-1630.

[2] John Frederick Fink, on the Decomposition of n-Cubes into Isomorphic Trees, DEPARTMENT of MATHEMTICS university of Michigan.

[3] Joseph Malkevitch, n-Cubes Tidbit, Mathematicas Department York, Couese (CUNY) Jamaica, New York 11451.

[4] SERGEJ L. BEZRUKOV. On Edge numberings of the n-cube Graph.

[5] Wilf, h., Combinatorial Algorithms: An update, SIAM, Philadelphia, 1989.

[۶] میرزائی، محسن، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان.

www.SID.ir