معرّفی متریک لورنتسی بر روی منیفلدها و بررسی گروههای لی تک مدولی لورنتسی سه بعدی

لیلا حامدی مبرا

گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی مرکز فومن و شفت

چکیده

در این تحقیق ابتدا برای منیفلد M، با استفاده از ضرب اسکالر فضای مماسی T_mM که آنرا با g_m نشان می دهیم یک متریک لورنتسی را که به صورت $g(m) = g_m$ و دارای ویژگی های خاصی است، معرفی می کنیم آنگاه هر گروه لی دارای یک متریک لورنتسی پایای چپ را یک گروه لی لورنتسی می نامیم و سپس تابع مدولی Δ را برای یک گروه لی ارائه نموده، گروه لی با $\Delta \equiv 1$ را گروه لی تک مدولی می نامیم و در پی آن جبر لی تک مدولی را تعریف می نماییم و در خاتمه بررسی می کنیم که تحت ایزومورفیسم فقط شش جبر لی تک مدولی لورنتسی سه بعدی مجزا وجود دارد و به معرفی آنها می پردازیم.

کلمات کلیدی: منیفلد، گروه لی، متریک شبه ریمانی، متریک لورنتسی، گروه لی لورنتسی، گروه لی تک مدولی.

۱ مقدمه

در آغاز این تحقیق به معرفی متریک لورنتسی بر روی یک گروه لی، سپس بـه معرفـی تـک مـدولی بـودن گروه لی و در پایان به آشنایی با گروه های لی تک مدولی لورنتسی سـه بعـدی مـی پـردازیم. از آنجـا کـه هـر گروه لی یک منیفلد می باشد به طور کلی تـر مـی تـوان متریـک لورنتـسی را بـر روی منیفلـد دلخـواه M تعریف نمود اما در ابتدا به دلیل نیاز این کار به تعریف ضرب اسکالر روی T_mM بـه سـبب اینکـه T_mM خـود یک فضای برداری است، ضرب اسکالر را بر روی فضای برداری دلخواه V تعریف می کنیم و در پـی آن بـه تبیین ساختار اصلی می پردازیم.

۲ ضرب اسکالر روی فضاهای برداری

اگر فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی باشد، تابع دو خطی $T: V \times V \to R$ یک فرم دو خطی روی V نام دارد و فضای برداری تمام فرمهای دو خطی روی V را بـه $\mathscr{T}^2(\mathrm{V})$ نـشان مـی‌دهـیم. حـال اگـر $T \in \mathscr{T}^2(\mathrm{V})$ باشد می توان تعریف زیر را ارایه نمود: [7]

تعریف ۱-۲

T ناتباهیده است هر گاه: $\quad \forall w \in V: T(v,w) = 0 \Rightarrow v = 0$

T متقارن است هر گاه: $\quad \forall w \in V: T(v,w) = T(w,v)$

یک فرم دوخطی ناتباهیده و متقارن روی V، یک ضرب اسکالر روی V نام دارد و V به همراه آن، فضای حاصلضرب اسکالر نامیده می‌شود.

گزاره ۱-۲: هر فضای حاصلضرب اسکالر دارای یک پایهٔ متعامدیکه است. [7]

اگر g ضرب اسکالر روی V و e_1 و ... و e_n پایه متعامدی که V باشد، قرار می‌دهیم $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ و همواره $\varepsilon_i = \pm 1 \ (i = 1, ..., n)$ می باشد. در پی آن گردایه مرتب $(\mathrm{sgn}\,\varepsilon_1, ..., \mathrm{sgn}\,\varepsilon_\mathrm{n})$ را در نظر می‌گیریم و تعداد علامت های منفی در این گردایه را به $ind\ V$ نشان می‌دهیم و اندیس V می‌نامیم. [6]

۳ متریک لورنتسی روی منیفلدها و گروه های لی

فرض می‌کنیم M یک منیفلد n بعدی باشد در اینصورت به ازاء هر $m \in M$ ، $T_m M$ یک فضای برداری n بعدی است. حال اگر g_m را یک ضرب اسکالر روی $T_m M$ فرض کنیم تعریف زیر قابل ذکر است: [5]

تعریف ۱-۳ تابع $g(m) = g_m \ ; \ g: M \to \underset{m \in M}{U} \ \mathscr{T}^2(T_m M)$ یک متریک شبه ریمانی روی M نام دارد هر گاه:

I) به ازاء میدان های برداری X , Y دلخواه از M، تابع $g(X,Y)_{(m)} = g_m(X_m, Y_m) \ ; \ g(X,Y): M \to R$ دیفرانسیل‌پذیر باشد.

II) همهٔ $ind\ \ T_m M$؛ $m \in M$، یکسان باشند.

در این صورت این اندیس مشترک را با ν نشان می‌دهیم و g را متریک شبه ریمانی با اندیس ν می‌نامیم.

تعریف ۲-۳ هر متریک شبه ریمانی که اندیس آن برابر یک می‌باشد، یک متریک لورنتسی نام دارد. [5]

فرض می‌کنیم G یک گروه لی و به ازاء $g \in G$ دلخواه، $L_g: G \to G$؛ $L_g(x) = gx$ نگاشت انتقال چپ آن باشد می توان یک متریک لورنتسی بر روی G تعریف نمود که ما آن را به $<,>$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳-۳ متریک لورنتسی $<,>$ بر روی G ، پایای چپ نام دارد هرگاه به ازاء میدانهای برداری دلخواه X و Y از G و هر $g \in G$ داشته باشیم: [7]

$$\langle L_{g*}X,\ L_{g*}Y\rangle = \langle X, Y\rangle$$ [1]

تعریف ۳-۴ G یک گروه لی لورنتسی نام دارد هر گاه بر روی آن یک متریک لورنتسی پایای چپ تعریف شده باشد. [1]

۴ تک مدولی بودن گروه های لی

اگر G یک گروه لی n بعدی باشد، جبر لی متناظر با آن را به $\mathfrak{g}$ نشان می‌دهیم که یک جبر حقیقی n بعدی است.

گزاره ۴-۱ تابع $\rho_g : G \to G$ ؛ $\rho_g(a) = gag^{-1}$ دیفئومورفیسم می باشد در نتیجه:
تابع $\rho_{g*} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ [2] ایزومورفیسم است. [4]

تعریف ۴-۱ اگر G یک گروه لی و $g \in G$ دلخواه باشد تابع $Ad(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ را به صورت $Ad(g)(x) = \rho_{g*}(x)$ و همچنین به ازاء هر $x \in \mathfrak{g}$ دلخواه تابع $ad_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ را به صورت $ad_x y = [x, y]$ (که در آن $[x, y] = xy - yx$ ضرب لی براکت است) تعریف می کنیم. [4]

تعریف ۴-۲ اگر G یک گروه لی باشد تابع $\Delta : G \to R^{+}$ ؛ $\Delta(g) = |\det Ad(g)|$ تابع مدولی نام دارد حال اگر $\Delta \equiv 1$ باشد، G یک گروه لی تک مدولی نامیده می‌شود. [6]

تعریف ۴-۳ جبر لی $\mathfrak{g}$ تک مدولی نام دارد هرگاه به ازاء هر $x \in \mathfrak{g}$ ، $trace(ad_x) = 0$ باشد. [1]

گزاره ۴-۲ گروه لی همبند G تک مدولی است اگر و فقط اگر جبر لی $\mathfrak{g}$ تک مدولی باشد. [6]

گزاره ۴-۳ تحت ایزومورفیسم فقط شش جبر لی تک مدولی سه بعدی مجزا وجود دارد که مربوط است به گروه های لی همبند زیر: [1] و [6]

I) R^3

II) گروه هایزنبرگ، H_S، این گروه متشکل از ماتریسهایی به صورت $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ؛ $a, b, c \in R$ می‌باشد.

III) SL (2, R) ، این گروه متشکل از ماتریسهای 2×2 با دترمینان برابر 1 می‌باشد.

IV) SO (3) ، این گروه متشکل از ماتریسهایی به صورت $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ؛ $0 \le \theta \le 2\pi$ می‌باشد.

---

[1] یعنی به ازای هر $a \in g$ دلخواه داشته باشیم $\langle L_{g*}X_a, L_{g*}Y_a\rangle = \langle X_a, Y_a\rangle$ که در آن $L_{g*} : TG \to TG$ دیفرانسیل تابع L_g است.

[2] منظور از ρ_{g*} دیفرانسیل تابع ρ_g می باشد.

(این گروه با گروه دورانهای فضای اقلیدسی R^2 ایزومورف است)

V) E(2)، این گروه متشکل از ماتریسهایی به صورت $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a \\ \sin\theta & \cos\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ؛ $0 \le \theta \le 2\pi$ و $a,b \in R$

می‌باشد.

(این گروه با گروه ایزومتری‌های مستقیم[3] فضای اقلیدسی R^2 ایزومورف است.)

VI) E(1, 1) ، این گروه متشکل از ماتریسهایی به صورت $\begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & a \\ \sinh\theta & \cosh\theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ؛ $a,b,\theta \in R$

می‌باشد.

(این گروه با گروه ایزومتری های مستقیم صفحه مینکوفسکی[4] ایزومورف است)

۵ گروه های لی تک مدولی لورنتسی سه بعدی

تعریف ۱-۵ اگر G یک گروه لی لورنتسی سه بعدی با متریک <، > باشد. هر پایه $\{e_1, e_2, e_3\}$ برای $\mathfrak{g}$ که در آن شرط: $<e_3, e_3> = -1$ ، $<e_1, e_1> = <e_2, e_2> = 1$ ، $<e_i, e_j> = 0$ ؛ $i \neq j$ برقرار می باشد یک پایهٔ لورنتسی نام دارد. [1]

گزاره ۱-۵ اگر G یک گروه لی تک مدولی لورنتسی سه بعدی و $\{e_1, e_2, e_3\}$ یک پایه لورنتسی برای $\mathfrak{g}$ باشد.

اگر قرار دهیم: $[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1 , [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2 , [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3$ (۱) جبرهای لی دارای گردایهٔ علامتهای $(\operatorname{sgn}\lambda_1, \operatorname{sgn}\lambda_2, \operatorname{sgn}\lambda_3)$ مشابه، با یکدیگر ایزومورفند. [1]

گزاره ۲-۵ اگر G یک گروه لی مدولی لورنتسی سه بعدی و پایهٔ لورنتسی آن صادق در شرط (۱) باشد آنگاه: [1] و [2] و [3]

اگر $\operatorname{sgn}\lambda_1 = \operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn}\lambda_3 = 0$ ، $\mathfrak{g}$ با جبر لی R^3 ایزومورف است.

اگر $\operatorname{sgn}\lambda_1 > 0$, $\operatorname{sgn}\lambda_2 = \operatorname{sgn}\lambda_3 = 0$ ، $\mathfrak{g}$ با جبر لی H_S ایزومورف است.

اگر $\operatorname{sgn}\lambda_1 > 0$, $\operatorname{sgn}\lambda_2 > 0$, $\operatorname{sgn}\lambda_3 = 0$ ، $\mathfrak{g}$ با جبر لی $E(2)$ ایزومورف است.

اگر $\operatorname{sgn}\lambda_1 > 0$, $\operatorname{sgn}\lambda_2 > 0$, $\operatorname{sgn}\lambda_3 < 0$ ، $\mathfrak{g}$ با جبر لی SL(2,R) ایزومورف است.

[3] تبدیل خطی که حافظ متریک (حافظ طول) باشد ایزومتری نام دارد و اگر جهت نگهدار باشد به آن ایزومتری مستقیم می گوییم.

[4] R^2 به همراه متریک لورنتسی، صفحه مینکوفسکی نام دارد.

V) اگر $\operatorname{sgn}\lambda_1 > 0$, $\operatorname{sgn}\lambda_2 < 0$, $\operatorname{sgn}\lambda_3 = 0$، وg با جبر لی E (1, 1) ایزومورف است.

VI) اگر $\operatorname{sgn}\lambda_1 > 0$, $\operatorname{sgn}\lambda_2 > 0$, $\operatorname{sgn}\lambda_3 > 0$، وg با جبر لی SO (3) ایزومورف است.

۶ نتیجه گیری

با انتخاب پایهٔ $\{e_1, e_2, e_3\}$ که در رابطه (۱) صدق کند می‌توان گفت که تنها شش جبر لی تک مدولی لورنتسی سه بعدی مجزا تحت ایزومورفیسم وجود دارد که به صورت زیر می‌باشند:

جبر لی مربوط به گروه:	$(\operatorname{sgn}\lambda_1, \operatorname{sgn}\lambda_2, \operatorname{sgn}\lambda_3)$
R^3	(0,0,0)
H_s	(+,0,0)
$E(2)$	(+,+,0)
SL(2,R)	(+,+,-)
E (1,1)	(+,-,0)
SO (3)	(+,+,+)

۷ منابع

[1] M.N.Podoksenov, "Gaussian and mean Curvatures of Two-dimensional subgrups of Three–dimensional unimodular Lorentzian lie groups," Siberian Math. J. 36, No.2, 338 - 342 (1995).

[2] S. Rahmani, "Metriques de Lorentz sur les groupes de lie unimodularies, de dimension Trois," J .Geom. Phy, No. 9, 295 – 302 (1992).

[3] K.Nomizu, "left invariant lorentz metrics on lie groups," Osaka J. Math, No. 16, 143 – 150 (1979).

[4] F. Warner, "Foundations of differentiable manifolds and lie groups," Springer, 1983.

[5] B.A.Dubrovin, S.P.Novikov, A.T. fomenko, "modern Geometry methods and applications: part I, " Springer, 1984 - 1992.

[6] J. Milnor, "curvatures of left invariant metrics on lie groups," adv. Math, No. 3, 293 – 329 (1976).

[7] B. o' neill, "semi – Riemannian geometry with applications to relativity, "Academic press, 1983.