

ارتباط بین (P-گراف) ها و ماتروئیدها و ابرگراف ها

(وقتی که بین راسها رابطه ترتیبی جزئی برقرار باشد)

میرمظفر معصومی^۱* زهره السادات میرمویدی^۲^۱دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم تحقیقات تهران^۲آموزش و پرورش منطقه ۲ تهران

چکیده

در این مقاله (P-گراف) ها، ماتروئیدها و ابرگرافها و ماتریسهای مربوط به آنها را به صورت دیگری بیان گردیده و ارتباط بین آنها را با یکدیگر نشان خواهیم داد. همچنین نشان خواهیم داد که یک ماتروئید و یا ابرگراف یک (P-گراف) است. در حالت نخست فرض می کنیم که بین راسها رابطه ترتیبی جزئی موجود است و سپس در حالت کلی به راحتی می توان آنرا تعمیم داد.

کلمات کلیدی: گراف جهت دار، گراف غیرجهت دار، ماتروئیدها، ابرگراف ها.

مقدمه

نخست (P-گراف) هایی را تعریف می کنیم که بین راسهای آن رابطه ترتیبی جزئی موجود باشد. سپس ماتروئیدها و ابرگرافها را مورد مطالعه قرار می دهیم. هدف ما یافتن رابطه بین (P-گراف) با ماتروئیدها و ابرگراف می باشد.

(P-مسیر) در یک گراف

تعریف: (P-مسیر) در یک گراف یک $p+1$ گانه به صورت $G = (X, U_1, U_2, \dots, U_i, \dots, U_p)$

می باشد. که در آن X مجموعه راسها و p مجموعه دیگر یعنی U_1, U_2, \dots, U_p به صورت:

$$x, y \in X \quad \{x, y\} \in U_i$$

تعریف می شوند که به ترتیب روابط دوتایی $R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_p$ بین راسهای آنها برقرار می باشد. عضوهای

U_i را یالهای (P-مسیر) و U_i را یک مسیر مربوط به (P-مسیر) گراف غیرجهت دار می نامند.

هرگاه عضوهای U_i به صورت $x, y \in X \quad (x, y) \in U_i$ تعریف شوند آنرا (P-مسیر) گراف جهت دار

نامند. عضوهای U_i را کمان و U_i را یک راه مربوط به (P-مسیر) گراف جهت دار گویند.

(P-گراف)

(P-گراف) یک (P-مسیر) است هرگاه عدد p تعداد ماکزیمم یالهای بین دو راس باشد. (P-گراف) را یک چند گراف نیز گویند.

مثال ۱: مجموعه $X = \{10,12,15,30,60\}$ و روابط دو به دو عضوهای این مجموعه به صورت زیر تعریف شده اند:

$$x \neq y \quad x, y \in X, \quad x R_1 y \Leftrightarrow \text{۳ قابل قسمت هستند.}$$

$$x \neq y \quad x, y \in X, \quad x R_2 y \Leftrightarrow \text{۵ قابل قسمت هستند.}$$

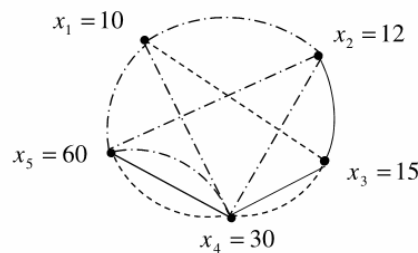
$$x \neq y \quad x, y \in X, \quad x R_3 y \Leftrightarrow \text{۲ قابل قسمت هستند.}$$

هرگاه X مجموعه راسها و U_1, U_2, U_3 را مجموعه های مسیر فرض کنیم، گراف آن یک (۳-گراف)

غیرجهت دار با مرتبه ۵ است و ماتریس وابسته به گراف مربوط به مسیرهای آن به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\begin{array}{l}
 c_1 = \{x_2, x_3, x_4, x_5\} \\
 c_2 = \{x_1, x_3, x_4, x_5\} \\
 c_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}
 \end{array}
 \quad \xrightarrow{\text{ماتریس مربوط به مسیرها}}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
 c_1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 c_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 c_3 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{matrix}
 \end{array}$$

c_1 ———
 c_2 - - - -
 c_3 - . - . -



$$\begin{array}{l}
 \text{ماتریس وابسته به} \\
 \text{گراف (۳-گراف)} \xrightarrow{\quad}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
 x_1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 x_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 x_3 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
 x_4 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
 x_5 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix} \Rightarrow \max(a_{ij}) = 3
 \end{array}$$

ماتروئیدها و گرافهای مربوط به آن

یک ماتروئید به صورت $M = (L, E)$ تعریف می شود که یک ساختمان جبری است و در آن L یک مجموعه متناهی و E زیرمجموعه ای از L با دو شرط زیر می باشد:

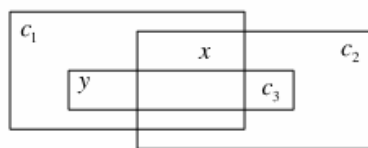
- هیچکدام از عضوهای E تهی نبوده و شامل زیرمجموعه دیگری نیز نباشد، یعنی:

$$c_i \neq \emptyset \quad \forall c_i \in E \quad \forall c_j \in E \quad c_i \not\subset c_j$$

- اگر $c_1 \in E$ و $c_2 \in E$ و $x \in L$ و $y \in L$ بطوریکه $x \in c_1 \cap c_2$ و $y \in c_1 - c_2$ بوده،

وانگهی وجود داشته باشد $c_3 \in E$ بطوریکه $y \in c_3$ باشد و $x \notin c_3$ و $c_3 \in c_1 \cup c_2$ باشد که در

شکل زیر نشان داده شده است.



L را مجموعه راسها، و زیرمجموعه های c_1, c_2, \dots, c_i را مجموعه یالهای ماتروئید می نامند (با فرض اینکه عضوهای c_i ها مجهز به رابطه ترتیبی جزئی باشد). ماتروئید به صورت یک (P-گراف) نمایش داده می شود.

مثال ۲: هرگاه $L = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ و E شامل تمام زیرمجموعه های چهارعضوی L باشند،

$M = (L, E)$ یک ماتروئید است. $E = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ که در آن

$$c_1 = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$c_3 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$$

$$c_2 = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$$

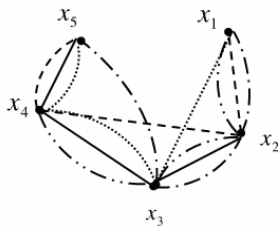
$$c_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$c_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

ماتریس مربوط به مسیرها و ماتریس وابسته آن به صورت زیر است:

ماتریس مربوط به مسیرها

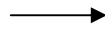
$$\begin{matrix} \downarrow \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ c_1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ c_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ c_3 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ c_4 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ c_5 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$



- c_1 ———
- c_2 (dotted)
- c_3 - - - - (long dashed)
- c_4 - - - - (short dashed)
- c_5 - . . . - (dash-dot)

که دارای ۵ مسیر بوده، اما یک (۳-گراف) است.

ماتریس وابسته



$$\begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \Rightarrow \max(a_{ij}) = 3$$

ابرگرافها

هدف از بیان نظریه ابرگرافها، تعمیم نظریه گراف است.

تعریف: اگر $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک مجموعه متناهی و $E = \{c_i : i \in I\}$ یک خانواده از زیرمجموعه های X باشند، $H = (X, E)$ را یک ابرگراف می نامند اگر شرایط زیر برقرار باشد.

$$\bigcup_{i \in I} c_i = X \quad c_i \neq \emptyset \quad (i \in I)$$

$|X| = n$ را مرتبه این ابرگراف و x_n, \dots, x_2, x_1 را راسها و c_m, \dots, c_2, c_1 را یالهای آن می نامند. در حالت

خاص فرض می کنیم که در مجموعه c_i ها رابطه ترتیبی وجود داشته باشد:

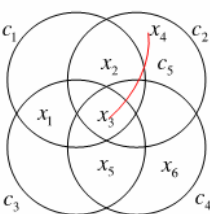
$|c_i| = 1$ را یک گره و $|c_i| = 2$ را یک یال بین دو راس و $|c_i| > 2$ را به وسیله منحنی بسته ای که تمام

راس های c_i را دربر دارد نشان میدهند. در این حالت c_i را یک راه ساده که به ترتیب رابطه ترتیبی به هم وصل

شده باشد می نامند، که نظیر یال در (P-گراف) ها است.

مثال: هرگاه $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ و $c_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ و $c_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$ و

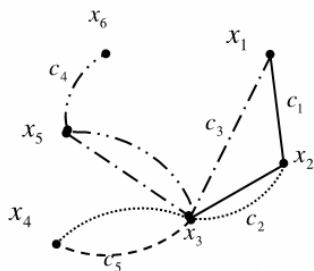
$c_3 = \{x_1, x_3, x_4\}$ و $c_4 = \{x_5, x_6\}$ و $c_5 = \{x_3, x_4\}$ باشد ابرگراف زیر را رسم کرده و به صورت



ابرگراف

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

ماتریس مربوط به مسیرها

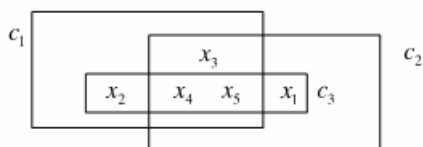


(۲-گراف)

ماتریس وابسته
به (۲-گراف)

$$\begin{matrix}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
 x_1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & & & & & \\
 x_2 & & & & & & \\
 x_3 & & & & & & \\
 x_4 & & & & & & \\
 x_5 & & & & & & \\
 x_6 & & & & & &
 \end{matrix} \Rightarrow \max(a_{ij}) = 2$$

ابرگراف فوق یک (۵-مسیر) با مرتبه ۶ می باشد که یک (۲-گراف) است.
مثال ۱ مربوط به (P-گراف) را می توان یک ماتروئید به صورت زیر نشان داد:



نتایج

ماتروئیدها و ابرگرافها را می توان به (P-گراف) تبدیل کرد و تمام قضایای مربوط به ماتروئیدها و ابرگرافها قابل تبدیل به (P-گراف) بوده و عکس آن با تغییر کوچکی صادق است.

منابع

۱- (Paris, 1989) Graphs and Hypergraphs; C. Berge

۲- معصومی، شاهرانی، حسین زاده، مدل های ریاضی- زیر چاپ

