Archive of SID

کاربرد B-Spline کسری در نرم افزارهای گرافیکی برداری

محمدعلی فریبرزی عراقی*[۱]، محمد نوروزی[۲] ، مریم غلامی[۳]
[۱و۲] گروه ریاضی- دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی
[۳] گروه کامپیوتر - دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران غرب

چکیده
گرافیک کامپیوتری طی سالهای گذشته، پیشرفت بسیاری داشته است. در این مقاله به بررسی نوع خاصی از گرافیک کامپیوتری که گرافیک برداری نام دارد می پردازیم و به پیش زمینه های ریاضی آن با استفاده از منحنیها و سطوح NURBS اشاره می کنیم که اغلب ناشناخته اند و کمتر به آن پرداخته شده است. سپس کاربرد فرمولهای ریاضی ارائه شده را در نرم افزارهای گرافیکی برداری بررسی می کنیم.

کلمات کلیدی: درونیابی B-Spline کسری، منحنیها و سطوح NURBS، طراحی به کمک کامپیوتر (گرافیک کامپیوتری).

مقدمه
گرافیک کامپیوتری عبارت است از تولید، کنترل و نمایش تصویر بر روی ابزارهای خروجی مانند مانیتور و یا پرینتر. تصاویر نمایش داده شده در کامپیوتر به طور کلی به دوگونه هستند: تصاویر Raster و تصاویر Vector. یک تصویر Raster در دنیای رایانه‌ای تصویری است که اجزای تشکیل دهنده آن یا در واقع جزء ساختاری آن پیکسل[۱] می‌باشد. پیکسل کوچکترین عنصر تشکیل دهنده تصویر در مانیتور یا پروژکتورهای نوری است. وقتی پیکسلها در کنار هم قرار می‌گیرند یک تصویر شکل می‌گیرد. تعداد و تنوع رنگ این پیکسلها تعیین کننده کیفیت تصویر می باشد. در این نوع از تصاویر با زوم کردن روی عکس میتوان پیکسلها را مشاهده نمود. این نوع عکسها برای تصاویر واقعی و عکاسان ایده آل هستند. اما نوع دوم تصاویر که موضوع مورد بحث ما در این مقاله هستند تصاویر Vector یا برداری هستند. در این نوع تصاویر برای تولید و نمایش اشکال (۲- بعدی یا ۳- بعدی) از معادلات ساده تا پیچیده ریاضی استفاده می شود. می‌دانیم که یک خط راست در دستگاه مختصات یک معادله دارد، همچنین برای دایره و مربع و نیز برای تصاویر پیچیده‌تر مثل یک لوگو، یک متن یا طرح بدن یک انسان، همه از معادلات ریاضی بهره می‌برند. البته کاربر یک نرم افزار گرافیکی برداری از این ماهیت ریاضی بی خبر است، اما آگاهی از این پیش زمینه برای توسعه و گسترش کاربرد این نرم افزارها ضروری است. به دلیل

1- Pixel

*عهده دار مکاتبات

www.SID.ir

Archive of SID

ماهیت ریاضی این نوع اشکال، فایلهای مربوط به آنها بسیار کم‌حجم هستند. (مگر اینکه با یک یا چند تصویر Raster ترکیب شده باشند) مثلا برای رسم یک دایره فقط کافی است مرکز و شعاع آن را بدانیم. همین خصوصیت باعث می‌شود که هرچه روی این تصاویر زوم شود یا در اندازه‌های بزرگ چاپ شوند کوچکترین خللی در کیفیت آنها ایجاد نشود. در حال حاضر اکثر نرم افزارهای برداری بر اساس همین تکنیک کار می کنند که می توان از Adobe Illustrator و 3Ds Max نام برد. تمامی نرم‌افزارهای واژه‌پردازی مانند Word نیز ذاتاً برداری هستند [1].

در ادامه به منظور معرفی جنبه های ریاضی یک نرم افزار گرافیکی برداری ابتدا در بخشهای ۲، ۳، ۴ و۵ به ترتیب به معرفی منحنیهای Bezier، منحنیها و سطوح B-Spline و منحنیها و سطوح NURBS می پردازیم. سپس در بخش ۶ کاربرد روابط ارائه شده در نرم افزارهای گرافیکی برداری را بررسی می کنیم و در نهایت در بخش ۷ مزایای تصاویر Vector را در مقایسه با تصاویر Raster ارائه می کنیم.

منحنیهای Bezier

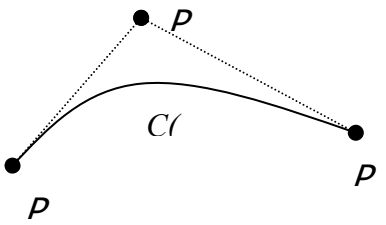
در دهه ۱۹۶۰ میلادی مهندسی فرانسوی که در شرکت رنو کار می‌کرد، پیشنهادی برای شکل جدیدی از معادله منحنیها و سطوح ارائه کرد که در طراحی بدنه اتومبیلها مورد استفاده قرار گرفت[2]. این فرد که پیر بزیر[۲] نام داشت منحنیها را بگونه‌ای معرفی کرد که بر خلاف تکنیکهای رایج درونیابی که از نقاط داده شده عبور می‌کردند، این منحنیها از نقاط داده شده عبور نمی‌کردند و نقاط تنها برای کنترل شکل منحنی استفاده می‌شدند (شکل ۱). در طراحی‌های مهندسی معمولا این روش بر درونیابی این نقاط ترجیح داده می‌شود و این بخاطر ایجاد انعطاف پذیری و ادراک حسی بیشتری است که در این حالت وجود دارد.

فرض کنیم $n+1$ نقطه در اختیار داریم که آنها را P_i، $0 \le i \le n$ ، نامیده و نقاط کنترل خوانده می شوند. منحنی بزیر این نقاط بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) P_i \qquad 0 \le u \le 1, \qquad (۱)$$

که در آن $B_{i,n}(u)$ چندجمله‌ای درجه n ام برنشتاین[۳] نامیده می‌شود و عبارت است از [3]:

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}.$$



شکل ۱: نمونه ای از یک منحنی بزیر با سه نقطه کنترل

[2]- Pierre Bezier (September 1910 – November 1999)
[3]- Sergei Natanovich Bernstein (March 1880 - October 1968)

www.SID.ir

Archive of SID

منحنیهای B-Spline

در منحنیهای بزیر درجه منحنی ایجاد شده همواره ثابت بوده و برابر یکی کمتر از تعداد نقاط می‌باشد، که در بعضی موارد ممکن است منحنیهای با درجات بسیار بالا ایجاد شود. همچنین تغییر یک نقطه باعث تغییر در کل منحنی می‌شود و طراح نمی‌تواند به طور دلخواه قسمتی از منحنی را تغییر دهد. برای حل این مشکلات منحنیهای B-Spline[4] ارائه شدند که از سری جدیدی توابع پایه‌ای استفاده می‌کنند [4]. این توابع پایه‌ای با n (تعداد نقاط) مرتبط نیستند و لذا درجه منحنی نیز مستقل از تعداد نقاط کنترل است. همچنین منحنیهای B-Spline اصطلاحاً "قطعه‌ای چندجمله‌ای" یا "قطعه‌ای کسری" هستند. لذا تغییر در یکی از نقاط، منحنی را فقط در محدوده خاصی تغییر می‌دهد و کل منحنی تغییر نمی‌کند [3]. روشهای مختلفی برای تعریف توابع پایه‌ای وجود دارد، همچون روش تفاضلات منقسم، توابع توانی و یا فرمولهای بازگشتی منسوب به دبور[5]. ما در اینجا از فرمولهای بازگشتی استفاده می‌کنیم، زیرا برای پیاده‌سازی در کامپیوتر آسانتر هستند. فرض کنید $U=\{u_0,\ldots,u_m\}$ دنباله‌ای از اعداد صعودی حقیقی باشد. u_i ها اصطلاحاً گره نامیده می‌شوند و U بردار گره نام دارد. iامین تابع پایه‌ای B-Spline از درجه p به این صورت تعریف می‌شود:

$$N_{i,p}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u)+\frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u), \qquad (۲)$$

که در آن:

$$N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & u_i\le u\le u_{i+1}\\ 0 & otherwise.\end{cases} \qquad (۳)$$

در این تعاریف همیشه فرض می‌کنیم $\frac{0}{0}=0$.

طرز انتخاب اعضای U، شکل توابع پایه‌ای و در نتیجه شکل منحنی B-Spline را تعیین می‌کند [5]. اگر در انتخاب اعضای بردار گره، فقط شرط صعودی بودن لحاظ گردد و اولین و آخرین گره $p+1$ بار تکرار شوند، به آن بردار گره Non-Uniform گویند:

$$U=\left\{\underbrace{a,a,\ldots,a}_{p+1},u_{p+1},u_{p+2},\ldots,u_{m-p-1},\underbrace{b,b,\ldots,b}_{p+1}\right\}.$$

در این حالت اگر تعداد نقاط گره‌ای $m+1$ باشد، $n+1$ تابع پایه‌ای خواهیم داشت که در آن $n=m-p-1$ [5].

در نهایت یک منحنی B-Spline درجه p -ام به این صورت تعریف می‌شود:

$$C(u)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(u)P_i \qquad a\le u\le b. \qquad (۴)$$

[4]- Basis Spline
[5]- Carl de Boor (Born 1937)

www.SID.ir

Archive of SID

سطوح B-Spline

سطوح B-Spline با در اختیار داشتن شبکه‌ای از نقاط کنترل در صفحه مختصات ساخته می‌شوند. در این سطوح به دو بردار گره‌ای و دو تابع پایه‌ای B-Spline نیازمندیم[3]. این سطوح به این صورت تعریف می‌شوند:

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)P_{i,j}, \qquad (۵)$$

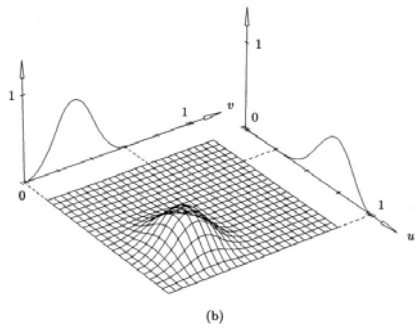
که در آن $P_{i,j}$ ها نقاط کنترل هستند. بردارهای گره‌ای عبارتند از:

$$U=\left\{\underbrace{0,0,\ldots,0}_{p+1},u_{p+1},\ldots,u_{r-p-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{p+1}\right\} \quad , \quad V=\left\{\underbrace{0,0,\ldots,0}_{q+1},v_{q+1},\ldots,v_{s-p-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{q+1}\right\}$$

بردار U دارای $r+1$ گره و بردار V دارای $s+1$ گره می‌باشد و روابط قبلی بین تعداد گره‌ها، تعداد نقاط و درجه p بصورت زیر تغییر می‌کند:

$$r=n+p+1 \quad , \quad s=m+p+1$$

که در آن $n+1$ و $m+1$ تعداد نقاط در دو جهت مختلف صفحه مختصات هستند (شکل ۲).



شکل ۲: نمونه ای از یک سطح B-Spline با دو بردار گره ای در امتداد u و v

منحنیها و سطوح B-Spline کسری غیر یکنواخت

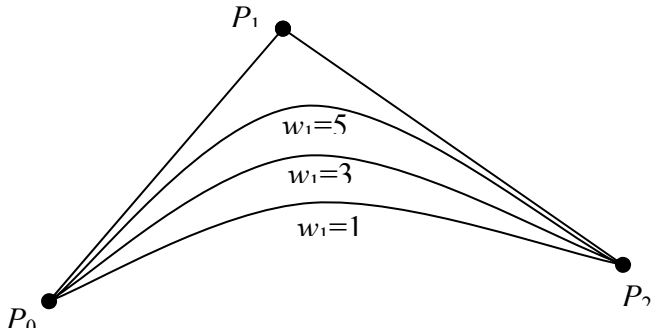
منحنیهای Non-Uniform Rational B-Spline که به اختصار NURBS نامیده می‌شوند، با اختصاص وزن به نقاط کنترل تولید می شوند. در حالت عادی وزن هر یک از نقاط عدد یک در نظر گرفته می شود. اما با اختصاص وزن w_i به نقاط کنترل P_i نوع جدیدی از منحنیها به وجود می آید:

$$C(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(u)w_iP_i}{\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(u)w_i}, \quad a\le u\le b. \qquad (۶)$$

توجه داریم که $w_i>0$ و با افزایش وزن یک نقطه، منحنی به سمت آن نقطه کشیده می شود (شکل ۳).

www.SID.ir

Archive of SID



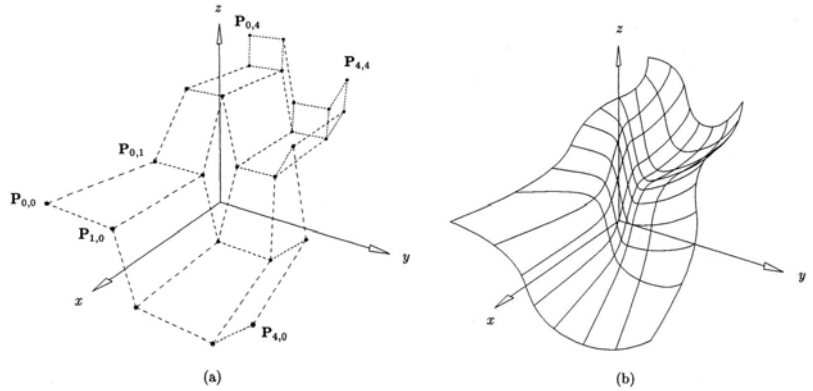
شکل ۳: با افزایش وزن نقاط، منحنی به سمت آن نقطه کشیده می شود

به طور مشابه سطوح NURBS تعریف می شوند. یک سطح NURBS در دو جهت u با درجه p و v با درجه q به صورت زیر تعریف می‌شود[5]:

$$S(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}},\quad 0\le u,v\le 1 \qquad (۷)$$

که در آن $P_{i,j}$ ها نقاط کنترل هستند و شبکه‌ای از نقاط را تشکیل می‌دهند. $w_{i,j}$ ها نیز وزن هر یک از این نقاط هستند. بردارهای گره‌ای نیز مشابه قبل تعریف می شوند.

این سطوح هم اینک به عنوان یک استاندارد برای توصیف سطوح در کامپیوترها مطرح هستند. امروزه استفاده رو به رشدی از این سطوح در مدلسازی اشیاء و موجودات در صنعت انیمیشن و فیلم سازی و حتی در نقاشی و مجسمه سازی وجود دارد (شکل ۴) [6].



شکل ٤: نمونه ای از تعدادی نقاط کنترل و سطح NURBS تولید شده

www.SID.ir

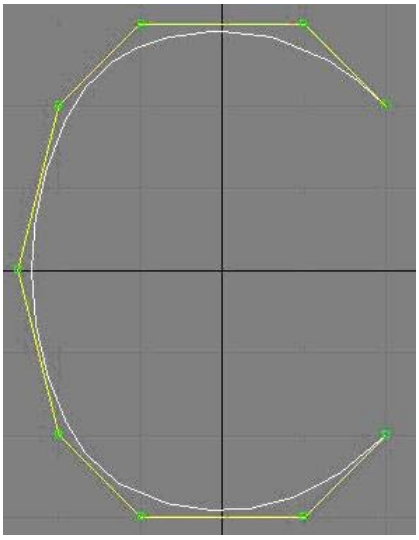
Archive of SID

کاربرد روابط ارائه شده در نرم افزارهای گرافیکی برداری

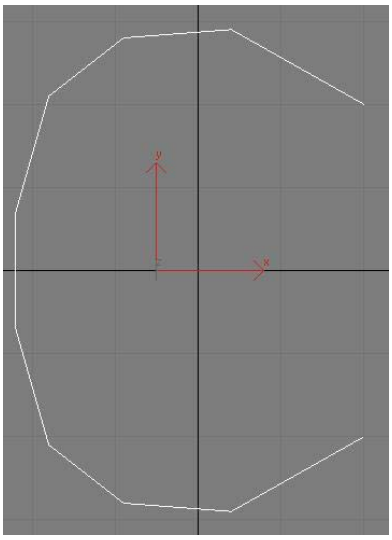
یکی از مهمترین کاربردهای منحنیها و سطوح NURBS استفاده از آنها در نرم افزارهای گرافیکی برداری همچون 3Ds Max است. محیط این نرم افزار دارای پنلی برای وارد کردن نقاط کنترل (دو یا سه بعدی) و وزنهای آنها می باشد و سپس می توان منحنی یا سطح NURBS مربوطه را مشاهده نمود. با انتخاب نقاط ورودی به صورت زیر:

(2,2),(1,3),(-1,3),(-2,2),(-2.5,0),(-2,-2),(-1,-3),(1,-3),(2,-2)

منحنی NURBS این نقاط در این نرم افزار به صورت شکل ۵ ترسیم میشود:



شکل ۵: منحنی NURBS ترسیم شده توسط 3Ds Max



شکل ٦: منحنی NURBS نقاط قبلی با استفاده از کدنویسی رابطه

برای بررسی استفاده از روابط ریاضی ارائه شده در این نرم افزار، با استفاده از کد نویسی رابطه (۶) به زبان C و استفاده از همان نقاط به عنوان پارامترهای ورودی و انتخاب درجه $p=3$ برای منحنی، نقاط خروجی را به صورت جدول زیر خواهیم داشت:

2.000000	2.000000
0.444444	2.950617
-0.956790	2.845679
-1.805556	2.111111
-2.299383	0.777778
-2.299383	-0.777778
-1.805556	-2.111111
-0.956791	-2.845679
0.444444	-2.950617
2.000000	-2.000000

جدول ۱: نقاط خروجی (دو بعدی) بر اساس کد نویسی رابطه (۶) و نقاط ورودی ترسیم کننده شکل ۵

www.SID.ir

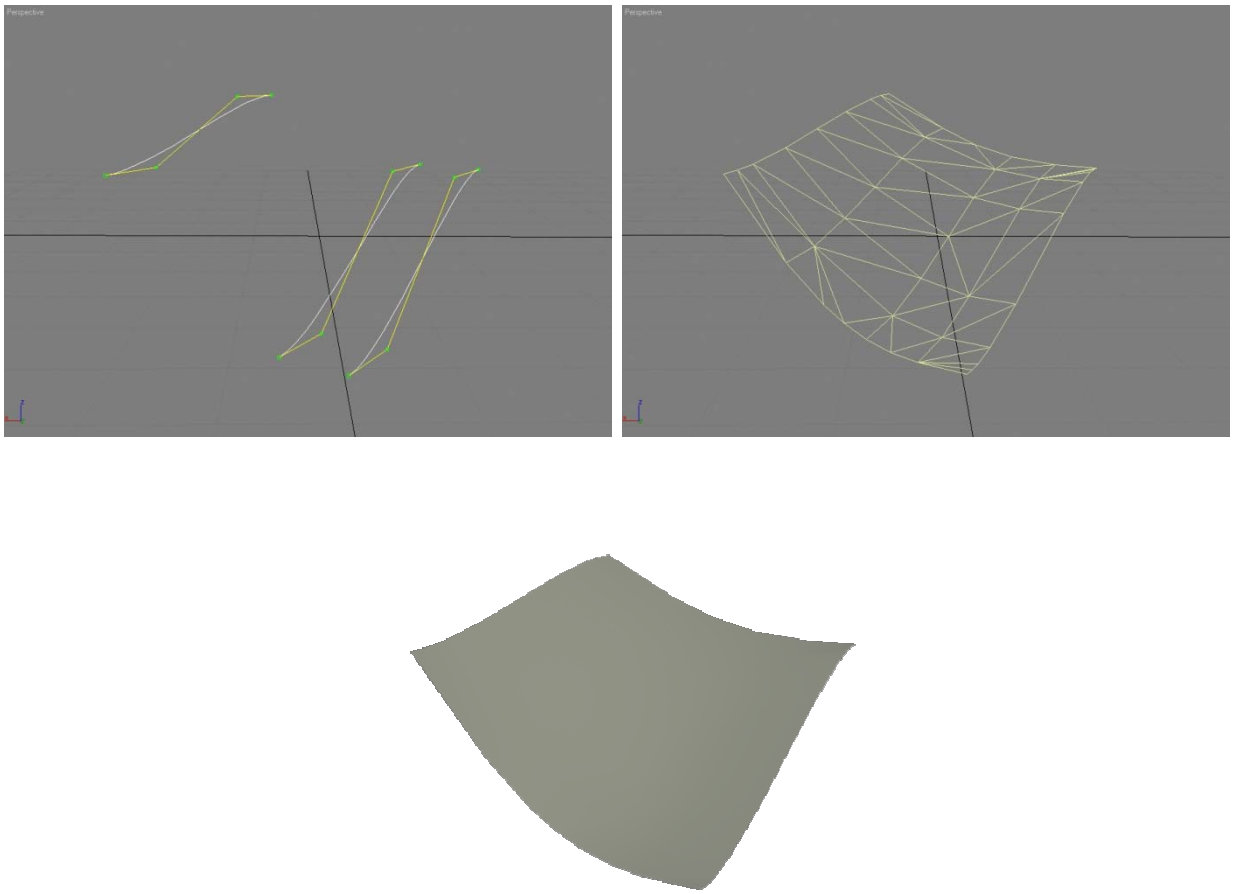
Archive of SID

با ترسیم این نقاط در 3Ds Max (یا هر نرم افزاری که توانایی ترسیم این نقاط را داشته باشد) شکل ۶ تولید میشود. انطباق دو شکل ۵ و ۶ قابل توجه است.

اینک به بررسی یک سطح NURBS می پردازیم. به خاطر محدودیتهای گرافیکی در نمایش اشکال سه-بعدی پیچیده، شکلی را انتخاب کردیم که نمایش دو- بعدی آن امکان پذیرتر باشد. برای این کار نقاط ورودی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

(2,-2,1), (1,-2,1), (-1,-2,2), (-2,-2,2), (2,1,-1), (1,1,-1), (-1,1,1), (-2,1,1), (2,2,-1), (1,2,-1), (-1,2,1), (-2,2,1)

یکی از روشها برای ترسیم سطح NURBS این نقاط در 3Ds Max این است که ابتدا منحنی NURBS مجموعه نقاطی که در یک امتداد هستند رسم شود و سپس با استفاده از ابزار U Loft سطح NURBS تولید کننده این نقاط تولید شود (شکل ۷).



شکل۷: مراحل ترسیم یک سطح NURBS با استفاده از ابزار U Loft

www.SID.ir

Archive of SID

سپس با کدنویسی رابطه (۷) و استفاده از همان نقاط ورودی نقاط جدول زیر به دست می آیند:

2.000000	-2.000000	1.000000
0.571429	-2.000000	1.836735
-1.591837	-1.969388	1.969388
-1.591837	-1.969388	1.969388
-0.520408	-0.897959	0.897959
1.469388	0.724490	-0.724490
1.173469	1.000000	-0.918367
0.000000	1.000000	0.000000
-1.173470	1.000000	0.918368
-1.469387	1.091837	0.816326
0.520411	1.632654	-0.265308
1.591836	1.989796	-0.979592
0.765305	2.000000	-0.673469
-0.571430	2.000000	0.489797
-2.000000	2.000000	1.000000

جدول ۲: نقاط خروجی (سه بعدی) بر اساس کد نویسی رابطه (۷) و نقاط ورودی ترسیم کننده شکل ۷

تطابق نقاط فوق با شکل ۷ قابل توجه است. نمونه‌ای از شبه کدهای استفاده شده عبارت است از:

```
CurvePoint(p,P,u,U,n,m,c)
{
/*input: p,P,u,U,n,m */
/*output:c*/
BasisFunctions(n,p,P,u,U,i);
c=0;
for(i=0,i<=p,i++);
c=c+ BasisFunctions*P[i];
}
```

مقایسه ای بین Vector و Raster

با توجه به موارد مطرح شده و منابع دیگر می توان در موارد زیادی بین تصاویر raster و vector مقایسه هایی انجام داد [7, 8, 9]. بعضی از تفاوتهای مهم تصاویر برداری در مقایسه با تصاویر raster در جدول ۳ آمده است.

www.SID.ir

Archive of SID

موضوع مقایسه	Raster	Vector
نحوه نمایش اشکال	بر اساس نقاط بیشماری که در کنار یکدیگر قرار گرفته اند.	مجموعه ای از خطوط و منحنیها که بر اساس فرمولها و روابط ریاضی تولید شده و در کنار هم قرار گرفته‌اند.
روال تولید	می توان با عکاسی یا اسکن کردن یک تصویر و یا نرم افزارهای مرتبط، آنها را ایجاد نمود.	باید توسط نرم افزارهای برداری تولید شوند.
بزرگنمایی	اغلب باعث افت کیفیت می گردد و لذا نمی‌توانند در ابعاد بزرگ چاپ شود.	با بزرگنمایی تاثیری در کیفیت آن ایجاد نمی گردد و می توان آن را در ابعاد بسیار بزرگ چاپ کرد.
قابلیت تبدیل به نوع دیگر	با نرم افزارهای خاص امکان پذیر است. این کار Vectorisation نام دارد.	در اکثر نرم افزارها به سادگی امکان پذیر است. این کار Rasterisation نام دارد.
حجم فایل تولیدی	برای تولید تصاویر با کیفیت خوب، حجم فایل بسیار زیاد خواهد بود.	حجم فایل معمولا کم است و ارتباطی با کیفیت تصویر ندارد.
رنگ	هر نقطه رنگ مختص به خود را دارد، لذا تغییر رنگها آسانتر است و نمایش بهتری از رنگها ارائه می شود.	هر خط یا منحنی رنگ مخصوص به خود را دارد. در واقع هر object می تواند یک رنگ داشته باشد، البته تعداد object ها محدودیتی ندارد.
ایجاد تغییرات	با انجام تغییر در نقاط مستقل از هم امکان پذیر است.	Object ها تغییر می کنند و لذا ممکن است ایجاد تغییرات کاملا مستقل در یک محدوده خاص امکان پذیر نباشد.
نرم افزارهای متداول	Photoshop, Paint, PhotoDraw	Illustrator, CorelDraw, Freehand
فرمتهای متداول	.bmp, .jpg, .gif	.wmf, .ai, .eps
کاربردها	تصاویر واقعی، عکاسی.	طراحی آرم و لوگو (که در اندازه های مختلف چاپ می شوند)، نرم افزارهای واژه پرداز، تصاویر ۳ بعدی.

جدول ۳: مقایسه بین تصاویر Raster و Vector

نتیجه گیری

با پیشرفت روز افزون گرافیک کامپیوتری بازیها و شبیه سازهای ۳- بعدی، بیش از قبل وارد زندگی بشر شده‌اند و علاوه بر جنبه های سرگرمی و آموزشی، در موارد بسیاری برای شبیه سازی محیطها یا فعالیتهایی استفاده می شوند که حضور انسان در آن غیر ممکن یا مخاطره آمیز است. در این مقاله به معرفی منحنیها و سطوح NURBS و کاربرد آنها در طراحی نرم افزارهای گرافیکی برداری پرداخته ایم. نوع Vector یا برداری بر اساس فرمولها و روابط ریاضی ساخته و تولید می شود که این موضوع برای اغلب کاربران نرم افزارهای برداری ناشناخته است و قطعا احاطه بر این روابط و فرمولها، می تواند در گسترش و توسعه این نرم افزارها کمک نماید. این روابط در اکثر نرم افزارهای برداری استفاده می شوند و این موضوع با کد نویسی این فرمولها و مقایسه خروجیهای 3Ds Max بررسی شده است. در پایان مزیتهای نوع برداری Vector را بر نوع دیگر گرافیک کامپیوتری یعنی Raster بیان کرده ایم. هر چند بیان این خصوصیتها به معنی برتری نوع برداری نیست و هر کدام از این دو نوع گرافیک، کاربردهای خاص خود را دارند.

www.SID.ir

Archive of SID

سپاسگزاری: نویسندگان این مقاله از حسن توجه معاونت محترم پژوهشی و حمایتهای مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی در به انجام رساندن این کار تحقیقاتی قدردانی می نمایند.

منابع

[1] Graphics Software Glossary, [Online] Available from: http://graphicssoft.about.com/od/glossary/l/blvector.htm [Viewed on Jan 2008].
[2] Spline (Mathematics), [Online] Available from: http://en.wikipedia.org/wiki/Spline [Viewed on Feb 2008].
[3] David F. Roger, An Introduction to NURBS with Historical Perspective, Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
[4] C. de Boor, A Practical Guide to Splines, Springer-Verlag, 1978.
[5] Les Piegl, Wayne Tiller, The NURBS Book, Springer-Verlag, 1995-1997.
[6] Margaret Becker, Pascal Golay, Rhino NURBS 3D Modeling, New Riders Pub, 1999.
[7] Charles M. Eastman, "Vector versus Raster: a Functional Comparison of Drawing Technologies," IEEE Computer Graphics and Applications, vol. 10, no. 5, pp. 68-80, Sept/Oct, 1990.
[8] Raster Images versus Vector Images, [Online] Available from: http://www.signindustry.com/computers/articles/2004-11-30-DASvector_v_raster.php3 [Viewed on Mar 2008].
[9] Raster vs. Vector, [Online] Available from: http://www.nw-media.com/ps_intro/html/lesson_1/lesson1_pg3.html [Viewed on Mar 2008].

www.SID.ir