Archive of SID

یک الگوریتم برای رنگ آمیزی یالی گرافهای ساده

حسین جعفری، عباس علیپور*
گروه ریاضی دانشکده علوم پایه دانشگاه مازندران، بابلسر
jafari@umz.ac.ir
a.mz.ac.iralipoor@u

چکیده

در این مقاله هدف ما معرفی الگوریتمی است که گراف ساده G را رنگ آمیزی یالی می کند. از مزیت های این الگوریتم، سادگی و همچنین رنگ آمیزی تمام گراف ها بدون هیچ گونه محدویتی می باشد. برخلاف الگوریتم های قبلی در رنگ آمیزی یالها ابتدا یک یال از هر راس را آمیزی می کند.

کلمات کلیدی: گراف ساده، رنگ آمیزی، رنگ آمیزی یالی.

مقدمه

فرض می کنیم گراف ساده $G=(V,E)$ دارای n راس و m یال می باشد، و ماکسیمم درجه رئوس آن را با Δ نشان می دهیم. یک رنگ آمیزی یالی G عبارت است از تخصیص رنگ هایی به یال های گراف G به قسمتی که هیچ دو یالی که مجاورند، همرنگ نباشد. مینیمم عددی (تعداد رنگ ها)که به این گراف برای رنگ آمیزی اختصاص می دهیم را عدد رنگی یالی می نامند وبا $x'(G)$ نمایش می دهیم. پر واضح است $x'(G) \geq \Delta$ وایزینگ [1] نشان داد که $x'(G) \geq \Delta+1$

۱ الگوریتم رنگ آمیزی یالی

قبل از بیان الگوریتم لازم است چند تعریف را بیان کنیم. ما در رنگ آمیزی یالی از جدول استفاده می کنیم که طریقه رسم و پر کردن خانه های خالی آن را قبل از بیان الگوریم بیان می کنیم.

۱-۱ طریقه رسم جدول

گراف $G=(V,E)$ را در نظر می گیریم ابتدا جدولی $n\times n$، رسم می کنیم $(|V|=n)$. اگر راس v_i و راس v_j با هم مجاور نبودند خانه های v_iv_j و v_jv_i را با .... پر می کنیم.

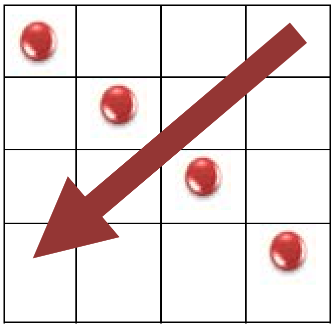
* عهده دار مکاتبات

www.SID.ir

Archive of SID

اولویت پر کردن خانه های خالی جدول با عناصری است که اندیس سطر آنها کمتر از بقیه عناصر است. و در مورد عناصری که در یک سطر قرار دارند اولویت با عناصری است که اندیس ستون کمتری دارند. اعداد $\{1,2,3,\ldots,X'(G)\}$ را به صورت زیر در جدول قرار می دهیم. که در این جا منظور از $X'(G)$، عدد رنگی است.

ابتدا خانه ای که در اولویت است را با عدد 1 پر می کنیم. اگر این عنصر $v_i v_j$ باشد تمام خانه هایی که جمع اندیس سطر وستون آنها برابر $(i+j)$ باشند را با 1 پر می کنیم.



شکل ۱

واضح است که این خانه ها همگی در اریب ماربر، خانه $v_i v_j$ قرار دارد. حال به دنبال خانه ای خالی می گردیم که در اولویت است. این خانه را با عدد 2 پر می کنیم. سپس مانند بالا تمام خانه هایی که بر روی اوریب مورد نظر قرار دارد 2 پر کنیم.

این روند را تا $X'(G)$ ادامه می دهیم. دو باره از عدد 1 شروع می کنیم وخانه های خالی را پر می کنیم. وروند بالا را تا موقعی که خانه ها همگی پر شده باشند ادامه می دهیم.

۲ الگوریتم

گام اول:

ابتدا جدول $n \times n$ برای رسم می کنیم $(|V|=n)$ و خانه های جدول را به طریق گفته شده با خط تیره$(—)$پر می کنیم سپس اعداد $\{1,2,3,\ldots,X'(G)\}$ را بر اساس مطالب قبل در جدول قرار می دهیم.

گام دوم:

تمام سطر ها را از سطر v_1 تا v_n بررسی می کنیم. عناصری که در سطر بیش از یک بار ظاهر شده اند را مشخص کرده واین عناصر را، عناصر مازاد می نامیم. اگر در هیچ یک از سطر ها، عنصر مازاد وجود نداشت گراف ما رنگ آمیزی یالی سره شده است پس توقف می کنیم در غیر این صورت به گام سوم می رویم.

گام سوم:

www.SID.ir

Archive of SID

عملیات زیر را برای تمام ستون ها انجام می دهیم (به ترتیب اندیس) اگر بیش از یک عنصر مازاد سطری در ستون وجود داشت از عناصر بالایی در ستون شروع می کنیم. اگر در ستون j ام عدد موجود در $v_i v_j$ مازاد باشد مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم

I) اگر در سطر i ام، عددی از مجموعه $\{1,2,3,...,X'(G)\}$ موجود نباشد وستون j ام نیز این عدد موجود نباشد می توانیم $v_i v_j$ را به این عدد تغییر دهیم لازم به تذکر است $v_i v_j$ نیز باید تغییر کند.

II) اگر در ستون j عدد موجود در $v_i v_j$ مازاد باشند وعددی که در سطر i ام وجود ندارند در ستون j ام موجود باشند دیگر نمی توان از I استفاده کرد. در این صورت اعداد موجود در ستون j ام را مورد بررسی قرار می دهیم تا در صورتی که باعث به وجود آمدن عنصر مازاد دز دو سطر نشود $v_i v_j$ را با عناصر دیگر همان ستون عوض می کنیم. در این بررسی اولویت با عناصر مازاد در ستون است باز هم لازم به تذکر است که اگر $v_i v_j$ تغییر یافت باید $v_j v_i$ نیز تغییر کند.

III) در صورتی که هیچ یک از حالات بالا امکان پذیر نباشد به صورت زیر عمل می کنیم لازم به تذکر است که این حالت مخصوص ستون هایی است که بیش از ۲ عنصر مازاد در ستون داشته باشند. برای هر ستون یک جدول به صورت زیر رسم می کنیم. این جدول شامل دو ستون کمبود و مازاد می باشد.

بر تمام عناصر موجود در ستون j که مازاد هستند یک سطر در نظر می گیریم مثلا اگر $v_i v_j$ مازاد باشد در سطر i ام(جلوی سطر i در جدول) ودر سون عنصر کمبود آن دسته از اعداد را که در سطر i وجود ندارند(این اعداد اعداد موجود در $\{1,2,3,...,X'(G)\}$) را قرار می دهیم. ودر ستون مازاد عدد مازاد ($v_i v_j$)را قرار می دهیم.

حال اگر x در سطر i ام در ستون کمبود باشد وهمچنین x در سطر k ام در ستون مازاد باشد با یک فلش عنصر کمبود سطر i را به عنصر مازاد سطر k وصل می کنیم.

این کار را طوری انجام می دهیم که تعداد سطر های که تواما هم عنصر مازاد و هم عنصر کمبود شان دارای فلش است ماکسیمم شود (تناظر یک به یک برقرار شود). سپس عناصری که دارای فلش هستند رابا توجه به عنصر کمبود نظیر تغییرمی دهیم.

به عنوان مثال اگر $G = K_6$ باشد گراف G را بر اساس الگوریتم گفته شده رنگ آمیزی می کنیم.

چون K_6، ۶راس دارد جدولی 6×6 رسم می کنیم وآن را پر می کنیم می دانیم که $x(K_6) = 5$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	----	1	2	3	4	5
v_2	**1**	----	3	4	5	**1**
v_3	**2**	3	----	5	1	**2**
v_4	**3**	4	5	----	2	**3**
v_5	**4**	5	1	2	----	**4**
v_6	**5**	1	2	3	4	----

جدول ۱

www.SID.ir

Archive of SID

گام دوم می بینیم که در سطر های v_5, v_4, v_3, v_2 عنصر مازادوجود دارد لذا به گام سوم می رویم. چون ***I,II*** قابل اجرا نیست به ***III*** می رویم.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	----	2	4	1	3	5
v_2	**2**	----	3	4	5	**1**
v_3	**4**	3	----	5	1	**2**
v_4	**1**	4	5	----	2	**3**
v_5	**3**	5	1	2	----	**4**
v_6	**5**	1	2	3	4	----

جدول ۲

تذکر: اگر نمی دانستیم $x'(G) = \Delta$ یا $x'(G) \geq \Delta + 1$ ابتدا با Δ رنگ، رنگ آمیزی می کنیم در صورت رنگ آمیزی نشدن G با Δ رنگ، مشخص می شود $X'(G) = \Delta + 1$.

۳ نتیجه گیری

حال برای نشان دادن توانایی های این الگوریتم به مقایسه این الگوریتم با دو الگوریتم دیگر می پردازیم.

الگوریتم ۱:

درصفحه ۳۵۴مرجع [2] می بینیم که الگوریتم مذکور توانایی رنگ آمیزی گراف K_5 را ندارد.
ولی الگوریتم ارائه شده در این مقاله این گراف را رنگ آمیزی می کند.

الگوریتم ۲:

در صفحه ۳۱۳ مرجع [3] می بینیم که این الگوریتم توانایی رنگ آمیزی الگوریتمی با ۶ راس را ندارد. ولی الگوریتم مذکور در این مقاله گراف مورد نظر را رنگ آمیزی می کند.

منابع

[1] V.G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of a p-graph, Diskret. Anal.3 (1964) 25-30(in Russian)
[2] J. Yellen, T. Gross, Graph theory and it`s applications, CRC Press, New York, 1999.
[3] R.J. Wilson, J.M. Aldous, Graph and applications, John Wiley & Sons, 1994.

www.SID.ir