

الگوریتمی عددی برای حل یک مساله معکوس با استفاده از روش تفاضلات متناهی

عبدالله شیدفر، افشین بابایی*

تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده ریاضی

shidfar@iust.ac.ir

afshin_babaei@mathdep.iust.ac.ir

چکیده

در این مقاله یک مساله هدایت گرمایی معکوس بررسی می‌شود. در این مساله علاوه بر تابع مجهول در معادله گرما، یکی از شرایط کرانه‌ای مساله نیز مجهول است. برای حل این مساله معکوس از یک شرط اضافی در یک نقطه داخلی ناحیه مفروض مساله استفاده می‌شود. با استفاده از روش تفاضلات متناهی یک الگوریتم عددی برای حل مساله ارایه و سپس پایداری و سازگاری این روش عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش انتهایی مقاله چند مثال مطرح و با استفاده از این الگوریتم، حل عددی آنها ارایه می‌شود.

کلمات کلیدی: مسایل سهموی مستقیم و معکوس، روش تفاضلات متناهی ضمنی، روش کرانک-نیکلسون، پایداری، سازگاری.

۱ مقدمه

در مسایل مربوط به معادلات با مشتقات جزئی معمولاً با مساله‌ای مواجه هستیم که در آن شرایط مساله اعم از شرایط اولیه و شرایط کرانه‌ای، مشخص هستند و در معادله اصلی نیز به جز تابع اصلی معادله، مشخصه مجهول دیگری در معادله وجود ندارد. در واقع در مساله فقط یک عامل مجهول وجود دارد. این گونه مسایل، مسایل مستقیم نامیده می‌شوند.

در مقابل دسته دیگری از مسایل وجود دارند که در آنها علاوه بر عامل اصلی مجهول در معادله، مشخصه های مجهول دیگری نیز در معادله و یا در شرایط آن وجود دارند. این گونه مسایل را مسایل معکوس می‌نامند. در واقع در این مسایل یکی از مشخصه های تعریف کننده خود مساله، مجهول است.

یک دسته مهم از این مسایل، مساله هدایت گرمایی معکوس است که از نوع مسایل سهموی معکوس می‌باشد. این مساله کاربردهای زیادی در شاخه‌های مختلف مهندسی و علوم مانند مهندسی مکانیک، مهندسی

شیمی و فیزیک دارد. مساله سهموی معکوس به وسیله متخصصین و محققین زیادی مورد بررسی قرار گرفته و شیوه‌های مختلفی برای حل این مسایل ارایه شده است. ۵، ۶ و ۷ و ۸ برای حل مساله معکوس، به تعداد مشخصه های مجهول در مساله، شرط اضافی در نظر گرفته می‌شود.

در این مقاله یک مساله سهموی معکوس مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا مدل ریاضی مساله ارایه و سپس با استفاده از روش تفاضلات متناهی الگوریتمی عددی برای حل آن مطرح می‌شود. پایداری و سازگاری الگوریتم بررسی شده و در نهایت با ارایه چند مثال کارآیی الگوریتم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲ مدل ریاضی مساله

مساله سهموی معکوس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u(1, t) = h(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

که در آن $f(x)$ و $g(t)$ توابعی مفروض و شناخته شده هستند، تابع $h(t)$ و همچنین تابع $u(x, t)$ مجهولات مساله هستند. برای تعیین مقدار $u(1, t) = h(t)$ ، شرط اضافی

$$u(\bar{x}, t) = s(t) \quad (5)$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن $x = \bar{x}$ یک نقطه داخلی از ناحیه مفروض مساله و $s(t)$ تابعی معلوم است. مساله (۱) تا (۴) را در دو بازه $0 < x < \bar{x} < 1$ و $0 < \bar{x} < x < 1$ برای مقادیر $t > 0$ در نظر می‌گیریم. با این کار مساله مفروض به دو مساله به صورت زیر تبدیل می‌شود.

مساله اول که در ناحیه $\{(x, t) : 0 < x < \bar{x}, t > 0\}$ تعریف می‌شود، به شکل زیر است:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < \bar{x} < 1, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \bar{x}, \quad (7)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

$$u(\bar{x}, t) = s(t), \quad t > 0, \quad (9)$$

این مساله، یک مساله مستقیم است. جواب تحلیلی این مساله در [۱] ارایه شده است. برای حل عددی این مساله می‌توان از روش تفاضلات متناهی کرانک-نیکلسون^۲ استفاده کرد.

مساله دوم که در ناحیه $\{(x, t) : \bar{x} < x < 1, t > 0\}$ تعریف می‌شود، مساله معکوس زیر است:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < \bar{x} < x < 1, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \bar{x} < x < 1, \quad (11)$$

$$u(\bar{x}, t) = s(t), \quad t > 0, \quad (12)$$

$$u(1,t) = h(t), \quad t > 0, \quad (13)$$

در این مساله $h(t)$ و $u(x,t)$ توابع مجهول هستند. با حل این مساله مقادیر تابع در کران $x=1$ تعیین می شود.

۳ حل عددی مساله برای تعیین مقادیر تابع در کران $x=1$

در این بخش هدف تعیین مقادیر تابع $u(x,t)$ و همچنین تابع $u_x(x,t)$ در کران $x=1$ است. برای رسیدن به این هدف مساله (۱۰) تا (۱۳) در ناحیه $Q_1 = \{(x,t) : \bar{x} < x < 1, 0 < t < T\}$ که $T > 0$ یک مقدار ثابت است، به صورت عددی حل می شود.

ابتدا فرض کنید که در راستای مکان، بازه $[\bar{x}, 1]$ به P زیربازه متساوی الفاصله به طول h و در راستای زمان، بازه $[0, T]$ به M زیر بازه متساوی الفاصله به طول k تقسیم شده باشند. همچنین فرض کنید که این افرازاها بوسیله مجموعه نقاط، $\{\bar{x} = x_0 < x_1 < \dots < x_P = 1\}$ و $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T\}$ به ترتیب در راستای مکان و زمان نشان داده شوند. با توجه به این نمادگذاری‌ها داریم:

$$\begin{aligned} x_i &= ih, \quad i = 0, \dots, P \\ t_j &= jk, \quad j = 0, \dots, M \end{aligned} \quad (14)$$

فرض کنید که $u(x_i, t_j)$ بوسیله u_{ij} نشان داده شود. با توجه به این فرض‌ها، برای حل عددی مساله (۱۰) تا (۱۳) از فرمول تفاضل متناهی ضمنی زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{ij+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \right\} \quad (15)$$

که در آن با توجه به فرض‌های (۵-۱۱) و (۵-۱۲) داریم:

$$u_{i0} = f(x_i), \quad i = 0, \dots, P-1$$

$$u_{0j} = s(t_j) \quad j = 0, \dots, M$$

و همچنین $u_{-1j} = u(\bar{x} - h, t_j)$ با حل عددی مساله (۶) تا (۹) به دست می آید. برای حل عددی مساله (۶) تا (۹) در ناحیه $\{(x,t) : 0 < x < \bar{x}, 0 < t < T\}$ ، همان گونه که قبلاً ذکر شد از روش تفاضل متناهی کرانک-نیکلسون استفاده می شود.

فرض کنید $r = \frac{k}{h^2}$ ، در نتیجه معادله (۱۵) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$-ru_{i+1,j+1} + (2+2r)u_{ij+1} - ru_{i-1,j+1} = ru_{i+1,j} + (2-2r)u_{ij} + ru_{i-1,j} \quad (16)$$

معادله (۱۶) به ازای $i = 0, 1, 2, \dots, P-1$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$AU_{j+1} + c = BU_j + d \quad (17)$$

که در آن

$$U_{j+1}^t = (u_{1,j+1}, u_{2,j+1}, \dots, u_{P,j+1})$$

$$U_j^t = (u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{p,j})$$

همچنین

$$A = \begin{pmatrix} -r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2+2r & -r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -r & 2+2r & -r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 2+2r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2+2r & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -r & 2+2r & -r \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -ru_{-1,j+1} + (2+2r)u_{0,j+1} \\ -ru_{0,j+1} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9

$$B = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2-2r & r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ r & 2-2r & r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 2-2r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-2r & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & 2-2r & r \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} ru_{-1,j} + (2-2r)u_{0,j} \\ ru_{0,j} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

تفاوت این روش با روش کرانک- نیکلسون در اینجاست که در روش کرانک- نیکلسون ماتریس ها سه قطری هستند، در حالی که در روش بالا چون فرمول تفاضل متناهی (۱۶) به ازای $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ در نظر گرفته شده است، ماتریس های A و B پایین مثلثی هستند.

با حل دستگاه معادلات خطی (۱۷)، مقدار مجهول در نقاط مش در کران $x = 1$ معلوم می شود. حال همگرایی این روش عددی را بررسی می کنیم.

قضیه ۱

روش تفاضل متناهی (۱۶) بازای تمامی مقادیر Γ پایدار است.

برهان

اگر در معادله (۱۷)، $i = 0, 1, 2, \dots, p-1$ قرار گیرد، خواهیم داشت:

$$U_{j+1} = EU_j + e \tag{18}$$

$$E = A^{-1}B \tag{19}$$

عامل گسترش خطا در رابطه (۱۸) ماتریس E است. روش تفاضل متناهی (۱۶) پایدار است اگر مقادیر ویژه ماتریس E از نظر قدرمطلق از ۱ بیشتر نباشد.^۲

تنها مقدار ویژه ماتریس E ، -1 است. بنابراین بزرگترین مقدار در بین قدرمطلق مقادیر ویژه این ماتریس، برابر ۱ خواهد بود. از این رو روش (۱۶) بازای تمامی مقادیر Γ پایدار است. □

قضیه ۲

روش تفاضل متناهی (۱۶) برای $i = 0, 1, 2, \dots, P-1$ سازگار است.

برهان

ثابت می‌کنیم که اگر U جواب دقیق مساله (۱۰) تا (۱۳) و u جواب دقیق (۱۶) باشد، آنگاه خطای گسسته‌سازی $e_{ij} = U_{ij} - u_{ij}$ وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، به سمت صفر میل خواهد کرد. قرار می‌دهیم $e = U - u$ ، با جایگذاری $u_{ij} = U_{ij} - e_{ij}$ در معادله (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} re_{i+1j+1} - (2+2r)e_{ij+1} + re_{i-1j+1} - rU_{i+1j+1} + (2+2r)U_{ij+1} - rU_{i-1j+1} = \\ -re_{i+1j} - (2-2r)e_{ij} - re_{i-1j} + rU_{i+1j} + (2-2r)U_{ij} + rU_{i-1j} \end{aligned} \quad (19)$$

با استفاده از قضیه تیلور داریم:

$$U_{i-1j+1} = U_{ij+1} - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{ij+1} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (x_i - \theta_1 h, t_{j+1}),$$

$$U_{i+1j+1} = U_{ij+1} + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{ij+1} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (x_i + \theta_2 h, t_{j+1}),$$

و

$$U_{i-1j} = U_{ij} - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{ij} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (x_i - \theta_3 h, t_j),$$

$$U_{i+1j} = U_{ij} + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{ij} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (x_i + \theta_4 h, t_j),$$

همچنین داریم

$$U_{ij+1} = U(x_i, t_j + k) = U_{ij} + k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) (x_i, t_j + \theta_5 k),$$

که $0 < \theta_i < 1$ برای $i = 1, 2, \dots, 5$. جایگذاری نتایج بالا در معادله (۱۹) نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} re_{i+1j+1} - (2+2r)e_{ij+1} + re_{i-1j+1} + re_{i+1j} - 2re_{ij} + re_{i-1j} \\ + 2k \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) (x_i, t_j + \theta_5 k) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (x_i + \theta_6 h, t_j + \theta_7 k) \right] = -2e_{ij} \end{aligned} \quad (20)$$

که $0 < \theta_7 < 1$ و $-1 < \theta_6 < 1$ است.

حال فرض کنید که ماکزیمم مقادیر $|e_{ij}|$ در سطح زمانی $t = jk$ برابر E_j باشد. همچنین فرض کنید که M ماکزیمم مقدار عبارت داخل براکت در معادله (۲۰)، برای تمامی مقادیر i و j باشد. آنگاه از معادله (۲۰) نتیجه می‌گیریم که:

$$(2+2r)|e_{ij+1}| - r|e_{i+1j+1}| - r|e_{i-1j+1}| + 2r|e_{ij}| - r|e_{i+1j}| - r|e_{i-1j}| \leq 2|e_{ij}| + 2kM$$

چون این رابطه بازای تمامی مقادیر i برقرار است، بنابراین بازای $\max |e_{ij}|$ نیز درست خواهد بود. از این رو نتیجه می گیریم:

$$2E_{j+1} \leq 2E_j + 2kM$$

بنابراین

$$E_{j+1} \leq E_0 + jkM \quad (21)$$

مقادیر اولیه u و U یکسان است، از این رو $E_0 = 0$. اگر h به سمت صفر میل کند، آنگاه k نیز به سمت

صفر میل می کند و M نیز به سمت $\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{ij}$ میل می کند. چون طبق فرض U یک جواب معادله (۱۰)

است، بنابراین از معادله (۲۱) نتیجه می شود که E_j صفر است. این نتیجه حکم قضیه را ثابت می کند. □

قضیه ۳

روش تفاضل متناهی (۱۶) بازای $i = 0, 1, 2, \dots, P-1$ برای تعیین مقادیر گره‌ای در کران $x=1$ ، بازای تمامی مقادیر Γ همگرا است.

برهان

این قضیه نتیجه قضایای قبلی می باشد.

با استفاده از قضیه تیلور برای توابع دو متغیره و اعمال آن بر تابع $u(x, t)$ در نقطه مفروض $(1, t_j)$ فرمول

تقریبی زیر به دست می آید:

$$u_x(1, t_j) = \frac{1}{h}(u_{P_j} - u_{(P-1)_j}) + \frac{h}{2k}(u_{P_{j+1}} - u_{P_j}) - \frac{h}{6k}(u_{P_{j+1}} - u_{(P-1)_{j+1}} - u_{P_j} + u_{(P-1)_j}) + O(h^4) \quad (22)$$

از این فرمول تقریبی برای تعیین مقادیر $u_x(x, t)$ در کران $x=1$ ، استفاده می کنیم.

۴ حل چند مثال

مثال ۴-۱

در این مثال مساله زیر بررسی می شود:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, t) = 2t, \quad t > 0,$$

$$u(\bar{x}, t) = 2t + \bar{x}^2, \quad t > 0,$$

برای تعیین مقادیر $u(x, t)$ در کران $x = 1$ از فرمول تفاضل متناهی (۱۶) و برای تعیین مقادیر $u_x(x, t)$ از رابطه تقریبی (۲۲) استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن نتایج عددی حاصل از الگوریتم، از نرم افزار ریاضی *mathematica* استفاده شده است. نتایج برای این مثال در جدول (۱) آورده شده است.

مثال ۴-۲

در این مثال مساله زیر را بررسی می‌کنیم

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \cos(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, t) = \exp(-t), \quad t > 0,$$

$$u(\bar{x}, t) = \exp(-t) \cos(\bar{x}), \quad t > 0,$$

مشابه مثال قبل، از روش تفاضل متناهی (۱۶) و فرمول تقریبی (۲۲) برای تعیین مقادیر $u(x, t)$ و $u_x(x, t)$ استفاده می‌کنیم. نتایج حاصل در جدول (۲) ارائه شده است.

	جواب عددی		جواب دقیق	
	$u(1, t)$	$u_x(1, t)$	$u(1, t)$	$u_x(1, t)$
$t = 1$	۳	۲	۳	۲
$t = ۲$	۵	۲	۵	۲
$t = ۴$	۹	۲	۹	۲
$t = ۶$	۱۳	۲	۱۳	۲
$t = ۸$	۱۷	۲	۱۷	۲
$t = ۱۰$	۲۱	۲	۲۱	۲

جدول ۱: مقادیر $u(1, t)$ و $u_x(1, t)$ به کمک روش ارایه شده با فرض $k = 0.5$ و $r = 0.4$ و $\bar{x} = 0.5$

	جواب عددی		جواب دقیق	
	$u(1, t)$	$u_x(1, t)$	$u(1, t)$	$u_x(1, t)$
$t = 0.5$	۰.۳۲۷۷۰۹	-۰.۵۰۹۵۳۵	۰.۳۲۷۷۱	-۰.۵۱۰۳۷۸
$t = 1$	۰.۱۹۸۷۶۸	-۰.۳۰۹۰۳۲	۰.۱۹۸۷۶۶	-۰.۳۰۹۵۶
$t = 1.5$	۰.۱۲۰۵۵۲	-۰.۱۸۷۴۸۲	۰.۱۲۰۵۵۸	-۰.۱۸۷۷۵۸
$t = ۲$	۰.۰۷۳۱۳۲۱	-۰.۱۱۳۶۱۹	۰.۰۷۳۱۲۲	-۰.۱۱۳۸۸۱
$t = ۲.5$	۰.۰۴۴۳۳۳۱	-۰.۰۶۹۰۸۸	۰.۰۴۴۳۵۰۷	-۰.۰۶۹۰۷۲۱

جدول ۲: مقادیر $u(1, t)$ و $u_x(1, t)$ با استفاده از روش ارایه شده با فرض $k = 0.1$ و $r = 1.0$ و $\bar{x} = 0.5$

۵ نتیجه گیری

در این مقاله یک مساله سهموی معکوس مورد بررسی قرار گرفت. در این مساله معکوس یکی از شرایط کرانه‌ای معادله سهموی مورد نظر مجهول بود که برای تعیین آن یک شرط اضافی مناسب در نظر گرفته شد. برای حل عددی مساله یک الگوریتم عددی براساس روش تفاضلات متناهی مطرح شد. مقایسه نتایج عددی ارائه شده با جواب دقیق نشان‌دهنده دقت مطلوب این روش عددی است. به خوانندگان علاقه‌مند، بررسی این مساله برای معادلات با مشتقات جزئی در بعد دو و ابعاد بالاتر و همچنین حل مساله برای معادلات غیرهمگن متناظر، پیشنهاد می‌شود.

منابع

- [1] Cannon, J.R., "The One-Dimensional Heat Equation", Addison Wesley, Reading, MA, (1984).
- [2] Smith, G.D., "Numerical Solution of Partial Differential Equations", Clarendon Press, Oxford, (1978).
- [3] Beck, J.V., Blackwell, B., St-Clair, C.R., "Inverse Heat Conduction Ill-Posed Problems", John Wiley Int Sc, (1985).
- [4] Burden, R.L., Faires, J.D., "Numerical Analysis" Sixth Edition, Brooks/ Cole Publishing Company, (1997).
- [5] Cannon J.R., Duchateau P., "An inverse problem for a nonlinear diffusion equation", SIAM J. Appl. Math. 39 (2), pp. 272–289 (1980).
- [6] Shidfar, A., Azary, H., "An Inverse Problem for A Nonlinear Diffusion Equation", Nonlinear Analysis, Theory Meth. Appl. 28 (4), pp. 589–593 (1997).
- [7] Shidfar, A., Pourgholi, R., "Application Of Finite Difference Method To Analysis An Ill-Posed Problem", Applied Mathematics and Computation 168, pp. 1400–1408 (2005).
- [8] Shidfar, A., Damirchi, J., Reihani, P., "An Stable Numerical Algorithm For Identifying The Solution Of An Inverse Problem", Applied Mathematics And Computation 190, pp. 231–236 (2007).
- [9] شیدفر، ع، "ریاضیات عالی مهندسی"، انتشارات دالفک، تهران (۱۳۸۳).