معادلات انتگرال ولترای نوع اول با هسته‌های منفرد

طاهر لطفی*، کتایون مهدیان
دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان
دانشکده علوم پایه ـ گروه ریاضی
lotfitaher @ yahoo.com, lotfi @ iauh. ac.ir

چکیده

در این مقاله حل معادلات انتگرال ولترای نوع اول خاصی با هسته‌های منفرد مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین هسته‌های آبلی را در نظر خواهیم گرفت. کارایی و سادگی روش پیشنهادی را با ارایه چند مثال نشان خواهیم داد.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال، ولترای نوع اول، هسته‌های منفرد.

۱ مقدمه

معادلات ولترای نوع اول یکی از متداول ترین معادلات در مدل بندی مسایل فیزیک و مهندسی می‌باشد. به خاطر ذات بد آنها یا بهتر بگوییم بدوضعی آنها هنوز به عنوان یکی از مهمترین زمینه‌های تحقیقات به حیات خود ادامه داده و محققین زیادی را به چالش کشانده است. به دست آوردن جواب های محاسباتی برای آنها دارای دشواری ها و رنج های فراوانی است که ناشی از ذات مساله می‌باشد، اما با این حال گاهی روزنه‌های امید برای حل آنها پیدا می‌شود. در واقع در این مقاله قصد داریم تا یکی از حالات خاص را تحت شرایطی حل کنیم که با وجود سادگی دارای کاربرد فراوان است.

۲ معادلات انتگرالی ولترای نوع اول $(V1)$

در این قسمت فرض می‌کنیم $(V1)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\int_{0}^{x} k(x,t)g(t)dt = f(x) \quad , \quad f(0)=0 \qquad (1)$$

تابع $g(x)$ مجهول می‌باشد. فرض می‌کنیم $k(x,t)$ ، $k_x(x,t)$، $f(x)$ و $f'(x)$ برای $0 \le x \le a$ و $0 \le t \le x$ پیوسته باشند. با مشتق‌گیری نسبت به x، از (۱) خواهیم داشت:

* عهده دار مکاتبات

$$k(x,x)g(x)+\int_{\circ}^{x} k_x(x,t)g(t)dt=f'(x) \qquad (۲)$$

هر جواب پیوسته $g(x)$ از (۱)، برای $\circ \le x \le a$ در (۲) صدق می‌کند، عکس این مطلب نیز برقرار است، یعنی هر جواب پیوسته (۲) برای هر $\circ \le x \le a$ در (۱) صدق می‌کند. [2-3].

گیریم $k(x,x)$ در هیچ نقطه از بازه $[\circ,a]$ صفر نشود، در این صورت می‌توان (2) را به صورت یک معادله ولترای نوع دوم نوشت:

$$g(x)+\int_{\circ}^{x} k_1(x,t)g(t)dt=f_1(x) \qquad (۳)$$

که در آن

$$k_1(x,t)=\frac{k_x(x,t)}{k(x,x)} \quad \text{و} \quad f_1(x)=\frac{f'(x)}{k(x,x)}$$

تحت فرضیات گفته شده، معادله (۲) جواب یکتا دارد، [۲ ـ ۳]. اگر $k(x,x)\equiv \circ$، دوباره مشتق گرفتن از (۲)گاهی مفید می‌باشد. اما اگر $k(x,x)$ در مقداری مانند $x\in[\circ,a]$ مثل $x=\circ$، صفر شود، معادله (۳) رفتاری کاملاً متفاوت خواهد داشت و آنرا معادله ولترای نوع سوم می‌نامیم. پیچیدگی‌ها و مشکلات ناشی از این حالت شبیه صفر شدن ضرایب مشتقات مراتب بالا در معادلات دیفرانسیل خطی می‌باشد و مورد توجه ما نمی‌باشد.

شرط اساسی $f(\circ)=\circ$، شرطی لازم و کافی برای آن می‌باشد که $g(x)$ به عنوان جواب (۲) یا (۳) در (۱) هم صدق نماید [۲ ـ ۳].

۳ V1 با هسته‌های منفرد

در این بخش فرض می‌کنیم هسته V1 منفرد باشد

$$k(x,t)=\frac{k(x,t)}{(x-t)^r}\quad , \quad \circ<r<1 \qquad (۴)$$

که $k(x,t)$ پیوسته بوده و

$$k(t,t)\neq\circ \qquad \forall\ t\in[\circ,x] \qquad (۵)$$

در این صورت (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{\circ}^{t} \frac{k(t,s)}{(t-s)^r}g(s)ds=f(t) \qquad (۶)$$

در اینجا از تکنیک بخش قبل نمی‌توان استفاده نمود. برای حل (۶)، طرفین آن را در $\dfrac{dt}{(x-t)^{1-r}}$ ضرب نموده و انتگرال می‌گیریم

$$\int_{\circ}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{1-r}}\int_{\circ}^{t} \frac{k(t,s)}{(t-s)^r}g(s)ds=\int_{\circ}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-r}}dt \qquad (۷)$$

یا

$$\int_{\circ}^{x} g(s)ds\int_{s}^{x} \frac{k(t,s)}{(x-t)^{1-r}(t-s)^{r}}dt = \int_{\circ}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-r}}dt \qquad (۸)$$

گیریم

$$H(x,s) = \int_{s}^{x} \frac{k(t,s)}{(x-t)^{1-r}(t-s)^{r}}dt \qquad (۹)$$

و

$$F(x) = \int_{\circ}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-r}}dt \qquad (۱۰)$$

پس (۸) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\int_{\circ}^{x} H(x,s)g(s)ds = F(x) \qquad (۱۱)$$

حال تحت شرط (۵) و با معادله (۱۱)، می‌توانیم معادله (۶) را مانند بخش قبل حل نمائیم. معادله (۱۱)، معادله آبل تعمیم یافته مشهور می‌باشد، در بخش بعد حالتی خاص، مهم ولی مفید و دارای کاربرد فراوان از این را در نظر می گیریم.

٤ معادله انتگرال آبل

اگر در معادله (۶) قرار دهیم $k(x,t)=1$ به آن معادله انتگرال آبل گویند. یک حالت شناخته شده و پر استفاده از آن وقتی هست که $r=\frac{1}{2}$. نشان داده شده است که $H(x,t)=\frac{\pi}{\sin(\pi r)}$ و لذا معادله (۱۱) می‌تواند به صورت ساده شده زیر بیان گردد،

$$\frac{\pi}{\sin(\pi r)}\int_{\circ}^{x} g(t)dt = F(x) \qquad (۱۲)$$

از (۱۲) داریم $F(\circ)=\circ$ و لذا با در نظر گرفتن (۱۰) و مشتق‌گیری از طرفین (۱۲)، جواب به دست می‌آید:

$$g(x) = \frac{\sin(r\pi)}{\pi}.\frac{d}{dx}\left[\int_{\circ}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-r}}dt\right] \qquad (۱۳)$$

تحت فرض پیوستگی مشتقات $f(x)$ با فرمول لایب نیتز، از (۱۳) خواهیم داشت.

$$g(x) = \frac{\sin(r\pi)}{\pi}\left[\frac{f(\circ)}{x^{1-r}} + \int_{\circ}^{x} \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-r}}dt\right] \qquad (۱۴)$$

به عنوان یک حالت خاص و کاربردی گفتیم که $r=\frac{1}{2}$ مورد توجه است، لذا در این حالت از (۱۳) داریم:

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left[\int_{\circ}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt\right] \qquad (۱۵)$$

به عنوان مثال معادله انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$x=\int_{\circ}^{x}\frac{g(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt$$

در این جا داریم $f(x)=x$، لذا $f(\circ)=\circ$ و از (۱۵) داریم

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left[\int_{\circ}^{x}\frac{x}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$=\frac{2\sqrt{x}}{\pi}$$

۵ مثال‌های زیادتر

در این بخش به عنوان حسن ختام کارایی و سادگی روش گفته شده، چند مثال دیگر را مورد توجه قرار می‌دهیم. جدول (۱) را نگاه کنید.

شماره	$f(x)$	جواب: $g(x)$
۱	$\sin x$	$\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{x}\frac{\cos t}{\sqrt{x-t}}dt$
۲	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}$

جدول ۱۱*

*جدول ۱۱ جواب معادله $f(x)=\int_{\circ}^{x}\frac{g(t)}{\sqrt{x-t}}dt$

٦ نتیجه گیری

همانطور که می دانیم معادلات انتگرال دارای کاربردهای فراوانی در علوم و مهندسی می باشند که می توان به حل معادلات دیفرانسیل توسط آن ها اشاره نمود گاهی همچنین این معادلات در مسایل کاربردی نظیر زلزله، پزشکی، مهندسی، مانند مساله مکانیکی آبل به صورت مدل ریاضی مساله مورد توجه واقع می شوند. در این مقاله سعی بر آن بود که معادلات ولترای نوع اول با هسته های منفرد مشهور به معادلات آبل حل گردد. در روش گفته شده در این مقاله علاوه بر کارایی روش برای این معادلات سادگی آن نیز توسط چند مثال نشان داده شد.

منابع

[1] Babolian E. Lotfi T. and Paripour M., "wavelets Moment Method for solving Fredholm Integral Equations of the First Kind", Applied Mathematics and Computation, 186 (2007), pp. 1467-1471.
[2] Bitsadze A. V., "Integral Equations of First Kind", World Scientific Publishing Co. Pet, 1995
[3] Jerri A.J. "Introduction to Integral Equations with Applications", John Wiley, 1999...