# تصمیم‌گیری گروهی به کمک TOPSIS فازی*

صابر ساعتی[۱،**]، عادل حاتمی ماربینی[۲]، احمد ماکوئی[۳]
[۱] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران-شمال
[۲] گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران-جنوب
[۳] گروه مهندسی صنایع، دانشگاه علم وصنعت ایران

## چکیده

امروزه در دنیای واقعی بسیاری از فاکتورهای کمی و کیفی همچون کیفیت، قیمت، انعطاف‌پذیری و عملکرد تحویل می‌بایستی برای تصمیم‌گیری ها مورد توجه قرار گیرد. بدین منظور می‌توان برای تعیین نرخ ها و وزن ها از متغیرهای گفتاری استفاده نموده و آنها را به صورت اعداد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای بیان نمود. بنابراین هدف از این مقاله توسعه روش TOPSIS در مسایل تصمیم‌گیری با داده‌های فازی می‌باشد تا تیم تصمیم‌گیری در محیطی از معیارهای مبهم و گنگ، توانایی انتخاب گزینه مناسب را به دست آورد. بر اساس مفهوم تکنیک TOPSIS در مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره گروهی، شاخص ضریب نزدیکی بوسیله محاسبه فاصله از حل ایده‌آل فازی و حل ضد-ایده‌آل فازی توسط رویکرد رتبه‌بندی اعداد فازی به صورت همزمان برای هر گزینه تعریف گردیده تا بدین وسیله تمام گزینه‌ها رتبه‌بندی گردند. در نهایت، یک مثال عددی برای بیشتر روشن شدن روش پیشنهادی آورده شده است.

**کلمات کلیدی**: تصمیم‌گیری گروهی چند معیاره فازی ، متغیرهای گفتاری، رتبه‌بندی اعداد فازی، TOPSIS.

## ۱ مقدمه

تصمیم‌گیری چند معیاره یکی از حوزه‌های تحقیق در عملیات و علوم مدیریت بوده که در طول دهه اخیر با توجه به نیازمندی های کاربردی گوناگون به سرعت توسعه یافته است. با کمک کامپیوترها تکنیک های تصمیم‌گیری در تمام حوزه‌های فرایند تصمیم‌گیری بسیار قابل قبول گردیده‌اند. به طور خاص در چند سال اخیر، استفاده از کامپیوتر بسیار افزایش یافته است، بنابراین کاربرد روش های تصمیم‌گیری چند معیاره برای استفاده‌کنندگان با توجه به پیچیدگی‌های ریاضی در اجرا بسیار آسان گردیده است.

* این مقاله مستخرج از طرح پژوهشی با همین عنوان می‌باشد که با حمایت مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال اجرا شده است.
** عهده‌دار مکاتبات: ssaatim@yahoo.com

تصمیم‌گیری رویه‌ای برای پیدا کردن بهترین گزینه از میان مجموعه‌ای از گزینه‌های موجود می‌باشد. زمانی که در مسایل تصمیم‌گیری چندین معیار را در نظر می‌گیریم مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره (MCDM) نامیده می‌شوند [۱–۱۵]. یک مساله تصمیم‌گیری با $m$ گزینه و $n$ معیار می‌تواند در ماتریسی به صورت زیر بیان گردد:

$$G = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{m1} & G_{m2} & \dots & G_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad , \qquad W = [W_1, W_2, \dots, W_n]$$

که $A_1$، $A_2$،...، $A_m$ گزینه‌ها و $C_1$، $C_2$،...، $C_n$ معیارهای ارزیابی، $G_{ij}$ نرخ ارزیابی گزینه $A_i$ تحت معیار $C_j$ بوده، و $W_j$ وزن معیار $C_j$ می‌باشد.

مسایل MCDM به دو نوع از مسایل می‌توانند تقسیم شوند. یکی از آنها مسایل MCDM کلاسیک [۱] است، که در آنها نرخ ها و اوزان معیارها به صورت قطعی اندازه‌گیری می‌شود. دیگری مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره فازی (FMCDM) [۲–۱۵] می‌باشد، که در آنها نرخ ها و اوزان به صورت غیرقطعی، گنگ و مبهم ارزیابی شده و معمولاً به صورت متغیرهای گفتاری و به تبع آن اعداد فازی بیان می‌گردند [۱۶–۱۸]. تکنیک TOPSIS یکی از تکنیک های معروف برای MCDM کلاسیک می باشد که اولین بار توسط Hwang و Yoon [۱] معرفی گردید. منطق اصولی TOPSIS تعریف حل ایده‌آل و ضد ایده‌آل می‌باشد. حل ایده‌آل حلی است که معیارهای سود را ماکزیمم و معیارهای هزینه را مینیمم می‌نماید. به طور خلاصه، حل ایده‌آل شامل تمام بهترین مقادیر معیارهای در دسترس می‌باشد در حالی که حل ضد ایده‌آل ترکیبی از بدترین مقادیر معیارهای در دسترس می‌باشد. گزینه بهینه، گزینه‌ای است که کوتاهترین فاصله از حل ایده‌آل و بیشترین فاصله را از حل ضد ایده‌آل دارد.

نظر به اینکه TOPSIS روشی معروف برای مسایل MCDM کلاسیک می‌باشد، خیلی از محققان از آن برای حل مسایل FMCDM استفاده می‌کنند. عده‌ای از محققان [۱۳] نرخ ها و اوزان فازی را به مقادیر قطعی فازی زدایی نموده‌اند، در حالیکه فازی زدایی باعث از دست دادن مقداری از اطلاعات می‌گردد. دیگران، چون Chen، Liang، Raj و Kumar [۴، ۱۰ و ۱۲] فرض نموده‌اند که می‌بایست TOPSIS در محیط فازی تعمیم یابد. این روش ها می‌تواند کمبود اطلاعات فازی را تنزیل نماید، اما مشکلات عدیده‌ای در کارهای آنها مشاهده شده است.

در این مقاله، نرخ ها و وزن های معیارها در مساله توسط متغیرهای گفتاری بیان می‌گردد و سپس با استفاده از توسعه روش TOPSIS در محیط فازی، به حل مساله انتخاب گزینه مناسب برای مساله تصمیم‌گیری پرداخته می‌شود. بر اساس مفاهیم TOPSIS در مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره، حل ایده‌آل فازی و حل ضد-

ایده‌آل فازی را تعریف کرده، و سپس با توجه به رویکرد رتبه‌بندی اعداد فازی فاصله بین دو عدد فازی را محاسبه می‌نماییم. با استفاده از این روش، فاصله هر گزینه را از حل ایده‌آل فازی و حل ضد ایده‌آل فازی محاسبه کرده و در نهایت، شاخص ضریب نزدیکی هر گزینه محاسبه می‌گردد تا بر اساس آن رتبه‌بندی گزینه‌ها مشخص گردد. مقادیر بالاتر ضریب نزدیکی به معنای نزدیکی بیشتر به حل ایده‌آل فازی و دوری بیشتر از حل ضد ایده‌آل فازی می‌باشد.

در ادامه این مقاله، ابتدا تعاریف اساسی بیان می‌گردد. در بخش دوم، روش تصمیم‌گیری TOPSIS فازی برای حل انتخاب گزینه مناسب برای مساله تصمیم‌گیری معرفی می‌شود و سپس روش پیشنهاد شده با یک مثال توضیح داده می‌شود. در نهایت، مقاله با یک نتیجه‌گیری به اتمام خواهد رسید.

## ۲ تعاریف اولیه

در این بخش تعدادی از تعاریف مجموعه‌های فازی ارایه می‌شود [۱۶-۱۸].

**تعریف ۱** اگر $X$ یک مجموعه از اشیاء باشد آنگاه یک مجموعه فازی $\widetilde{A}$ در $X$ یک مجموعه از زوجهای مرتب به صورت زیر می‌باشد:

$$\widetilde{A}=\{(x,\mu_{\widetilde{A}}(x))\,|\,x\in X\} \qquad (۱)$$

$\mu_{\widetilde{A}}(x)$ تابع عضویت یا درجه عضویت $x$ در $\widetilde{A}$ نامیده می‌شود، که متناظر با هر عنصر $x$ در $X$ یک عدد حقیقی در فاصله $[0,1]$ اختیار می‌کند.

**تعریف ۲** عدد فازی $\widetilde{M}$ از نوع $LR$ گفته می‌شود اگر و تنها اگر:

$$\mu_{\widetilde{M}}(x)=\begin{cases} L(\frac{m-x}{m-l}) & l\le x\le m \\ R(\frac{x-m}{u-m}) & m<x\le u \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \qquad (۲)$$

و با $\widetilde{M}=(l,m,u)_{LR}$ نشان می‌دهند که $L$ و $R$ دو تابع دلخواه می‌باشند.

**تعریف ۳** یک عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{M}$ نوع خاصی از اعداد $LR$ است که به صورت $(M_1,M_2,M_3,M_4)$ نمایش داده می‌شود. تابع عضویت این نوع اعداد فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{M}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-M_1}{M_2-M_1} & M_1\le x<M_2\\ 1 & M_2\le x<M_3\\ \dfrac{x-M_4}{M_3-M_4} & M_3\le x<M_4\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases} \qquad (۳)$$

هرگاه در یک عدد فازی ذوزنقه‌ای $M_2=M_3$، آنگاه $\tilde{M}$ یک عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود. عدد غیر فازی $r$ را می‌توان به صورت $(r,r,r,r)$ بیان نمود.

بر اساس اصول بیان شده در مجموعه‌های فازی، جمع و تفریق هر دو عدد فازی ذوزنقه‌ای نیز یک عدد فازی ذوزنقه‌ای می‌باشد، اما ضرب هر دو عدد فازی تنها تخمینی از یک عدد فازی ذوزنقه‌ای می‌باشد. دو عدد فازی ذوزنقه‌ای مثبت $\tilde{M}=(M_1,M_2,M_3,M_4)$ و $\tilde{N}=(N_1,N_2,N_3,N_4)$ و یک عدد حقیقی $r$ را در نظر بگیرید، عملیات اصلی روی اعداد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}&-\tilde{N}=(-N_4,-N_3,-N_2,-N_1)\\&\tilde{M}\oplus\tilde{N}=[M_1+N_1,M_2+N_2,M_3+N_3,M_4+N_4]\\&\tilde{M}\Theta\tilde{N}=[M_1-N_4,M_2-N_3,M_3-N_2,M_4-N_1]\\&\tilde{M}\otimes r=[M_1r,M_2r,M_3r,M_4r]\end{aligned} \qquad (۴)$$

اگر $\tilde{M}>۰$ و $\tilde{N}>۰$ آنگاه:

$$\tilde{M}\otimes\tilde{N}\cong[M_1N_1,M_2N_2,M_3N_3,M_4N_4]$$

**تعریف ٤** برای یک عدد فازی $\tilde{M}$، مجموعه $\alpha$-برش عدد فازی $\tilde{M}$ بازاء $\alpha\in[۰,1]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$[\tilde{M}]_\alpha=\{x\in R\,|\,\mu_{\tilde{M}}(x)\ge\alpha\} \qquad (۵)$$

برای یک عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}=(a,b,c,d)$، فواصل حاصل شده توسط مجموعه $\alpha$-برش‌ها را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$A(\alpha)=[a(\alpha),c(\alpha)]=[(b-a)\alpha+a,(c-d)\alpha+d] \qquad (۶)$$

روش های متعددی برای رتبه‌بندی اعداد فازی در ادبیات موضوع وجود دارد. مقالات [۱۹-۲۱] مروری جامع از روش های موجود می‌باشد. عده‌ای از این روش ها با استفاده از مفهوم مقدار میانی و بعضی دیگر اعداد فازی را با مفهوم مجموعه‌های $\alpha$-برش، مقایسه می‌نمایند، علاوه بر آنها تعدادی روش های رتبه بندی امکان اعداد فازی وجود دارد. روش دیگر رتبه‌بندی فازی که تمرکز ما در این مقاله براساس آن می‌باشد، رتبه‌بندی بر اساس فاصله نام دارد [۲۲-۲۴] . Saade و Schwarzlander [۲۲] با استفاده از مفهوم فاصله به مقایسه اعداد فازی پرداخته‌اند. آنها برای مرتب کردن اعداد فازی تنها از مقادیر غیر منفی استفاده نموده‌اند. Yao و Wu در [۲۴] فاصله $d^*$ را طوری روی $R$ لحاظ نموده‌اند که $d^*(a,\circ)=a$ و $d^*(a,b)=a-b$ برای تمام $a,b\in R$. آنگاه برای $\tilde{A},\tilde{B}\in H(R)$ ($H(R)$ خانواده اعداد فازی روی $R$)، فاصله را به صورت زیر تعریف می‌نمایند:

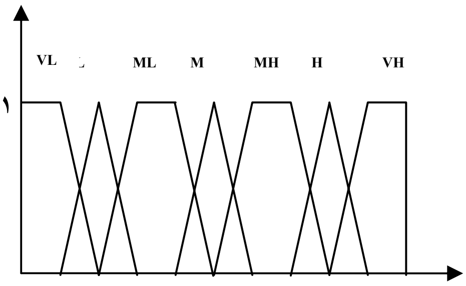
$$d(\widetilde{A},\widetilde{B})=\frac{1}{2}\int_{\circ}^{1}\left([\widetilde{A}]_{\alpha}^{L}+[\widetilde{A}]_{\alpha}^{U}-[\widetilde{B}]_{\alpha}^{L}-[\widetilde{B}]_{\alpha}^{U}\right)d\alpha \qquad (۷)$$

که $[\widetilde{A}]_{\alpha}^{L}$، $[\widetilde{A}]_{\alpha}^{U}$، $[\widetilde{B}]_{\alpha}^{L}$ و $[\widetilde{B}]_{\alpha}^{U}$ به ترتیب نشان دهنده حد پایین و بالا اعداد فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ می‌باشند.
بر اساس رابطه (۷) آنها ثابت کرده‌اند که سیستم رتبه‌بندی روی $H(R)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

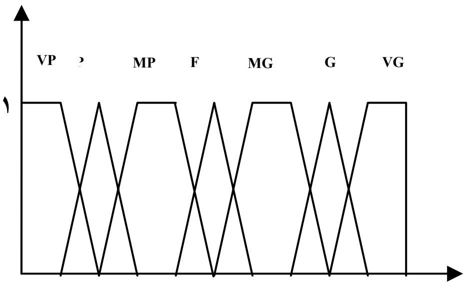
$$\widetilde{B}\prec\widetilde{A}\quad if\quad d(\widetilde{A},\widetilde{B})>\circ,\qquad \widetilde{B}\succ\widetilde{A}\quad if\quad d(\widetilde{A},\widetilde{B})<\circ,\qquad \widetilde{B}\approx\widetilde{A}\quad if\quad d(\widetilde{A},\widetilde{B}) \qquad (۸)$$

## ۳ الگوریتم TOPSIS فازی پیشنهادی

هدف روش TOPSIS فازی پیشنهاد شده در این مقاله رتبه‌بندی گزینه‌های موجود با توجه به معیارهای مورد نظر در محیطی فازی و نادقیق می‌باشد. در این مقاله، متغیرهای گفتاری برای اهمیت وزن های فاکتورها به صورت خیلی زیاد (VH)، زیاد (H)، تا حدودی زیاد (MH)، بی‌تفاوت (M)، تا حدودی کم (ML)، کم (L) و خیلی کم (VL) بوده و همچنین متغیرهای گفتاری برای نرخ های معیارهای هر گزینه به صورت خیلی خوب (VG)، خوب (G)، تا حدودی خوب (MG)، بی‌تفاوت (F)، تا حدودی ضعیف (MP)، ضعیف (P) و خیلی ضعیف (VP) می‌باشد [۲۵]. در میان انواع گوناگون اعداد فازی، اعداد فازی ذوزنقه‌ای از کاربرد بیشتری برخوردار هستند. بدین منظور داده‌های مورد نیاز روش پیشنهادی را به صورت ذوزنقه‌ای فرض نموده‌ایم. دسته-بندی این متغیرها در این مقاله، به صورت شکل‌های ۱ و ۲ در نظر گرفته شده است.




**شکل ۱:** متغیرهای گفتاری برای اهمیت وزن هر معیار




**شکل ۲:** متغیرهای گفتاری برای نرخ های معیارهای هر گزینه

در مسایل واقعی پیرامون ما، مسایل تصمیم‌گیری اکثراً مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره گروهی می‌باشد. بنابراین، در ابتدا یک تیم خبره با $K$ تصمیم‌گیرنده که آشنا با عملیات و ماموریت های سازمان هستند، تشکیل می‌دهیم و این مجموعه از افراد را $E_k$ می‌نامیم. فرض کنید، $n$ زیر فاکتور روی مساله تصمیم‌گیری موثر هستند، به دست آمده و این مجموعه از معیارها را $C_j$ بنامیم. در نهایت، متناسب با معیارها و مساله، $m$ گزینه که موجود و شدنی است، تعیین گردیده و این مجموعه از گزینه‌ها را $A_i$ می‌نامیم.

فرض کنید، مجموعه $X=\left\{x_{ij} \mid i=1,2,...,m, j=1,\ 2\ ,...,n\right\}$ نرخ های ارزیابی $A_i\ \left(i=1,\ 2\ ,...,m\right)$ با توجه به معیارهای $c_j\ \left(j=1\ ,2\ ,...,n\right)$ باشد. هر تصمیم‌گیرنده $D_k\ \left(k=1\ ,2\ ,...,K\right)$ می‌تواند نرخ فازی خود را به صورت یک عدد فازی ذوزنقه‌ای مثبت $\tilde{R}_k\ (k=1\ ,2\ ,...,K)$ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{R}_k}(x)$ تعیین کند. اگر نرخ های فازی همه تصمیم‌گیرنده‌ها به صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای مثبت $\tilde{R}_k=(r_k^a,r_k^b,r_k^c,r_k^d)\ (k=1,2,...,K)$ باشد، برای تلفیق نرخ های فازی تصمیم‌گیرنده‌ها، می‌توان نرخ فازی تلفیق شده را به صورت $\tilde{R}=(r^a,r^b,r^c,r^d)$ تعریف نمود، که در آن $r^a=\min_k\{r_k^a\}$، $r^b=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} r_k^b$، $r^c=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} r_k^c$ و $r^d=\max_k\{r_k^d\}$ [۲۵].

فرض کنید معیارهای ارزیابی هر گزینه و اهمیت وزن های فازی هر معیار توسط $k$ امین تصمیم‌گیرنده به ترتیب به صورت $\tilde{x}_{ijk}=(x_{ijk}^a,x_{ijk}^b,x_{ijk}^c,x_{ijk}^d)$ و $\tilde{W}_{jk}=(w_{jk}^a,w_{jk}^b,w_{jk}^c,w_{jk}^d)$؛ $i=1,2,...,m$ و $j=1,2,...,n$ باشد. از این رو تلفیق نرخ های فازی معیارهای هر گزینه $\tilde{x}_{ij}$ به صورت $\tilde{x}_{ij}=(x_{ij}^a,x_{ij}^b,x_{ij}^c,x_{ij}^d)$ محاسبه می‌گردد، به طوریکه $x_{ij}^a=\min_k\left\{x_{ijk}^a\right\}$، $x_{ij}^b=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk}^b$، $x_{ij}^c=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} x_{ijk}^c$ و $x_{ij}^d=\max_k\left\{x_{ijk}^d\right\}$. تلفیق وزن های فازی هر معیار $\tilde{W}_j$ نیز به صورت $\tilde{W}_j=(W_j^a,W_j^b,W_j^c,W_j^d)$ محاسبه می‌گردد، به طوریکه $W_j^a=\min_k\left\{w_{jk}^a\right\}$، $W_j^b=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} w_{jk}^b$، $W_j^c=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} w_{jk}^c$ و $W_j^d=\min_k\left\{w_{jk}^d\right\}$.

پس با توجه به محاسبات مربوط به تلفیق نرخ های فازی معیارهای هر گزینه و تلفیق وزن های هر معیار ماتریس‌های تصمیم‌گیری فازی را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\widetilde{D}=\begin{bmatrix}\widetilde{x}_{11} & \widetilde{x}_{12} & \cdots & \widetilde{x}_{1n}\\ \widetilde{x}_{21} & \widetilde{x}_{22} & \cdots & \widetilde{x}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \widetilde{x}_{m1} & \widetilde{x}_{m2} & \cdots & \widetilde{x}_{mn}\end{bmatrix} \quad , \quad \widetilde{W}=\left[\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2,\dots,\widetilde{w}_n\right] \qquad (۹)$$

به طوری که $\tilde{x}_{ij}=(x_{ij}^a,x_{ij}^b,x_{ij}^c,x_{ij}^d)$ و $\tilde{W}_j=(W_j^a,W_j^b,W_j^c,W_j^d)$ و $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$ می‌باشد.

در مسایل تصمیم‌گیری اکثراً فاکتورها ماهیتاً با یکدیگر در تعارض می‌باشند. عده‌ای از آنها مانند قیمت، تأخیر در تحویل و ... به صورت هزینه معرفی شده و بعضی دیگر از معیارها مانند کیفیت، ظرفیت و ... به صورت سود معرفی می‌گردند. بنابراین، برای بی‌مقیاس کردن ماتریس تصمیم‌گیری فازی را به صورت $\widetilde{R}=\left[\widetilde{r}_{ij}\right]_{m\times n}$ نرمال می‌کنیم.

اگر $B$ و $C$ به ترتیب معیارهای سود و هزینه باشند، آنگاه:

$$\tilde{r}_{ij}=\left(\frac{x_{ij}^a}{\theta_j^*},\frac{x_{ij}^b}{\theta_j^*},\frac{x_{ij}^c}{\theta_j^*},\frac{x_{ij}^d}{\theta_j^*}\right) \qquad (j\in B)$$

$$\tilde{r}_{ij}=\left(\frac{\varphi_j^-}{x_{ij}^d},\frac{\varphi_j^-}{x_{ij}^c},\frac{\varphi_j^-}{x_{ij}^b},\frac{\varphi_j^-}{x_{ij}^a}\right) \qquad (j\in C)$$

که $\theta_j^*\ (j\in B)$ و $\varphi_j^-\ (j\in C)$ بترتیب به صورت $\max_i\{x_{ij}^d\}$ و $\min_i\{x_{ij}^a\}$ تعریف می‌گردد.

روش نرمال‌سازی فوق، تمام خصوصیات را همچنان حفظ می‌نماید، در حالی که $\widetilde{r}_{ij}$ به ازای هر $i$ و $j$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای نرمال می‌باشند. حال ماتریس تصمیم‌گیری فازی نرمال وزین شده را به صورت $\tilde{Q}=\left[\tilde{q}_{ij}\right]_{m\times n}$؛ $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$ به دست می‌آوریم، به طوریکه $\tilde{q}_{ij}=\tilde{r}_{ij}(\cdot)\tilde{w}_j$. عناصر ماتریس تصمیم‌گیری فازی نرمال وزین $(\forall i,j)\ \tilde{q}_{ij}\cong(q_{ij}^a,q_{ij}^b,q_{ij}^c,q_{ij}^d)$، همچنان تقریباً به صورت عدد فازی ذوزنقه‌ای می‌باشند. اکنون حل ایده‌آل فازی $(F^*)$ و حل ضد ایده‌آل فازی $(F^-)$ را به صورت زیر می‌توانیم تعریف نماییم:

$$\begin{aligned}F^*&=(\tilde{V}_1^*,\tilde{V}_2^*,\dots,\tilde{V}_n^*)\\ F^-&=(\tilde{V}_1^-,\tilde{V}_2^-,\dots,\tilde{V}_n^-)\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

به طوری که

$$\tilde{V}_j^*=(v_j^*,v_j^*,v_j^*,v_j^*) \quad , \quad \tilde{V}_j^-=(v_j^-,v_j^-,v_j^-,v_j^-) \qquad \forall\, i,j.$$

$$v_j^*=\max_i\{q_{ij}^d\} \quad , \quad v_j^-=\min_i\{q_{ij}^a\}$$

حل ایده‌آل فازی یک حل مجازی ایده‌آل است که معیارهای سود را ماکزیمم کرده و معیارهـای زیـان را مینیمم می‌کند یا به عبارتی دیگر گزینه‌ای است که معیارهـای آن در بهتـرین مقـدار خـود مـی‌باشـند، بنـابراین در ماتریس تصمیم‌گیری فازی نرمالیزه وزین می‌توانیم گزینه را به عنوان حل ایـده‌آل فـازی در نظـر بگیـریم کـه هـر یک از معیارهای آن به صورت (۱،۱،۱،۱) می‌باشد. از طرف دیگر، حل ضد-ایده‌آل فازی یک حل مجازی ضـد ایده‌آل است که معیارهای سود را می‌نیمم کرده و معیارهای زیان را ماکزیمم می‌کند یا به عبارتی دیگر گزینـه‌ای که معیارهای آن در بدترین مقدار خود می‌باشند، بنابراین، در ماتریس تصمیم‌گیری فازی نرمالیزه وزین می‌تـوانیم گزینه را به عنوان حل ضد- ایده‌آل فـازی در نظـر بگیـریم کـه هـر یـک از معیارهـای آن بـه صـورت (۰،۰،۰،۰) می‌باشد. در این مقاله همانطور که از رابطه (۱۰) مشاهده می‌گردد، گزینه ایده‌آل و ضد ایده‌آل از بین درایـه‌هـای ماتریس تصمیم‌گیری فازی نرمال وزین شده انتخاب می‌گردند.

فاصله هر گزینه از $F^*$ و $F^-$ بر اساس رابطه (۷) به صورتی که سیستم رتبه‌بندی روی $H(R)$ می‌باشد، به ازای $\alpha$های گوناگون از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d_i^*(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} d(\tilde{V}_j^*, \tilde{q}_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (2v_j^* - q_{ij}^a - q_{ij}^d) + (\frac{\alpha}{2}) \sum_{j=1}^{n} (q_{ij}^a + q_{ij}^d - q_{ij}^b - q_{ij}^c), \quad \forall i,$$
$$d_i^-(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} d(\tilde{q}_{ij}, \tilde{V}_j^-) = \sum_{j=1}^{n} (q_{ij}^a + q_{ij}^d - 2v_j^-) + (\frac{\alpha}{2}) \sum_{j=1}^{n} (q_{ij}^b + q_{ij}^c - q_{ij}^a - q_{ij}^d), \quad \forall i. \qquad (۱۱)$$

توجه کنید که در رابطه فوق $d(\circ,\circ)$ مقدار فاصله بین دو عدد فازی بوده و $\alpha \in [\circ, 1]$ می‌باشد.

هدف در این تکنیک تصمیم‌گیری این است که گزینه‌ای را انتخاب کنیم که به طور همزمان تا حد ممکن به گزینه ایده‌آل فازی نزدیک بوده و از گزینه ضد ایده‌آل فازی دور باشد. بدین منظور یک شاخص ضریب نزدیکی برای رتبه‌بندی تمام گزینه‌ها با توجه به فاصله حل ایده‌آل فازی ($F^*$) و حل ضد-ایده‌آل فازی ($F^-$) با توجه به $\alpha$ مربوطه می‌بایست تعریف نمود. بدین منظور شاخص ضریب نزدیکی $(CC_i)$ برای هر گزینه به ازای $\alpha$ خاص به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$CC_i(\alpha) = \frac{d_i^-(\alpha)}{d_i^*(\alpha) + d_i^-(\alpha)}, \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (۱۲)$$

واضح است که از رابطه (۱۲) اگر $F_i = F^*$ آنگاه $CC_i(\alpha) = 1$ است، و اگر $F_i = F^-$ آنگاه $CC_i(\alpha) = \circ$ می‌گردد. به عبارت دیگر زمانی که گزینه $F_i$ به $F^*$ نزدیک و از $F^-$ دور می‌گردد، با توجه به رابطه (۱۲) شاخص ضریب نزدیکی $(CC_i(\alpha))$ به عدد ۱ نزدیک می‌شود.

به طور خلاصه الگوریتم TOPSIS فازی به صورت زیر بیان می‌شود:

**قدم ۱:** تشکیل یک تیم تصمیم‌گیری و سپس تعیین گزینه‌ها و معیارهای ارزیابی آنها.

**قدم ۲:** تعیین اهمیت معیارها توسط هر تصمیم‌گیرنده با استفاده از متغیرهای گفتاری از پیش تعیین شده.

**قدم ۳:** تعیین نرخ های گزینه‌ها با توجه به هر معیار با استفاده از متغیرهای گفتاری از پیش تعیین شده.

**قدم ٤:** تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری فازی.

**قدم ٥:** تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری فازی نرمال شده.

**قدم ٦:** تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری فازی نرمال وزین شده.

**قدم ۷:** تعیین حل ایده‌آل فازی و حل ضد-ایده‌آل فازی.

**قدم ۸:** محاسبه فاصله هر گزینه از حل ایده‌آل فازی و حل ضد-ایده‌آل فازی برای هر $\alpha$ معین.

**قدم ۹:** محاسبه شاخص ضریب نزدیکی هر گزینه برای هر $\alpha$ معین.

**قدم ۱۰:** رتبه‌بندی گزینه‌ها با توجه به شاخص ضریب نزدیکی محاسبه شده در قدم قبل.

## ٤ مثال عددی

فرض کنید می‌خواهیم از بین ۴ گزینه $(\mathrm{WT}, \mathrm{WO}, \mathrm{ST}, \mathrm{SO})$ با توجه به معیارهای $(C_9, C_8, C_7, C_6, C_5, C_4, C_3, C_2, C_1)$ توسط یک تیم خبره ۳ نفره گزینه مطلوب را انتخاب نماییم. برای حل این مساله با توجه به الگوریتم پیشنهادی به طور مختصر داریم:

**قدم ۱ و ۲:** سه تصمیم‌گیرنده اهمیت معیارها را با استفاده از متغیرهای گفتاری در شکل ۱ ارزیابی کرده، که نتایج در جدول ۱ آمده است.

**قدم ۳ :** نتایج ارزیابی نرخ های گزینه‌ها توسط سه تصمیم‌گیرنده با استفاده از متغیرهای گفتاری در شکل ۲ به صورت جدول ۲ است.

| معیارها | تصمیم‌گیرنده‌ها | | |
|---|---|---|---|
| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ |
| $C_1$ | H | H | H |
| $C_2$ | VH | VH | VH |
| $C_3$ | VH | VH | H |
| $C_4$ | MH | M | M |
| $C_5$ | H | VH | H |
| $C_6$ | VH | VH | VH |
| $C_7$ | VL | VL | ML |
| $C_8$ | H | H | VH |
| $C_9$ | H | M | MH |

**جدول ۱:** اهمیت وزن معیارها توسط سه تصمیم‌گیرنده

**قدم ٤ :** حال ارزیابی‌های به دست آمده در قدم های دوم و سوم را به اعداد فازی ذوزنقه‌ای متناسب با آن تبدیل نموده تا ماتریس تصمیم‌گیری فازی و اعداد فازی وزن های گزینه‌ها به دست آید. که نتایج در جدول ۳ آمده است.

**قدم ۵ و ٦:** تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری فازی نرمالیزه وزین که در جدول ۴ به دست آمده است.

**قدم۷:** تعیین حل ایده‌آل فازی و حل ضد ایده‌آل فازی.

| معیارها | گزینه | تصمیم‌گیرنده‌ها | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ |
| $C_1$ | SO | MG | MG | MG |
| | ST | G | G | G |
| | WO | VG | VG | G |
| | WT | G | G | G |
| $C_2$ | SO | MG | MG | VG |
| | ST | VG | VG | VG |
| | WO | VG | G | G |
| | WT | G | G | MG |
| $C_3$ | SO | G | G | G |
| | ST | VG | VG | VG |
| | WO | VG | VG | G |
| | WT | MG | F | G |
| $C_4$ | SO | G | G | G |
| | ST | P | VP | P |
| | WO | VG | VG | VG |
| | WT | VG | G | G |
| $C_5$ | SO | G | G | G |
| | ST | VG | VG | VG |
| | WO | P | VP | P |
| | WT | G | G | VG |
| $C_6$ | SO | MG | G | VG |
| | ST | VG | G | MG |
| | WO | G | VG | G |
| | WT | VG | MG | MG |
| $C_7$ | SO | F | MG | G |
| | ST | MG | G | MG |
| | WO | MG | VG | G |
| | WT | G | MG | VG |
| $C_8$ | SO | G | VG | MG |
| | ST | VG | MG | VG |
| | WO | G | MG | MG |
| | WT | VG | G | VG |
| $C_9$ | SO | MG | G | G |
| | ST | VG | VG | MG |
| | WO | G | G | G |
| | WT | MG | G | MG |

**جدول ۲:** نرخ های پنج گزینه با توجه به معیارها توسط تصمیم گیرنده‌ها

| | SO | ST | WO | WT | وزن |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | (۸, ۷, ۵/۵, ۱) | (۹, ۸, ۷/۶۷, ۲) | (۱۰, ۹/۳۳, ۸/۳۳, ۳) | (۹, ۸, ۷/۶۷, ۴) | (۰/۹, ۰/۸, ۰/۸, ۰/۷) |
| $C_2$ | (۱۰, ۸, ۶/۶۷, ۵) | (۱۰, ۱۰, ۸/۶۷, ۶) | (۱۰, ۸/۶۷, ۸, ۷) | (۹, ۷/۶۷, ۷, ۵) | (۱, ۱, ۰/۹, ۰/۸) |
| $C_3$ | (۹, ۸, ۷/۶۷, ۷) | (۱۰, ۱۰, ۸/۶۷, ۸) | (۱۰, ۹/۳۳, ۸/۳۳, ۷) | (۹, ۶/۶۷, ۶, ۴) | (۱, ۰/۹۳, ۰/۸۷, ۰/۷) |
| $C_4$ | (۹, ۸, ۷/۶۷, ۷) | (۳, ۱/۶۷, ۱, ۰) | (۱۰, ۱۰, ۸/۶۷, ۸) | (۱۰, ۸/۶۷, ۸, ۷) | (۰/۸, ۰/۵۷, ۰/۵۳, ۰/۴) |
| $C_5$ | (۹, ۸, ۷/۶۷, ۷) | (۱۰, ۱۰, ۸/۶۷, ۸) | (۳, ۱/۶۷, ۱, ۰) | (۱۰, ۸/۶۷, ۸, ۷) | (۱, ۰/۸۷, ۰/۸۳, ۰/۷) |
| $C_6$ | (۱۰, ۸/۳۳, ۷/۳۳, ۷) | (۱۰, ۸/۳۳, ۷/۳۳, ۵) | (۱۰, ۸/۶۷, ۸, ۷) | (۱۰, ۸, ۶/۶۷, ۵) | (۱, ۱, ۰/۹, ۰/۸) |
| $C_7$ | (۹, ۶/۶۷, ۶, ۵) | (۹, ۷/۳۳, ۶/۳۳, ۵) | (۱۰, ۸/۳۳, ۷/۳۳, ۷) | (۱۰, ۸/۳۳, ۷/۳۳, ۵) | (۰/۵, ۰/۲, ۰/۱, ۰) |
| $C_8$ | (۱۰, ۸/۳۳, ۷/۳۳, ۵) | (۱۰, ۹, ۷/۶۷, ۵) | (۹, ۷/۳۳, ۶/۳۳, ۵) | (۱۰, ۹/۳۳, ۸/۳۳, ۷) | (۱, ۰/۸۷, ۰/۸۳, ۰/۷) |
| $C_9$ | (۹, ۷/۶۷, ۷, ۷) | (۱۰, ۹, ۷/۶۷, ۵) | (۹, ۸, ۷/۶۷, ۷) | (۹, ۷/۳۳, ۶/۳۳, ۵) | (۰/۹, ۰/۶۷, ۰/۶۳, ۰/۴) |

**جدول ۳:** ماتریس تصمیم‌گیری فازی و اعداد فازی وزن های پنج گزینه

$$F^{*}=[(0/9,0/9,0/9,0/9),(1,1,1,1),(1,1,1,1),(0/8,0/8,0/8,0/8),(1,1,1,1),(1,1,1,1),(0/5,0/5,0/5,0/5),(1,1,1,1),(0/9,0/9,0/9,0/9)]$$

$$F^{-}=[(0/07,0/07,0/07,0/07),(0/4,0/4,0/4,0/4),(0/28,0/28,0/28,0/28),(0,0,0,0),(0,0,0,0),(0/4,0/4,0/4,0/4),(0,0,0,0),(0/35,0/35,0/35,0/35),(0/2,0/2,0/2,0/2)]$$

| | SO | ST | WO | WT |
|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | (۰/۰۸۸ ,۰/۱۱۴ ,۰/۱۴۵ ,۰/۹) | (۰/۰۷۸ ,۰/۱ ,۰/۱۰۴ ,۰/۴۵) | (۰/۰۷ ,۰/۰۸۶ ,۰/۰۹۶ ,۰/۳) | (۰/۰۷۸ ,۰/۱ ,۰/۱۰۴ ,۰/۲۲۵) |
| $C_2$ | (۰/۴ ,۰/۵۶۳ ,۰/۷۵ ,۱) | (۰/۴ ,۰/۴۵ ,۰/۵۷۷ ,۰/۸۳۳) | (۰/۴ ,۰/۵۱۹ ,۰/۶۲۵ ,۰/۷۱۴) | (۰/۴۴۴ ,۰/۵۸۷ ,۰/۷۱۴ ,۱) |
| $C_3$ | (۰/۴۹ ,۰/۶۶۷ ,۰/۷۴۴ ,۰/۹) | (۰/۵۶ ,۰/۷۵۴ ,۰/۹۳ ,۱) | (۰/۴۹ ,۰/۷۲۵ ,۰/۸۶۸ ,۱) | (۰/۲۸ ,۰/۵۲۲ ,۰/۶۲ ,۰/۹) |
| $C_4$ | (۰/۲۸ ,۰/۴۰۷ ,۰/۴۵۶ ,۰/۷۲) | (۰ ,۰/۰۵۳ ,۰/۰۹۵ ,۰/۲۴) | (۰/۳۲ ,۰/۴۶ ,۰/۵۷ ,۰/۸) | (۰/۲۸ ,۰/۴۲۴ ,۰/۴۹۴ ,۰/۸) |
| $C_5$ | (۰/۴۹ ,۰/۶۳۷ ,۰/۶۹۶ ,۰/۹) | (۰/۵۶ ,۰/۷۲ ,۰/۸۷ ,۱) | (۰ ,۰/۰۸۳ ,۰/۱۴۵ ,۰/۳) | (۰/۴۹ ,۰/۶۶۴ ,۰/۷۵۴ ,۱) |
| $C_6$ | (۰/۴ ,۰/۵۴ ,۰/۶۸۲ ,۰/۷۱۴) | (۰/۴ ,۰/۵۴ ,۰/۶۸۲ ,۱) | (۰/۴ ,۰/۵۱۹ ,۰/۶۲۵ ,۰/۷۱۴) | (۰/۴ ,۰/۵۶۳ ,۰/۷۵ ,۱) |
| $C_7$ | (۰،۰/۰۷۵ ,۰/۱۶۷ ,۰/۵) | (۰ ,۰/۰۶۸ ,۰/۱۵۸ ,۰/۵) | (۰ ,۰/۰۶ ,۰/۱۳۶ ,۰/۳۵۷) | (۰ ,۰/۰۶ ,۰/۱۳۶ ,۰/۵) |
| $C_8$ | (۰/۳۵ ,۰/۶۰۸ ,۰/۷۲۵ ,۱) | (۰/۳۵ ,۰/۶۳۷ ,۰/۷۸۳ ,۱) | (۰/۳۵ ,۰/۵۲۵ ,۰/۶۳۸ ,۰/۹) | (۰/۴۹ ,۰/۶۹۱ ,۰/۸۱۲ ,۱) |
| $C_9$ | (۰/۲۸ ,۰/۴۴۱ ,۰/۵۱۴ ,۰/۸۱) | (۰/۲ ,۰/۴۸۳ ,۰/۶۰۳ ,۰/۹) | (۰/۲۸ ,۰/۴۸۳ ,۰/۵۳۶ ,۰/۸۱) | (۰/۲ ,۰/۳۹۹ ,۰/۴۹۱ ,۰/۸۱) |

**جدول ٤:** ماتریس تصمیم گیری فازی نرمالیزه وزین

**قدم۸:** محاسبه فاصله هر گزینه از حل ایده‌آل فازی و حل ضد ایده‌آل فازی به ازای $\alpha$های معین، که در جدول ۵ آمده است.

**قدم ۹ و ۱۰:** شاخص ضریب نزدیکی هر گزینه به ازای $\alpha$های معین محاسبه گشته، و بر اساس آن چهار گزینه مورد نظر رتبه بندی می گردند که نتایج در جدول ۶ آمده است. همان طور که از این جدول مشاهده مـی‌شـود، بـا افزایش $\alpha$ شاخص ضریب نزدیکی هر گزینه کاهش می‌یابد. رتبه‌بندی گزینه‌ها به صورت $SO > WT > ST > WO$ به دست آمده است.

| $\alpha=0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_6$ | $C_7$ | $C_8$ | $C_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d(SO,A^*)$ | ۰/۸۱۲ | ۰/۶ | ۰/۶۱ | ۰/۶ | ۰/۶۱ | ۰/۸۸۶ | ۰/۵ | ۰/۶۵ | ۰/۷۱ |
| $d(ST,A^*)$ | ۱/۲۷۲ | ۰/۷۶۷ | ۰/۴۴ | ۱/۳۶ | ۰/۴۴ | ۰/۶ | ۰/۵ | ۰/۶۵ | ۰/۷ |
| $d(WO,A^*)$ | ۱/۴۳ | ۰/۸۸۶ | ۰/۵۱ | ۰/۴۸ | ۱/۷ | ۰/۸۸۶ | ۰/۶۴۳ | ۰/۷۵ | ۰/۷۱ |
| $d(WT,A^*)$ | ۱/۴۹۷ | ۰/۵۵۶ | ۰/۸۲ | ۰/۵۲ | ۰/۵۱ | ۰/۶ | ۰/۵ | ۰/۵۱ | ۰/۷۹ |
| $d(SO,A^-)$ | ۰/۸۴۸ | ۰/۶ | ۰/۸۳ | ۱ | ۱/۳۹ | ۰/۳۱۴ | ۰/۵ | ۰/۶۵ | ۰/۶۹ |
| $d(ST,A^-)$ | ۰/۳۸۸ | ۰/۴۳۳ | ۱ | ۰/۲۴. | ۱/۵۶ | ۰/۶ | ۰/۵ | ۰/۶۵ | ۰/۷ |
| $d(WO,A^-)$ | ۰/۲۳ | ۰/۳۱۴ | ۰/۹۳ | ۱/۱۲ | ۳ | ۰/۳۱۴ | ۰/۳۵۷ | ۰/۵۵ | ۰/۶۹ |
| $d(WT,A^-)$ | ۰/۱۶۳ | ۰/۶۴۴ | ۰/۶۲ | ۱/۰۸ | ۱/۴۹ | ۰/۶ | ۰/۵ | ۰/۷۹ | ۰/۶۱ |
| $\alpha=0/25$ | | | | | | | | | |
| $d(SO,A^*)$ | ۰/۹۰۳ | ۰/۶۱۱ | ۰/۶۰۷ | ۰/۶۱۷ | ۰/۶۱۷ | ۰/۸۷۳ | ۰/۵۳۲ | ۰/۶۵۲ | ۰/۷۲۷ |
| $d(ST,A^*)$ | ۱/۳۱۳ | ۰/۷۹۳ | ۰/۴۲۵ | ۱/۳۷۲ | ۰/۴۳۶ | ۰/۶۲۲ | ۰/۵۳۴ | ۰/۶۴۱ | ۰/۷۰۲ |
| $d(WO,A^*)$ | ۱/۴۵۴ | ۰/۸۸۲ | ۰/۴۹۷ | ۰/۴۹۱ | ۱/۷۰۹ | ۰/۸۸۲ | ۰/۶۶۳ | ۰/۷۶۱ | ۰/۷۱۹ |
| $d(WT,A^*)$ | ۱/۵۰۹ | ۰/۵۷۴ | ۰/۸۲۵ | ۰/۵۴ | ۰/۵۱۹ | ۰/۶۱۱ | ۰/۵۳۸ | ۰/۵۰۸ | ۰/۸۰۵ |
| $d(SO,A^-)$ | ۰/۷۵۷ | ۰/۵۸۹ | ۰/۸۳۳ | ۰/۹۸۳ | ۱/۳۸۳ | ۰/۳۲۸ | ۰/۴۶۸ | ۰/۶۴۸ | ۰/۶۷۳ |
| $d(ST,A^-)$ | ۰/۳۴۸ | ۰/۴۰۷ | ۱/۰۱۶ | ۰/۲۲۹ | ۱/۵۶۴ | ۰/۵۷۸ | ۰/۴۶۶ | ۰/۶۵۹ | ۰/۶۹۸ |
| $d(WO,A^-)$ | ۰/۲۰۷ | ۰/۳۱۸ | ۰/۹۴۳ | ۱/۱۰۹ | ۰/۲۹۱ | ۰/۳۱۸ | ۰/۳۳۷ | ۰/۵۳۹ | ۰/۶۸۱ |
| $d(WT,A^-)$ | ۰/۱۵۱ | ۰/۶۲۶ | ۰/۶۱۵ | ۱/۰۶ | ۱/۴۸۱ | ۰/۵۸۹ | ۰/۴۶۲ | ۰/۷۹۲ | ۰/۵۹۵ |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha = 0/5$ | | | | | | | | | |
| $d(SO, A^*)$ | ۰/۹۹۴ | ۰/۶۲۲ | ۰/۶۰۵ | ۰/۶۳۴ | ۰/۶۲۴ | ۰/۸۵۹ | ۰/۵۶۵ | ۰/۶۵۴ | ۰/۷۴۴ |
| $d(ST, A^*)$ | ۱/۳۵۳ | ۰/۸۱۹ | ۰/۴۰۹ | ۱/۳۸۳ | ۰/۴۳۳ | ۰/۶۴۵ | ۰/۵۶۹ | ۰/۶۳۳ | ۰/۷۰۴ |
| $d(WO, A^*)$ | ۱/۴۷۷ | ۰/۸۷۹ | ۰/۴۸۴ | ۰/۵۰۳ | ۱/۷۱۸ | ۰/۸۷۹ | ۰/۶۸۳ | ۰/۷۷۲ | ۰/۷۲۸ |
| $d(WT, A^*)$ | ۱/۵۲۲ | ۰/۵۹۲ | ۰/۸۳۰ | ۰/۵۶۱ | ۰/۵۲۸ | ۰/۶۲۲ | ۰/۵۷۶ | ۰/۵۰۷ | ۰/۸۲۰ |
| $d(SO, A^-)$ | ۰/۶۶۶ | ۰/۵۷۸ | ۰/۸۳۵ | ۰/۹۶۶ | ۱/۳۷۶ | ۰/۳۴۱ | ۰/۴۳۶ | ۰/۶۴۶ | ۰/۶۵۶ |
| $d(ST, A^-)$ | ۰/۳۰۷ | ۰/۳۸۲ | ۱/۰۳۱ | ۰/۲۱۷ | ۱/۵۶۸ | ۰/۵۵۶ | ۰/۴۳۲ | ۰/۶۶۸ | ۰/۶۹۷ |
| $d(WO, A^-)$ | ۰/۱۸۳ | ۰/۳۲۲ | ۰/۹۵۶ | ۱/۰۹۸ | ۰/۲۸۲ | ۰/۳۲۲ | ۰/۳۱۷ | ۰/۵۲۸ | ۰/۶۷۲ |
| $d(WT, A^-)$ | ۰/۱۳۸ | ۰/۶۰۸ | ۰/۶۱۱ | ۱/۰۴ | ۱/۴۷۲ | ۰/۵۷۸ | ۰/۴۲۴ | ۰/۷۹۳ | ۰/۵۸۰ |
| $\alpha = 0/75$ | | | | | | | | | |
| $d(SO, A^*)$ | ۱/۰۸۵ | ۰/۶۳۳ | ۰/۶۰۲ | ۰/۶۵۱ | ۰/۶۳۱ | ۰/۸۴۶ | ۰/۵۹۷ | ۰/۶۵۶ | ۰/۷۶۱ |
| $d(ST, A^*)$ | ۱/۳۹۴ | ۰/۸۴۴ | ۰/۳۹۴ | ۱/۳۹۵ | ۰/۴۲۹ | ۰/۶۶۷ | ۰/۶۰۳ | ۰/۶۲۴ | ۰/۷۰۵ |
| $d(WO, A^*)$ | ۱/۵۰۱ | ۰/۸۷۵ | ۰/۴۷۱ | ۰/۵۱۴ | ۱/۷۲۷ | ۰/۸۷۵ | ۰/۷۰۳ | ۰/۷۸۳ | ۰/۷۳۷ |
| $d(WT, A^*)$ | ۱/۵۳۴ | ۰/۶۱۰ | ۰/۸۳۴ | ۰/۵۸۱ | ۰/۵۳۷ | ۰/۶۳۳ | ۰/۶۱۴ | ۰/۵۰۵ | ۰/۸۳۵ |
| $d(SO, A^-)$ | ۰/۵۷۵ | ۰/۵۶۷ | ۰/۸۳۸ | ۰/۹۴۹ | ۱/۳۶۹ | ۰/۳۵۵ | ۰/۴۰۳ | ۰/۶۴۴ | ۰/۶۳۹ |
| $d(ST, A^-)$ | ۰/۲۶۷ | ۰/۳۵۶ | ۱/۰۴۷ | ۰/۲۰۶ | ۱/۵۷۱ | ۰/۵۳۳ | ۰/۳۹۷ | ۰/۶۷۶ | ۰/۶۹۵ |
| $d(WO, A^-)$ | ۰/۱۶۰ | ۰/۳۲۵ | ۰/۹۶۹ | ۱/۰۸۶ | ۰/۲۷۳ | ۰/۳۲۵ | ۰/۲۹۷ | ۰/۵۱۷ | ۰/۶۶۳ |
| $d(WT, A^-)$ | ۰/۱۲۶ | ۰/۵۹۰ | ۰/۶۰۶ | ۱/۰۱۹ | ۱/۴۶۳ | ۰/۵۶۷ | ۰/۳۸۶ | ۰/۷۹۵ | ۰/۵۶۵ |
| $\alpha = 1$ | | | | | | | | | |
| $d(SO, A^*)$ | ۱/۱۷۷ | ۰/۶۴۴ | ۰/۶۰۰ | ۰/۶۶۹ | ۰/۶۳۹ | ۰/۸۳۲ | ۰/۶۲۹ | ۰/۶۵۹ | ۰/۷۷۸ |
| $d(ST, A^*)$ | ۱/۴۳۴ | ۰/۸۷۰ | ۰/۳۷۸ | ۱/۴۰۶ | ۰/۴۲۵ | ۰/۶۸۹ | ۰/۶۳۷ | ۰/۶۱۵ | ۰/۷۰۷ |
| $d(WO, A^*)$ | ۱/۵۲۴ | ۰/۸۷۱ | ۰/۴۵۹ | ۰/۵۲۵ | ۱/۷۳۶ | ۰/۸۷۱ | ۰/۷۲۴ | ۰/۷۹۴ | ۰/۷۴۶ |
| $d(WT, A^*)$ | ۱/۵۴۷ | ۰/۶۲۸ | ۰/۸۳۹ | ۰/۶۰۱ | ۰/۵۴۶ | ۰/۶۴۴ | ۰/۶۵۲ | ۰/۵۰۴ | ۰/۸۵۰ |
| $d(SO, A^-)$ | ۰/۴۸۴ | ۰/۵۵۷ | ۰/۸۴۱ | ۰/۹۳۲ | ۱/۳۶۲ | ۰/۳۶۸ | ۰/۳۷۱ | ۰/۶۴۲ | ۰/۶۲۳ |
| $d(ST, A^-)$ | ۰/۲۲۶ | ۰/۳۳۰ | ۱/۰۶۲ | ۰/۱۹۴ | ۱/۵۷۵ | ۰/۵۱۱ | ۰/۳۶۳ | ۰/۶۸۵ | ۰/۶۹۳ |
| $d(WO, A^-)$ | ۰/۱۳۶ | ۰/۳۲۹ | ۰/۹۸۲ | ۱/۰۷۵ | ۰/۲۶۴ | ۰/۳۲۹ | ۰/۲۷۷ | ۰/۵۰۷ | ۰/۶۵۵ |
| $d(WT, A^-)$ | ۰/۱۱۴ | ۰/۵۷۳ | ۰/۶۰۱ | ۰/۹۹۹ | ۱/۴۵۴ | ۰/۵۵۷ | ۰/۳۴۸ | ۰/۷۹۷ | ۰/۵۵ |

**جدول ۵:** محاسبه فاصله هر گزینه از حل ایده‌آل فازی و حل ضد-ایده‌آل فازی به ازای $\alpha$ های مختلف

| | مقدار$CC$ | | | | | رتبه بندی | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $SO$ | $ST$ | $WO$ | $WT$ | | SO | ST | WO | WT |
| ۰ | ۰/۵۳۳ | ۰/۴۷۴ | ۰/۳۷۵ | ۰/۵۰۸ | | ۱ | ۳ | ۴ | ۲ |
| ۰/۲۵ | ۰/۵۲۰ | ۰/۴۶۶ | ۰/۳۷۰ | ۰/۴۹۸ | | ۱ | ۳ | ۴ | ۲ |
| ۰/۵ | ۰/۵۰۸ | ۰/۴۵۷ | ۰/۳۶۶ | ۰/۴۸۸ | | ۱ | ۳ | ۴ | ۲ |
| ۰/۷۵ | ۰/۴۹۵ | ۰/۴۴۹ | ۰/۳۶۱ | ۰/۴۷۸ | | ۱ | ۳ | ۴ | ۲ |
| ۱ | ۰/۴۸۳ | ۰/۴۴۱ | ۰/۳۵۶ | ۰/۴۶۸ | | ۱ | ۳ | ۴ | ۲ |

**جدول ٦:** محاسبه شاخص ضریب نزدیکی هر گزینه و رتبه‌بندی گزینه‌ها به ازای $\alpha$ های معین

## ۵ نتیجه‌گیری

اکثر مطالعات موجود در مسایل تصمیم‌گیری مساله را در محیطی از داده‌های قطعی فرض نموده است. اما در بعضی حالات مشاهده می‌شود که تعیین مقادیر دقیق برای معیارها مشکل می‌باشد و می‌بایست مقادیر به صورت فازی منظور گردد. در این مقاله، ما گزینه‌ها موجود را در محیطی فازی و با توجه به تئوری مجموعه‌های فازی مورد ارزیابی قرار داده‌ایم. متغیرهای گفتاری به صورت اعداد فازی برای ارزیابی نرخ ها و اوزان فاکتورها استفاده گردیده، آنگاه بر اساس مفاهیم TOPSIS در مسایل تصمیم‌گیری چند معیاره گروهی، ما حل ایده‌آل فازی و حل ضد ایده‌آل فازی را تعریف کرده، و سپس با توجه به رویکرد رتبه‌بندی اعداد فازی فاصله بین دو عدد فازی را محاسبه می‌گردد. در نهایت، شاخص ضریب نزدیکی هر گزینه محاسبه گردیده تا بر اساس آن گزینه مناسب انتخاب گردد.

روش فازی ارایه شده بسیار ساده و انعطاف پذیر می‌باشد، بدین منظور می‌توان از این روش برای سایر مسایل تصمیم‌گیری در حوزه مدیریت استفاده گردد.

## منابع


[1] Hwang C.L., Yoon K., Multiple Attribute Decision Making: Methods and Application, Springer, New York, (1981).

[2] Bellman R.E., Zadeh L.A., Decision-making in a fuzzy environment, Management Sciences 17, 141–164, (1970).

[3] Boender C.G.E., Graan J.G. de, Lootsma F.A., Multi-attribute decision analysis with fuzzy pairwise comparisons, Fuzzy Sets and Systems 29, 133–143, (1989).

[4] Chen C.T., Extensions to the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment, Fuzzy Sets and Systems 114, 1–9, (2000).

[5] Chen S.J., Hwang C.L., Fuzzy multiple attribute decision making methods and application, in: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, New York, (1992).

[6] Hsu H.M., Chen C.T., Aggregation of fuzzy opinions under group decision making, Fuzzy Sets and Systems 79, 279–285, (1996).

[7] H.M. Hsu, C.T. Chen, Fuzzy credibility relation method for multiple criteria decision-making problems, Information Sciences 96, 79–91, (1997).

[8] Jain R., A procedure for multi-aspect decision making using fuzzy sets, The International Journal of Systems Sciences 8, 1–7, (1978).

[9] Kacprzyk J., Fedrizzi M., Nurmi H., Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority, Fuzzy Sets and Systems 49, 21–31, (1992).

[10] Liang G.S., Fuzzy MCDM based on ideal and anti-ideal concepts, European Journal of Operational Research 112, 682–691, (1999).

[11] Nurmi H., Approaches to collect decision making with fuzzy preference relations, Fuzzy Sets and Systems 6, 249–259, (1981).

[12] Raj P.A., Kumar D.N., Ranking alternatives with fuzzy weights using maximizing set and minimizing set, Fuzzy Sets and Systems 105, 365–375, (1999).

[13] Tsaur S.H., Chang T.Y., Yen C.H., The evaluation of airline service quality by fuzzy MCDM, Tourism Management 23 (2002) 107–115.

[14] T. Tanino, Fuzzy preference in group decision making, Fuzzy Sets and Systems 12, 117–131, (1984).

[15] Wang Y.J., Lee H.S., Lin K., Fuzzy TOPSIS for multi-criteria decision-making, International Mathematical Journal 3, 367–379, (2003).

[16] Zimmermann H.J., Fuzzy Set Theory and its Applications, fourth ed. Springer, New York, (2005).

[17] Klir G.J., Yuan B., Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications. Prentice-Hall Inc., USA, (1995).

[18] Dubois D., Prade H., Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press Inc., New York, (1980).

[19] Bortolan G., Degani R., A review of some methods for ranking fuzzy subsets, Fuzzy Sets and Systems 15, 1–19, (1985).
[20] Wang X., Kerre E., Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I), Fuzzy Sets and Systems 118, 375–385, (2001).
[21] Wang X., Kerre E., Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II), Fuzzy Sets and Systems 118, 387–405, (2001).
[22] Saade J., Schwarzlander H., Ordering fuzzy sets over the real line: an approach based on decision making under uncertainty, Fuzzy Sets and Systems 50, 237–246, (1992).
[23] Tran L., Duckstein L., Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measure, Fuzzy Sets and Systems 130, 331–341, (2002).
[24] Yao J.-S., Wu K. Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance, Fuzzy Sets and Systems 116, 275–288, (2000).
[25] Chen C.-T., Lin C.-T., Huang S.-F., A fuzzy approach for supplier evaluation and selection in supply chain management, International Journal of Production Economics 102, 289–301, (2006).