

بهینه سازی تابع هدف خطی با توجه به محدودیت های معادلات فازی با عملگر Yager's union

محمد خوینی^{۱*}، اسماعیل خرم^۲

^۱ دانشکده علوم، دانشگاه رازی کرمانشاه

^۲ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

در این مقاله، یک مدل بهینه سازی با یک تابع هدف خطی با توجه به یک دستگاه معادلات رابطه فازی ارائه می شود. مجموعه جواب این قبیل از معادلات رابطه فازی، یک مجموعه غیر محدب است. در این مقاله، ابتدا روی مجموعه جواب شدنی بحث می کنیم و سپس به مساله بهینه سازی یک تابع هدف خطی می پردازیم که برای حل این مساله، ابتدا آن را به یک مساله برنامه ریزی صحیح ۰-۱ تبدیل کرده و سپس آن را با تکنیک شاخه و کران حل می نماییم. قضایا و لم های مورد نیاز در این مقاله بیان می شود و سرانجام به منظور روشن شدن روش ارائه شده، مثالی واقعی ارائه می شود.

کلمات کلیدی: بهینه سازی تابع هدف خطی، معادلات رابطه فازی، روش شاخه و کران، برنامه ریزی صحیح.

۱ مقدمه

Yager اجتماع مجموعه های فازی را به صورت $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x, \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x)) | x \in X\}$ تعریف کرد [۱] که در آن \tilde{A} و \tilde{B} دو مجموعه فازی و X یک مجموعه مرجع است و

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \min \left\{ 1, (\mu_{\tilde{A}}^P(x) + \mu_{\tilde{B}}^P(x))^{\frac{1}{P}} \right\}, P \geq 1$$

عملگر اجتماع وی برای $P \rightarrow \infty$ به عملگر ماکزیمم همگراست و همچنین این عملگر برای همه مقادیر P ، دارای خاصیت جابجایی و شرکت پذیری است. در این مقاله، عملگر Yager's union برای حالت خاص $P=1$ در نظر گرفته می شود.

فرض می کنیم $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ که $0 \leq a_{ij} \leq 1$ ، یک ماتریس فازی و $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ که $0 \leq b_j \leq 1$ یک بردار فازی n -بعدی باشد، آن گاه دستگاه معادلات رابطه ی فازی زیر را به وسیله ی A و b تعریف می کنیم:

$$x^T OA = b^T \quad (1)$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ ، $0 \leq x_i \leq 1$ یک بردار فازی m -بعدی و "O" عملگر Yager's union برای حالت $P=1$ است، یعنی:

$$O: \max_{i=1,2,\dots,m} \left\{ \min \{1, x_i + a_{ij}\} \right\} = b_j \quad (j=1,2,\dots,n)$$

به عبارت دیگر، ما سعی می‌کنیم یک بردار جواب $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ را با $0 \leq x_i \leq 1$ پیدا کنیم به طوری که:

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \left\{ \min \{1, x_i + a_{ij}\} \right\} = b_j \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (2)$$

حل معادلات رابطه‌ی فازی، تاکنون مورد توجه بسیاری از محققین بوده است [۱۶-۵، ۷-۲]. یکی از خصوصیات قابل توجه این گونه مسایل، مجموعه‌ی شدنی آنهاست که در حالت کلی مجموعه‌ای غیر محدب است. بنابراین روش‌های معمولی از قبیل روش سیمپلکس یا روش نقطه‌ی داخلی برای حل این گونه مسایل به کار نمی‌روند. این مشخصه نشان می‌دهد که تفاوت‌های بسیاری بین این گونه مسایل و مسایل برنامه‌ریزی خطی اولیه وجود دارد [۶].

همچنین ثابت شده است که مجموعه‌ی شدنی معادلات رابطه‌ی فازی $x^T O A = b^T$ برای بعضی از عملگرهای فازی، می‌تواند برحسب یک جواب ماکزیمم و تعداد متناهی جواب می‌نیمم تعیین شود [۲۰-۱۷، ۸، ۷، ۳]. در این مقاله ابتدا مجموعه شدنی را مشخص می‌کنیم و سپس به بهینه‌سازی یک تابع هدف خطی روی این مجموعه شدنی می‌پردازیم.

۲ آشنایی با مشخصه مجموعه شدنی

قرار می‌دهیم:

$$I = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$J = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$X = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leq x_i \leq 1, \forall i \in I\}$$

و $X[A, b^T] = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \mid x^T O A = b^T, 0 \leq x_i \leq 1\}$ را مجموعه تمام جواب‌های شدنی مساله (۱) در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱

الف) بردار $\hat{x} \in X[A, b^T]$ یک جواب ماکزیمم است هرگاه:

$$x \leq \hat{x} \quad (\forall x \in X[A, b^T])$$

ب) بردار $\check{x} \in X[A, b^T]$ یک جواب مینیمم است هرگاه از $x \leq \check{x}$ نتیجه بگیریم که:

$$x = \bar{x} \quad (\forall x \in X[A, b^T])$$

حال مساله زیر را در نظر می گیریم: (برای یک j ثابت)

$$x^T O a_j = b_j \quad (3)$$

$$\Rightarrow \max_{i \in I} \{ \min \{ \cdot, x_i + a_{ij} \} \} = b_j$$

که در آن a_j ، ستون j ام ماتریس A است.

یک بردار $x \in X$ در مساله (3) صدق می کند (یا $x \in j_{X[A, b^T]}$) اگر و تنها اگر

$$\begin{cases} \forall i \in I : \min \{ \cdot, x_i + a_{ij} \} \leq b_j & (a) \\ \exists i \in I : \min \{ \cdot, x_i + a_{ij} \} = b_j & (b) \end{cases} \quad (4)$$

تعریف ۲ فرض می کنیم:

$$I_j^> = \{ i \in I \mid a_{ij} > b_j \}$$

$$I_j^= = \{ i \in I \mid a_{ij} = b_j \}$$

$$I_j^< = \{ i \in I \mid a_{ij} < b_j \}$$

و همچنین تعریف می کنیم:

$$J_{>} = \{ j \in J \mid b_j < \cdot, I_j^> \neq \emptyset \}$$

$$J_{<} = \{ j \in J \mid b_j < \cdot, I_j^> = \emptyset, I_j^< \neq \emptyset \}$$

$$J_{=} = \{ j \in J \mid b_j < \cdot, I_j^> = I_j^< = \emptyset \}$$

$$J_{\leq} = \{ j \in J \mid b_j = \cdot, I_j^< \neq \emptyset \}$$

$$J_{\geq} = \{ j \in J \mid b_j = \cdot, I_j^> = \emptyset \}$$

لم ۱ اگر $j \in J$ آن گاه مساله $x^T O a_j = b_j$ نشدنی است.

اثبات: اثبات واضح است.

لم ۲ فرض می کنیم $x^T O a_j = b_j$ و $j \in J_{<} \cup J_{>}$. بردار $x \in X$ جواب شدنی است اگر و تنها اگر

$$\text{If } j \in J_{<} \Rightarrow \begin{cases} \forall i \in I_j^< : x_i = \cdot \\ \forall i \in I_j^> : x_i \leq b_j - a_{ij} \end{cases}$$

و

$$\text{If } j \in J_r \Rightarrow \begin{cases} \forall i \in I_j^r = I : x_i \leq b_j - a_{ij} \\ \exists i \in I_j^r = I : x_i = b_j - a_{ij} \end{cases}$$

اثبات: اثبات با توجه به روابط (a) و (b) به دست می آید.

لم ۳ فرض می کنیم که در مساله (۳)، $j \in J_r$ باشد. در این صورت بردارهای $j_{\bar{x}}$ و $j_{\bar{x}}$ که به صورت زیر تعریف می شوند، به ترتیب جواب های ماکزیمم و می نیمم مساله (۳) هستند:

$$\forall i \in I : j_{\bar{x}_i} = \begin{cases} b_j - a_{ij} & , i \in I_j^r \\ 0 & , i \in I_j^c \end{cases} \quad \text{که در آن } j_{\bar{x}} = (j_{\bar{x}_1}, j_{\bar{x}_2}, \dots, j_{\bar{x}_m})^T$$

و

$$\forall i \in I : j_{\bar{x}_i} = 0 \quad \text{که در آن } j_{\bar{x}} = (j_{\bar{x}_1}, j_{\bar{x}_2}, \dots, j_{\bar{x}_m})^T$$

اثبات: اثبات با توجه به رابطه (۶) در لم (۲) و تعریف (۱) به دست می آید.

لم ۴ فرض می کنیم که در مساله (۳)، $j \in J_r$ باشد، در این صورت بردار $j_{\bar{x}}$ و بردارهای $j_{\bar{x}(i)}$ ($\forall i \in I = I_j^r$) که به صورت زیر تعریف می شوند، به ترتیب جواب ماکزیمم و جواب های می نیمم مساله (۳) هستند:

$$\forall i \in I = I_j^r : j_{\bar{x}_i} = b_j - a_{ij} \quad \text{که در آن } j_{\bar{x}} = (j_{\bar{x}_1}, j_{\bar{x}_2}, \dots, j_{\bar{x}_m})^T$$

و به ازای هر $i \in I = I_j^r$:

$$j_{\bar{x}(i)} = (j_{\bar{x}(i)_1}, j_{\bar{x}(i)_2}, \dots, j_{\bar{x}(i)_m})^T \quad \text{که در آن}$$

$$\forall k \in I = I_j^r : j_{\bar{x}(i)_k} = \begin{cases} b_j - a_{ij} & , k = i \\ 0 & , k \neq i \end{cases}$$

اثبات: اثبات با توجه به رابطه (۷) در لم (۲) و تعریف (۱) به دست می آید.

لم ۵ مساله (۳) را در نظر می گیریم.

الف) اگر $j \in J_i$ آن گاه هر بردار $x \in X$ یک جواب شدنی مساله (۳) است.

ب) اگر $j \in J_o$ آن گاه هر بردار $x \in X$ یک جواب شدنی مساله (۳) است اگر و تنها اگر

$$\exists i \in I_j^r : x_i \geq 1 - a_{ij}$$

اثبات: اثبات با توجه به روابط (a) و (b) به دست می آید.

لم ۶ مساله (۳) را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که $j \in J_i$ باشد. در این صورت بردارهای $j_{\bar{x}}$ و $j_{\bar{x}}$ که به صورت زیر تعریف می شوند، به ترتیب جواب ماکزیمم و جواب می نیمم مساله (۳) هستند:

$$j_{\bar{x}} = (j_{\bar{x}_1}, j_{\bar{x}_2}, \dots, j_{\bar{x}_m})^T \quad \text{که در آن} \quad \forall i \in I = I_j^{\downarrow} \cup I_j^{\uparrow} : j_{\bar{x}_i} = 1$$

و

$$\forall i \in I = I_j^{\downarrow} \cup I_j^{\uparrow} : j_{\bar{x}_i} = 0 \quad \text{که در آن} \quad j_{\bar{x}} = (j_{\bar{x}_1}, j_{\bar{x}_2}, \dots, j_{\bar{x}_m})^T$$

اثبات: اثبات با توجه به قسمت (الف) در لم (۵) و تعریف (۱) به دست می‌آید.

لم ۷ مسأله (۳) را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $j \in J_0$ باشد. در این صورت بردار $j_{\bar{x}}$ و بردارهای $j_{\bar{x}(i)}$ ($\forall i \in I = I_j^{\uparrow}$) که به صورت زیر تعریف می‌شوند، به ترتیب جواب ماکزیمم و جواب های می‌نیمم مسأله (۳) هستند:

$$\forall i \in I = I_j^{\uparrow} : j_{\bar{x}_i} = 1 \quad \text{که در آن} \quad j_{\bar{x}} = (j_{\bar{x}_1}, j_{\bar{x}_2}, \dots, j_{\bar{x}_m})^T$$

و به ازای هر $i \in I = I_j^{\downarrow}$:

$$j_{\bar{x}(i)} = (j_{\bar{x}(i)_1}, j_{\bar{x}(i)_2}, \dots, j_{\bar{x}(i)_m})^T \quad \text{که در آن}$$

$$\forall k \in I = I_j^{\downarrow} : j_{\bar{x}(i)_k} = \begin{cases} 1 - a_{ij}, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

اثبات: اثبات با توجه به قسمت (ب) در لم (۵) و تعریف (۱) به دست می‌آید.

قضیه ۱ مسأله (۳) را در نظر می‌گیریم که در آن $j \notin J_1$.

فرض می‌کنیم $J_{X[A, b^T]} = \{x \in X \mid x^T O a_j = b_j\}$ آن گاه:

$$J_{X[A, b^T]} = \bigcup_{i \in I = I_j^{\downarrow} \cup I_j^{\uparrow}} [j_{\bar{x}(i)}, j_{\bar{x}}]$$

اثبات: به اثبات قضیه (۱) در [۱۷] مراجعه شود.

۳ مشخص سازی مجموعه شدنی

تعریف ۳ فرض می‌کنیم $I_j = I_{j_1}^{\uparrow} \times I_{j_2}^{\uparrow} \times \dots \times I_{j_m}^{\uparrow}$ که در آن $j_1 < j_2 < \dots < j_m$

$$m \leq n \quad \text{و} \quad j_1, j_2, \dots, j_m \in J_{\uparrow} \cup J_0$$

بردار m -بعدی $e = (e(j_1), e(j_2), \dots, e(j_m))$ را تعریف می‌کنیم به طوری که:

$$(I_j^{\uparrow} = I \text{ گاه } j, j \in J_{\uparrow} \cup J_0 \text{ وقتی})$$

$$e(j_i) \in I_{j_i}^{\uparrow}$$

تعریف ۴ تعریف می‌کنیم:

$$\hat{x} = \min_{j \in J} \{j_{\bar{x}}\}$$

اکنون بردار m -بعدی $e_x = ((e_x)_1, (e_x)_2, \dots, (e_x)_m)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall i \in I: (e_x)_i = \begin{cases} \max_{j \in J_e(i)} \{b_j - a_{ij}\} & , J_e(i) \neq \emptyset \\ \cdot & , J_e(i) = \emptyset \end{cases}$$

که در آن $J_e(i) = \{j \in J_+ \cup J_0 \mid e(j) = i\}$. همچنین فرض می کنیم:

$$\bar{X} = \{e_x \mid e \in I_J\}$$

$$X[A, b^T] \subseteq \bar{X} \quad \text{نتیجه ۱}$$

اثبات: اثبات واضح است.

تعریف ۵ ماتریس \tilde{A} یک ماتریس هم ارز با ماتریس A گفته می شود اگر و تنها اگر

$$X[\tilde{A}, \tilde{b}^T] = X[A, b^T]$$

به طور مشابه، مسأله $x^T O\tilde{A} = \tilde{b}^T$ یک مسأله هم ارز با مسأله $x^T OA = b^T$ گفته می شود اگر و تنها اگر ماتریس \tilde{A} یک ماتریس هم ارز با ماتریس A باشد.

تعریف ۶ فرض می کنیم که معادلات رابطه فازی $x^T OA = b^T$ داده شده اند.

ماتریس A_1 که با حذف ستون های a_j به ازای هر $j \in J_+$ از ماتریس A به دست می آید را تعریف می کنیم. و همچنین بردار $b_{(1)}$ را تعریف می کنیم که از حذف مولفه b_j به ازای هر $j \in J_+$ از بردار b به دست می آید.

قضیه ۲ مسأله $x^T OA_1 = b_{(1)}^T$ با مسأله $x^T OA = b^T$ هم ارز است.

اثبات: اثبات واضح است.

تعریف ۷ مجموعه I' را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$I' = \{i \in I \mid i \in I_j^+, j \in J_+ \text{ in } A_1\}$$

که در آن ماتریس A_1 از تعریف (۶) به دست آمده است.

قضیه ۳ فرض می کنیم $X[A_1, b_{(1)}^T] \neq \emptyset$ و $J_+ \neq \emptyset$. آن گاه داریم:

$$\forall x \in X[A, b^T], \forall i \in I': x_i = \cdot$$

اثبات: اثبات با توجه به لم (۲) به دست می آید.

تعریف ۸ معادلات رابطه فازی $x^T OA_1 = b_{(1)}^T$ را در نظر می گیریم.

اکنون ماتریس A_1 را از روی ماتریس A_1 به صورت زیر می سازیم:

بنابر قضیه (۳) برای هر $x \in X[A_1, b_{(1)}^T]$ و هر $i \in I'$ قرار می‌دهیم:

$$x_i = 0$$

وسطر i ام را از ماتریس A_1 حذف می‌کنیم و به این ترتیب ماتریس A_1 به دست می‌آید.

لم ۸ اگر در ماتریس A_1 ، $j \in J_+$ یا $j \in J_0$ باشد آن گاه در ماتریس A_1 نیز به ترتیب $j \in J_+$ یا $j \in J_0$ است.

اثبات: اثبات واضح است.

قضیه ۴ مساله $x^T O A_1 = b_{(1)}^T$ و ماتریس A_1 که از تعریف (۸) به دست می‌آید را در نظر می‌گیریم. اگر در ماتریس A_1 ، $j \in J_+$ و در ماتریس A_1 ، $j \in J_+$ باشد آن گاه ماتریس‌های A_1 و A_1 هم ارز نیستند.
اثبات: اثبات با توجه به لم‌های (۲) و (۸)، تعاریف (۵) و (۸) و قضیه (۳) به دست می‌آید.

قضیه ۵ مساله $x^T O A_1 = b_{(1)}^T$ و ماتریس A_1 که از تعریف (۸) به دست می‌آید را در نظر می‌گیریم. اگر در ماتریس A_1 ، $j \in J_+$ و در ماتریس A_1 نیز $j \in J_+$ باشد آن گاه ماتریس‌های A_1 و A_1 هم ارز هستند.
اثبات: اثبات با توجه به لم‌های (۲) و (۸)، تعاریف (۵) و (۸)، قضیه (۳) و نتیجه (۱) به دست می‌آید.

تعریف ۹ مساله $x^T O A_1 = b_{(1)}^T$ را در نظر می‌گیریم.

اکنون ماتریس A_1 را از روی ماتریس A_1 ، با حذف هر ستون a_j از آن که $j \in J_+$ است، به دست می‌آوریم. از طرفی $j \in J_+$ در ماتریس A_1 همان $j \in J_+$ در ماتریس A_1 است که i امین مولفه آن به ازای هر $i \in I_j^+$ بنابر تعریف (۸) حذف شده است.

قضیه ۶ مسایل $x^T O A_1 = b_{(1)}^T$ و $x^T O A_1 = b_{(1)}^T$ را در نظر می‌گیریم به طوری که ماتریس A_1 از تعریف (۹) به دست می‌آید و بردار $b_{(1)}$ از بردار $b_{(1)}$ با حذف مولفه b_j برای هر $j \in J_+$ به دست می‌آید. فرض می‌کنیم که \hat{x} جواب ماکزیمم مجموعه $X[A_1, b_{(1)}^T]$ باشد. اگر \hat{x} را جواب ماکزیمم مجموعه $X[A_1, b_{(1)}^T]$ نیز در نظر بگیریم آن گاه ماتریس‌های A_1 و A_1 هم ارز هستند.
اثبات: اثبات با توجه به تعاریف (۴) و (۵) و نتیجه (۱) به دست می‌آید.

تعریف ۱۰ مساله $x^T O A_1 = b_{(1)}^T$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که \hat{x} جواب ماکزیمم مجموعه $X[A_1, b_{(1)}^T]$ باشد. (همان جواب ماکزیمم مجموعه $X[A_1, b_{(1)}^T]$ که از تعریف (۴) به دست آمده است). قرار می‌دهیم:

$$\forall j \in J_+ \cup J_0 : I_j^* = \{i \in \bar{I} \mid \hat{x}_i < b_j - a_{ij}\}$$

که در آن مجموعه \bar{I} ، نشان دهنده تعداد سطرهای ماتریس A_1 است.

اکنون ماتریس A_i را از روی ماتریس A_r به صورت زیر می سازیم:
 برای هر $i \in I_j^*$ ، در ماتریس A_r به جای a_{ij} علامت * قرار می دهیم.

تعریف ۱۱ فرض می کنیم:

is the minimum solution of the set $I_j^m(k) = \left\{ i \in \bar{I} \mid j_{\bar{x}(i)} \in J_{X[A_k, b_{(v)}^T]} \right\}$

برای هر $k = ۳, ۴$ و $j \in J_r \cup J_0$.

که در آن $j_{\bar{x}(i)}$ ، برای هر $j \in J_r$ و هر $j \in J_0$ به ترتیب از لم های (۴) و (۷) به دست می آید.

قضیه ۷ فرض می کنیم که \bar{x} جواب ماکزیمم مجموعه $X[A_r, b_{(v)}^T]$ باشد و همچنین فرض می کنیم برای حداقل یک $i \in I_j^*$ ، $j \in J_r \cup J_0$ باشد.

از طرفی بردار $e \in I_j$ را در نظر می گیریم به طوری که:

$$e(j) = i$$

آن گاه داریم:

$$(e_x)_i > \hat{x}_i$$

که در آن $(e_x)_i$ ، i امین مولفه بردار e_x است که از تعریف (۴) به دست می آید.

اثبات: اثبات با توجه به تعریف (۴) به دست می آید.

تعریف ۱۲ مجموعه های \bar{X}_F و \bar{X}_L را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{X}_F = \bar{X} - \bar{X}_L \quad \& \quad \bar{X}_L = \{e_x \in \bar{X} \mid e_x \not\leq \hat{x}\}$$

$$X[A_r, b_{(v)}^T] = \bigcup_{e_x \in \bar{X}_F} [e_x, \hat{x}] \quad \text{قضیه ۸}$$

اثبات: اثبات با توجه به تعاریف (۱) و (۴) و (۱۲) به دست می آید.

قضیه ۹ اگر برای هر $j \in J_r \cup J_0$ تعریف کنیم:

$$I_j^m(\xi) = I_j^m(۳) - I_j^* = \bar{I} - I_j^*$$

آن گاه داریم:

$$X[A_r, b_{(v)}^T] = X[A_i, b_{(v)}^T]$$

اثبات: اثبات با توجه به قضایای (۸) و (۹) به دست می آید.

مساله زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = f(x) = \sum_{i=1}^m c_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & x^T O A = b^T \\ & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T \in \mathbb{R}^m$ یک بردار m -بعدی است به طوری که c_i وزن (یا هزینه) نسبت داده شده به متغیر x_i برای $i = 1, 2, \dots, m$ را نشان می دهد.

۴ اثر بردار هزینه

فرض می کنیم که $X[A, b^T] \neq \emptyset$ و $J_\gamma \cup J_\delta = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ آن گاه مجموعه Λ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Lambda = (\bar{I} - I_{j_1}^*) \times (\bar{I} - I_{j_2}^*) \times \dots \times (\bar{I} - I_{j_m}^*) = I_{j_1} \times I_{j_2} \times \dots \times I_{j_m}$$

که در آن مجموعه \bar{I} تعداد سطرهای ماتریس A_γ تعریف می شود و همچنین $j_1 < j_2 < \dots < j_m$ ، $m \leq n$ و $m = \text{card}(J_\gamma \cup J_\delta)$.

فرض می کنیم $(\forall j_i \in J_\gamma \cup J_\delta, i = 1, 2, \dots, m)$ $I_i = I_{j_i} = \bar{I} - I_{j_i}^*$ آن گاه $\Lambda = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_m$. حال فرض می کنیم ماتریس A به ماتریس A_γ و بردار b به بردار $b_{(\gamma)}$ تبدیل شده باشند، می خواهیم مساله زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \sum_{i=1}^{\text{card}(\bar{I})} c_{(i)} x_i \\ \text{s.t.} \quad & x^T O A_\gamma = b_{(\gamma)}^T \\ & x_i \in [0, 1] \quad (\forall i \in \bar{I}) \end{aligned} \quad (6)$$

پس داریم:

$$X[A, b^T] = X[A, b_{(\gamma)}^T] = X[A_\gamma, b_{(\gamma)}^T] = X[A_\gamma, b_{(\gamma)}^T] \quad (7)$$

حال اگر $X[A, b^T] \neq \emptyset$ ، دو لم زیر را خواهیم داشت:

لم ۹ اگر $\forall i \in \bar{I} : c_{(i)} \leq 0$ آن گاه بردار $\hat{x} = (\hat{x}_i) \quad (\forall i \in \bar{I})$ یک جواب بهینه برای مساله (۶) است. در این صورت بردار $\hat{x} = (\hat{x}_i) \quad (\forall i \in I)$ یک جواب بهینه برای مساله (۵) خواهد بود.

اثبات: اثبات واضح است.

لم ۱۰ اگر $\forall i \in \bar{I} : c_{(i)} \geq 0$ آن گاه یکی از جواب های می نیمم، مانند بردار $\check{x} = (\check{x}_i^*) \quad (\forall i \in \bar{I})$ ، یک جواب بهینه برای مساله (۶) است. در این صورت بردار $\check{x} = (\check{x}_i^*) \quad (\forall i \in I)$ یک جواب بهینه برای مساله (۵) خواهد بود.

اثبات: اثبات با توجه به قضیه (۸) به دست می آید.

اکنون حالت کلی زیر را در نظر می گیریم:

برای هر بردار هزینه $c_{(i)} = (c_{(i)})$ ($\forall i \in \bar{I}$)، بردارهای $c'_{(i)} = (c'_{(i)})$ ($\forall i \in \bar{I}$) و $c''_{(i)} = (c''_{(i)})$ ($\forall i \in \bar{I}$) را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall i \in \bar{I} : c'_{(i)} = \begin{cases} c_{(i)} & , \text{if } c_{(i)} \geq 0 \\ 0 & , \text{if } c_{(i)} < 0 \end{cases}$$

$$\forall i \in \bar{I} : c''_{(i)} = \begin{cases} 0 & , \text{if } c_{(i)} \geq 0 \\ c_{(i)} & , \text{if } c_{(i)} < 0 \end{cases}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$c_{(i)} = c'_{(i)} + c''_{(i)} \quad , \quad c'_{(i)} \geq 0 \quad , \quad c''_{(i)} \leq 0$$

اکنون دو مساله زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} c'_{(i)} x_i \\ \text{s.t.} \quad & x^T OA_r = b_{(r)}^T \\ & x_i \in [0, 1] \quad (\forall i \in \bar{I}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{card(\bar{I})} c''_{(i)} x_i \\ \text{s.t.} \quad & x^T OA_r = b_{(r)}^T \\ & x_i \in [0, 1] \quad (\forall i \in \bar{I}) \end{aligned} \quad (9)$$

با توجه به لم های (۹) و (۱۰) در می یابیم که بردارهای $\hat{x} = (\hat{x}_i)$ ($\forall i \in I$) و $\tilde{x}^* = (\tilde{x}_i^*)$ ($\forall i \in I$) به ترتیب جواب های ماکزیمم و می نیمم هستند.

اکنون با ترکیب جواب های \hat{x} و \tilde{x}^* ، یک جواب جدید برای مساله (۶) می سازیم:

$$\forall i \in \bar{I} : x_i^* = \begin{cases} \tilde{x}_i^* & , \text{if } c_{(i)} \geq 0 \\ \hat{x}_i & , \text{if } c_{(i)} < 0 \end{cases} \quad (10)$$

واضح است که اگر $X[A_r, b_{(r)}^T] \neq \emptyset$ آن گاه بردار x^* یک جواب بهینه برای مساله (۶) و بنابراین بردار $x^* = (x_i^*)$ ($\forall i \in I$) یک جواب بهینه برای مساله (۵) خواهد بود.

اکنون در بخش بعدی، یک مدل برنامه ریزی صحیح ۰-۱ برای حل مساله (۸) ارائه می دهیم.

۵ مسأله برنامه ریزی صحیح ۰-۱ و روش شاخه و کران

تعریف ۱۳ مجموعه Γ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Gamma = \{1, 2, \dots, \text{card}(J_{\bar{r}} \cup J_{\bar{o}})\}$$

با توجه به اینکه $\forall i \in \bar{I} : c'_{(i)} \geq 0$ ، لذا حل مسأله (۸) هم ارز است با پیدا کردن یک $e^* \in \Lambda$ به طوری که:

$$\sum_{i=1}^{\text{card}(\bar{I})} c'_{(i)} (e_x^*)_i = \min_{e \in \Lambda} \left\{ \sum_{i=1}^{\text{card}(\bar{I})} c'_{(i)} (e_x)_i \right\} \quad (11)$$

با توجه به تعریف مجموعه I_t ($\forall t \in \Gamma$)، متغیرهای x_{it} را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x_{it} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \text{ is chosen from } I_t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\forall i \in \bar{I}, \forall t \in \Gamma) \quad (12)$$

حال مسأله برنامه ریزی صحیح ۰-۱ زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \min \quad Z &= \sum_{i=1}^{\text{card}(\bar{I})} \left(c'_{(i)} \max_{t \in \Gamma} \{ (b_t - a_{it}) x_{it} \} \right) \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{\text{card}(\bar{I})} x_{it} &= 1 \quad (\forall t \in \Gamma) \\ x_{it} &= 0 \text{ or } 1 \quad (\forall i \in \bar{I}, \forall t \in \Gamma) \\ x_{it} &= 0 \quad (\forall i, t \text{ with } i \notin I_t) \end{aligned} \quad (13)$$

توجه شود که قیود (۱۳) برقرارند اگر برای هر $t \in \Gamma$ فقط یک $i \in I_t$ وجود داشته باشد به طوری که $x_{it} = 1$. بنابراین اگر $e(t) = i$ آن گاه $x_{it} = 1$ در نتیجه

$$e = (e(1), e(2), \dots, e(\text{card}(J_{\bar{r}} \cup J_{\bar{o}}))) \in \Lambda$$

بنابراین حل مسأله (۸) معادل با حل مسأله برنامه ریزی صحیح ۰-۱ است.

یک روش شاخه و کران به طور ضمنی، تمام جواب های ممکن یک مسأله برنامه ریزی صحیح را مشخص می کند. برای استفاده از این روش، ابتدا یک محدودیت را به منظور شاخه کردن مسأله اولیه به چندین زیر مسأله، انتخاب می کنیم. هر زیر مسأله به وسیله یک گره نشان داده می شود.

سپس شاخه کردن در هر گره با اضافه کردن یک محدودیت جدید انجام می شود. در نتیجه زیر مسأله های جدید، تولید شده و با گره های جدیدی نشان داده می شوند. توجه شود که هرچه محدودیت های بیشتری به یک زیر مسأله اضافه شوند، آن زیر مسأله دامنه شدنی کوچکتری پیدا خواهد کرد و مقدار هدف بهینه بزرگتری را به دست می آورد.

اگر بهترین جواب ممکن یک گره خاص، بهتر از جواب کاندید جاری نباشد آن گاه احتیاجی به شاخه کردن این گره نیست. در غیر این صورت، برای به دست آوردن یک کران جدید، شاخه کردن مورد نیاز می باشد.

۶ مثال عددی مساله (۱) را با $b = (1, 1, 0/9, 0/7)^T$ ، $c = (3, 4, -1, 5)^T$ و $A = \begin{bmatrix} 0/9 & 0/4 & 0/9 & 0/6 \\ 0/5 & 0/3 & 0/6 & 0/5 \\ 1 & 0/7 & 0/4 & 0/6 \\ 0/8 & 0/9 & 0/7 & 0/3 \end{bmatrix}$

حل نمایید.

حل:

گام ۱: در ماتریس A ، $1 \in J_4$ ، $2 \in J_5$ ، $3 \in J_7$ و $4 \in J_3$ است بنابراین در می یابیم که:

$$J_1 = \emptyset$$

اکنون به محاسبه بردار \hat{x} می پردازیم:

$$\left. \begin{aligned} 1_{\hat{x}} &= (1, 1, 1, 1)^T \\ 2_{\hat{x}} &= (1, 1, 1, 1)^T \\ 3_{\hat{x}} &= (0, 0/3, 0/5, 0/2)^T \\ 4_{\hat{x}} &= (0/1, 0/2, 0/1, 0/4)^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{x} = (0, 0/2, 0/1, 0/2)^T$$

در نتیجه داریم:

$$X[A, b^T] \neq \emptyset$$

گام ۲: ابتدا باید ماتریس A_1 را به دست آوریم.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0/4 & 0/9 & 0/6 \\ 0/3 & 0/6 & 0/5 \\ 0/7 & 0/4 & 0/6 \\ 0/9 & 0/7 & 0/3 \end{bmatrix}, \quad b_{(1)} = (1, 0/9, 0/7)^T$$

در ماتریس A_1 به دست آمده، داریم:

$$1 \in J_5, 2 \in J_7, 3 \in J_3$$

چون $I' = \{1\}$ ، لذا به ازای هر $x \in X[A_1, b_{(1)}^T]$ قرار می دهیم:

$$x_1 = 0$$

و با حذف سطر اول ماتریس A_1 ، به ماتریس A_2 دست می یابیم:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0/3 & 0/6 & 0/5 \\ 0/7 & 0/4 & 0/6 \\ 0/9 & 0/7 & 0/3 \end{bmatrix}$$

در ماتریس A_2 به دست آمده نیز، داریم:

$$1 \in J_5, 2 \in J_7, 3 \in J_3$$

اکنون با توجه به گام (۱)، جواب ماکزیمم مجموعه $X[A_2, b_{(1)}^T]$ عبارت است از:

$$\hat{x} = (0/2, 0/1, 0/2)^T$$

حال با حذف کردن ستون $2 \in J_r$ از ماتریس A_r و مولفه $b_r = 0/9$ از بردار $b_{(r)}$ ، به ترتیب به ماتریس A_r و بردار $b_{(r)}$ دست می‌یابیم:

$$A_r = \begin{bmatrix} 0/3 & 0/5 \\ 0/7 & 0/6 \\ 0/9 & 0/3 \end{bmatrix}, \quad b_{(r)} = (1, 0/7)^T$$

در ماتریس A_r به دست آمده، $1 \in J_0$ و $2 \in J_r$ است. در نتیجه مجموعه Γ عبارت است از:

$$\Gamma = \{1, 2\}$$

اکنون با استفاده از ماتریس A_r ، مجموعه‌های I_1^* و I_2^* را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} I_1^* = \{1, 2\} \\ I_2^* = \{3\} \end{cases}$$

بنابراین مجموعه‌های اندیس عبارتند از:

$$\bar{I} = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \bar{I} - I_1^* = \{3\} \\ I_2 = \bar{I} - I_2^* = \{1, 2\} \end{cases}$$

گام ۳:

$$c_{(r)} = (\xi, -1, 0)^T \Rightarrow \begin{cases} c'_{(r)} = (\xi, 0, 0)^T \\ c''_{(r)} = (0, -1, 0)^T \end{cases}$$

بنابراین مساله (۵) به صورت زیر است:

$$\min \quad \xi x_1 + 0 x_2$$

$$s.t. \quad x^T O A_r = b_{(r)}$$

$$x_i \in [0, 1] \quad (i = 1, 2, 3)$$

گام ۴:

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^r \left(c'_{(r)i} \max_{t \in \Gamma} \{ (b_t - a_{it}) x_{it} \} \right)$$

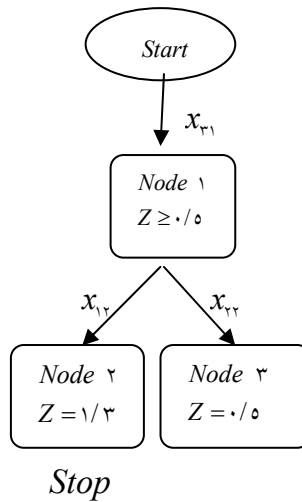
$$s.t. \quad x_{r1} = 1$$

$$x_{r2} + x_{r3} = 1$$

$$x_{it} = 0 \text{ or } 1 \quad (\forall i \in I_r)$$

(۱۴)

گام ۵:



پس نتیجه می گیریم که:

$$\begin{cases} x_{r1} = x_{r2} = 1 \\ Z = 0/5 \end{cases}$$

گام ۶:

$$e = (e(1) = 3, e(2) = 2)$$

$$\begin{cases} J_e(1) = \{t \in \Gamma | e(t) = 1\} = \emptyset \rightarrow (e_x)_1 = 0 \\ J_e(2) = \{t \in \Gamma | e(t) = 2\} = \{2\} \rightarrow (e_x)_2 = \max_{j \in J_e(2)} \{b_j - a_{rj}\} = b_2 - a_{r2} = 0/7 - 0/6 = 0/1 \\ J_e(3) = \{t \in \Gamma | e(t) = 3\} = \{1\} \rightarrow (e_x)_3 = \max_{j \in J_e(3)} \{b_j - a_{rj}\} = b_1 - a_{r1} = 1 - 0/9 = 0/1 \end{cases}$$

پس داریم:

$$e_x = (0, 0/1, 0/1)^T = \tilde{x}^*$$

در نتیجه \tilde{x}^* جواب بهینه مساله (۸) می باشد.

گام ۷:

$$\hat{x} = (0/2, 0/1, 0/2)^T \text{ و } \tilde{x}^* = (0, 0/1, 0/1)^T$$

$$x^* = (0, 0/1, 0/1)^T$$

گام ۸:

$$Z^* = 0/5 + c''_{(1)} \hat{x}_1 = 0/5 + (-1 \times 0/1) = 0/5 - 0/1 = 0/4 \Rightarrow Z^* = 0/4$$

گام ۹: توقف.

۷ نتیجه گیری

۱. به دلیل غیر محدب بودن ماهیت مجموعه شدنی مساله مورد نظر، در می یابیم که هیچ یک از روش های برنامه ریزی خطی برای حل این مساله مفید نمی باشند.
- بعد از اینکه خصوصیات مجموعه شدنی مساله (۱) را بررسی کردیم، بهترین کاری که می توانیم برای حل این مساله انجام دهیم این است که آن را به یک مساله برنامه ریزی صحیح ۰-۱ تبدیل کنیم و سپس روش شاخه و کران شناخته شده را برای پیدا کردن یکی از جواب های آن به کار ببریم.
- سوالی که هنوز تحت تحقیق و بررسی است این است که چگونه همه مجموعه جواب را تولید کنیم.
۲. دستگاه های معادلات رابطه فازی می تواند برای کاربردهای خاصی از قبیل تشخیص پزشکی [۲] مورد استفاده قرار گیرند.

منابع

- [1] H. J. Zimmermann, Fuzzy set theory and its application, kluwer Academic Publishers, Boston/ Dordrecht/ London, (1999).
- [2] G. I. Adamopoulos, C. P. Pappis, some results on the resolution of Fuzzy Relation equations, Fuzzy sets and systems 60, 83-88(1993).
- [3] E. Czogala, J. Drewniak, W. Pedrycz, Fuzzy relation equation on a finite Set, Fuzzy sets and systems 7, 89-101(1982).
- [4] K. P. Aliasing, Fuzzy set theory in medical diagnosis, IEEE Trans, Systems Man cybernet. 16, 260-265(1986).
- [5] A. Di nola, Relational equations in totally ordered lattices and their Complete resolution, Math. Appl.107, 148-155(1985).
- [6] S. C. Fang, S.Puthenpura, Linear optimization and Extensions: Theory And Algorithm, Prentice, Hall, Englewood Cliffs.NJ, (1993).
- [7] S. C. Fang, G.Li, Solving fuzzy relations equations with a linear Objective function, Fuzzy sets and systems 103, 107-113(1999).
- [8] M. Higashi, G. J. Klir, Resolution of finite fuzzy relation equations, Fuzzy Sets and systems 13, 65-82(1984).
- [9] G. Li, S. C. Fang, on the resolution of finite fuzzy relations, or report 0.322, North Carolina state university, Raleigh.North Carolina, May (1996).
- [10] M. Prevot, Algorithm for the solution of fuzzy relation, Fuzzy sets and Systems???, 319-322(1985).
- [11] H. F. Wang, An algorithm for solving iterated composite relation Equations, in: NAFIPS. pp. 242-249(1988).
- [12] P. Z. Wang, S. Sessa, A. Di Nola, and How many lower solutions does a Fuzzy relation equation have? Bull. Pour. Sons. Ens. Flous. Appl. (BUSEFAL) 18, 67-74(1984).
- [13] W. L. Winston, Introduction to Mathematical Programming: Application and Algorithms, Duxbury Press, Belmont, CA (1995).
- [14] E. Sanchez, Resolution of composite fuzzy relations equation, Inform And control 30, 38-48(1976).
- [15] S. z. Guo, P. Z. Wang, A. Di Nola, S. Sessa, Futher contributions to the Study of finite fuzzy relation equations, Fuzzy sets and systems 26, 93- 104(1988).
- [16] J. Lu, S. C. Fang, Solving nonlinear optimization problems with fuzzy Relation constraints, Fuzzy sets and systems 119, 1-20(2001).
- [17] E. Khorram, A. Ghodousian, Linear objective function optimization with fuzzy relation constraints regarding max-av composition, Applied Mathematics and Computation, doi: 10.1016/j. amc. 2005. 4.021.
- [18] A. Ghodousian, E.Khorram, An algorithm for optimizing the linear Function with fuzzy relation equation constraints regarding max-prod Composition, Applied Mathematics and Computation, doi.10. 1016/j. amc. 2005. 11. 069.

-
- [19] E. Khorram, A. Ghodousian, A. A. molai, Solving linear optimization Problems with max-star composition equation constraints, Applied Mathematics and Computation, doi: 10.1016/ j.amc. 2005.12.006.
- [20] A. Ghodousian, E. Khorram, The convex combination of max-min And max-average composition application in the linear programming Problems, Applied Mathematics and Computation, doi: 10. 1016/j.amc. 2005.12.027

