مروری بر برج هانوی و ارایه ی یک فرمول جدید

سهراب کردرستمی*، رضا احمدزاده، آرمین قانع، صادق پورجعفر
اعضای هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان

چکیده

فرض کنید تعداد $2n$ دیسک داریم به طوری که دیسک های زوج روی یک میله و دیسک های فرد روی میله دیگر به ترتیب نزولی قطرشان چیده شده اند و می خواهیم با حرکاتی نظیر حرکات برج هانوی دیسک ها را روی میله سوم مرتب کنیم. در این مقاله می خواهیم جواب بهینه ای برای انتقال دیسک ها به میله ی سوم به کمک حرکات مشهور برج هانوی بیابیم.

کلمات کلیدی: ترکیبیات، روابط بازگشتی، مسأله برج هانوی.

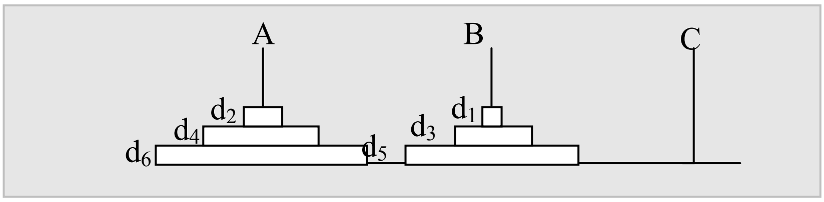
۱ مقدمه

مساله مشهور برج هانوی بیش از صد سال پیش توسط لوکاس مطرح شده است [1]. مساله از این قرار است که سه میله در اختیار داریم که n دیسک به ترتیب نزولی قطر روی یکی از این میله ها چیده شده اند و می خواهیم این دیسک ها را به یکی از دو میله دیگر منتقل کنیم البته با شرط اینکه هر بار تنها یک دیسک را جابه جا کنیم وهیچ گاه یک دیسک روی دیسک دیگر با قطر کوچکتر قرار نگیرد. با توجه به الگوریتم مشهوری که بهینگی آن به آسانی ثابت شده است [۵]؛ این کار با $h_n = 2^n - 1$ حرکت انجام می شود. اما پس از مساله مشهور برج هانوی مسایل بسیار دیگری در این زمینه مطرح و بررسی گردیده است [2]، [3]، [4]. در این مقاله به بررسی مساله ای خاص از برج هانوی می پردازیم و جواب بهینه ای برای آن به دست می آوریم.

۲ مساله ای از برج هانوی و حل آن به روش قدیم [۵]

فرض کنید $2n$ دیسک به قطرهای d_1 تا d_{2n} به طوری که $d_1<d_2<\dots<d_{2n}$ روی سه میله موجود است به طوری که دیسک های با قطر d_1، d_3، ...، d_{2n-1} روی یکی و دیسک های با قطر d_2، d_4، ...، d_{2n} روی دیگری قرار دارد(شکل زیر). چند حرکت نظیر حرکات در انتقال دیسک های برج هانوی، لازم است تا تمام دیسک ها به میله خالی منتقل شوند؟

* عهده‌دار مکاتبات(آدرس پست الکترونیکی: krostami@guilan.ac.ir)



فرض می کنیم تعداد حرکات برای $2n$ دیسک H_{2n} باشد. بنا براین با H_{2n-2} حرکت می‌توان دیسک های با قطر d_1، ...، d_{2n-2} را از روی A، B به C منتقل کرد. بنابراین روی میله A تنها دیسک با قطر d_{2n} وروی B تنها دیسک با قطر d_{2n-1} باقی مانده است. $2n-2$ دیسک واقع بر میله C را با h_{2n-2} حرکت، با استفاده از میله های A وB، به میله B منتقل می کنیم. بعد دیسک با قطر d_{2n} را از A به C که خالی است منتقل می نماییم. سپس $2n-1$ دیسک روی B را، نظیر برج هانوی، با h_{2n-1} حرکت به C منتقل می کنیم. پس:

$$H_{2n} = H_{2n-2} + h_{2n-2} + 1 + h_{2n-1}$$

که با توجه به رابطه بالا به دست می‌آوریم:

$$H_{2n} = H_{2n-2} + 3(2^{2n-2}) - 1$$

در نتیجه داریم:

$$H_{2n} - H_2 = \sum_{k=2}^{n}(3(2^{2k-2}) - 1) \quad = \frac{3}{4}\sum_{k=2}^{n} 4^k - (n-1)$$

که با استفاده از مجموع یک تصاعد هندسی با قدر نسبت ۴، نتیجه می‌دهد:

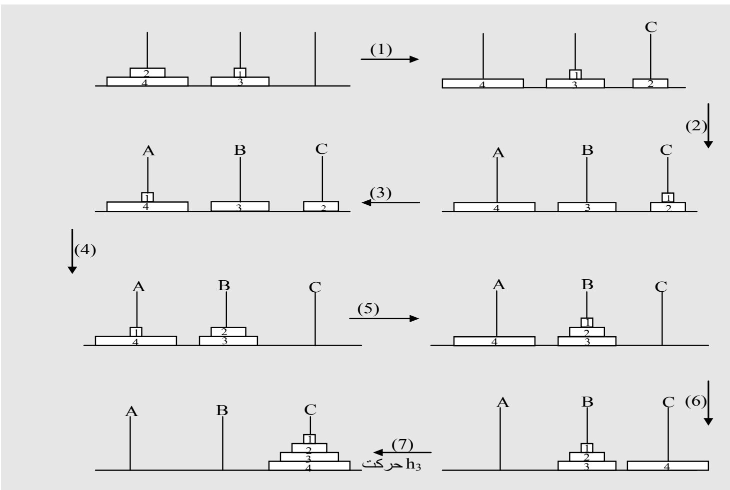
$$H_{2n} - H_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{4^{n+1}-16}{4-1}\right) - (n-1) \Rightarrow H_{2n} - H_2 = 4^n - n - 3$$

با توجه به اینکه اگر دو دیسک داشته باشیم با دو حرکت می‌توان آن ها را به میله C منتقل کرد، داریم:

$$H_{2n} = 4^n - (n+1) \qquad (۱)$$

حال با یک مثال نقض نشان می‌دهیم که راه حل فوق الذکر که نتیجه اش رابطه(۱) است، حداقل حرکات برای انتقال دیسک ها به میله سوم را به دست نمی‌دهد،

حالت n=2 را در نظر بگیرید، با توجه به حل بالا طی مراحلی که در شکل های زیر نشان داده شده است، می‌توان دیسک ها را به میله سوم منتقل نمود.

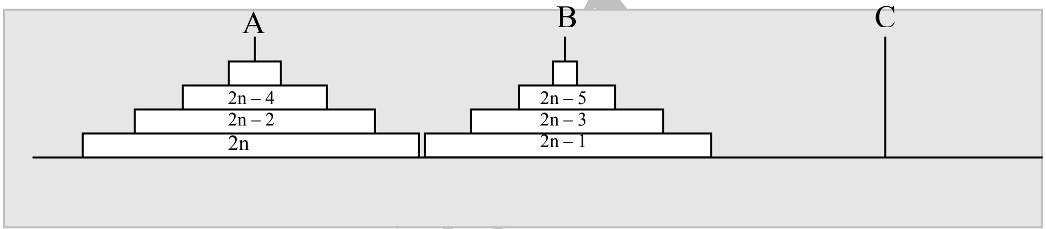


به مراحل (2) و (3) توجه کنید، در مرحله (2) دیسک 1 از میله B به میله C و در مرحله (3) دیسک 1 از میله C به میله A منتقل شده است، در حالی که می‌توانیم این دو مرحله را در یک مرحله بهینه سازی نماییم. یعنی در مرحله (2) دیسک 1 را از میله B به میله A منتقل کنیم. بنا براین با توجه به آنچه که گفته شد، نشان دادیم که H_{2n} حد اقل تعداد حرکات برای انتقال دیسک ها به میله سوم نمی باشد.

۳ ادعا

یافتن حداقل حرکات تنها زمانی میسر خواهد بودکه در وهله اول $2n-6$ دیسک را به میله C منتقل نماییم. یعنی بنا را براین بگذاریم که تعداد حرکات برای انتقال $2n-6$ دیسک به میله C را می دانیم.

اثبات: می خواهیم همه دیسک ها را به ترتیب نزولی قطرشان روی میله C مرتب کنیم. بنابر این ابتدا باید بزرگترین دیسک یعنی دیسک $2n$ام روی میله C قرار گیرد و سپس سایر دیسک ها به ترتیب روی آن قرارگیرند. اما انتقال دیسک $2n$ ام به میله C تنها زمانی امکان پذیر است که سایر دیسک ها به جز دیسک $2n$ ام روی میلهٔ B مرتب شوند.

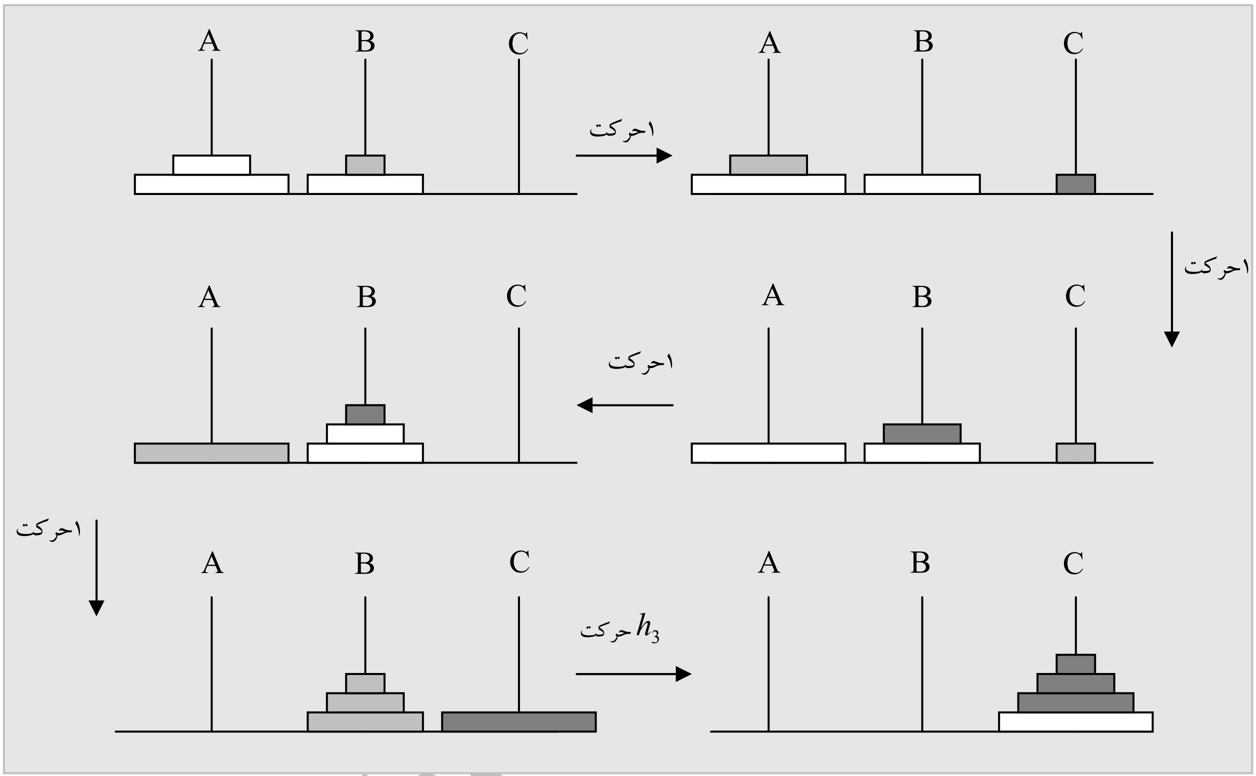


بدین منظور اولین دیسکی که باید در میله B باشد، دیسک $2n-1$ ام است که در جای خود قراردارد. و بعد از آن باید دیسک $2n-2$ روی آن قرار گیرد. اما این کار تنها زمانی صورت می گیرد که تمامی دیسک ها به جز دیسک های $2n$، $2n-1$و $2n-2$ ام را روی میله C مرتب کنیم. بدین لحاظ اولین دیسکی که باید در میله C قرار گیرد، دیسک $2n-3$ ام است که در میله B قرار دارد. انجام چنین حرکتی میسر نخواهد بود مگر اینکه همه دیسک ها به جز دیسک های $2n$، $2n-1$، $2n-2$ و $2n-3$ را روی میله A و روی دیسک $2n-2$ام ببریم. برای این کار نخستین دیسکی که بایستی روی دیسک $2n-2$ ام قرار داده شود، دیسک $2n-4$ ام می‌باشد که در جای خود قرار دارد و پس از آن باید دیسک $2n-5$ام روی آن ها قرار گیرد. انجام این حرکت مستلزم آن است که تمامی دیسک ها به جز دیسک های $2n$، $2n-1$، $2n-2$، $2n-3$ ، $2n-4$ و $2n-5$ روی میله C مرتب شوند.

این اولین باری است که لازم شده است تا تعدادی زوج ازدیسک ها روی میله C مرتب شوند. بنابراین برای دستیابی به اولین هدف مان که انتقال دیسک $2n$ام به میله C است، لازم است که در وهله اول تعداد $2n-6$ دیسک روی میله C مرتب شوند و چون به دنبال مینیمم حرکات هستیم این شرط کافی نیز است بنابراین تنها راه مینیمم سازی کل حرکات انتقال $2n-6$ دیسک به میله C در مرحله اول می‌باشد.

٤ حل مساله به روش جدید

اگر حداقل حرکات برای انتقال $2n$ دیسک به میله C را با R_{2n} نمایش دهیم واضح است که $R_2 = 2$ است و با توجه به شکل زیر R_4 با 11 حرکت امکان پذیر است ومی توان بررسی کرد که با 10 حرکت یا کمتر امکان پذیر نیست.



با توجه به شکل بالا داریم: $R_4 = 1+1+1+1+(2^3-1)=11$

حال با توجه به مقدمات فوق به حل مساله در حالت کلی می‌پردازیم، یعنی به دنبال R_{2n} برای $n \ge 3$ هستیم، عمل مورد نظر را می‌توان طبق مراحل زیر انجام داد.

مرحله ۱: در این مرحله دیسک های با قطرهای d_1، d_2، ...، d_{2n-6} را با R_{2n-6} حرکت از میله های A و B به میله C منتقل می کنیم.

مرحله ۲: کوچکترین دیسک میله B یعنی دیسک $2n-5$ ام را روی میله A قرار می دهیم.

مرحله ۳: $2n-6$ دیسک مرتب شده روی میله C را با حرکات برج هانوی، یعنی با h_{2n-6}، به میله A منتقل می کنیم.

مرحله ٤: کوچکترین دیسک میله B، یعنی دیسک $2n-3$ ام را به میله C منتقل می کنیم.

مرحله ٥: همه دیسک های میله A، جزدو دیسک پایینی یعنی دیسک های $2n$ ام و $2n-2$ ام را با h_{2n-4} حرکت به میله C منتقل می کنیم.

مرحله ۶: کوچکترین دیسک میله A، یعنی دیسک $2n-2$ام را به میله B انتقال می‌دهیم.

مرحله ۷: تمام دیسک های میله C رابا h_{2n-3} حرکت به میله B منتقل می‌نماییم.

مرحله ۸: تنها دیسک میله A یعنی دیسک $2n$ ام را با یک حرکت به میله C می‌بریم.

مرحله ۹: دراین مرحله با h_{2n-1} حرکت دیسک های مرتب شده روی میله B رابه میله C منتقل می‌نماییم.

با توجه به مراحل نه گانه فوق الذکر نتیجه می‌شود که برای $n \geq 3$ داریم:

$$R_{2n} = R_{2n-6} + 1 + h_{2n-6} + 1 + h_{2n-4} + 1 + h_{2n-3} + 1 + h_{2n-1}$$

مشاهده می‌شود که رابطه بالا یک رابطه بازگشتی نا همگن است. و چون همیشه با تعدادی زوج از دیسک ها سروکار داریم پس R_{2n} با R_{2n-6}، سه درجه فاصله دارد. حال این رابطه بازگشتی درجه ۳ را با شرایط اولیه $R_0 = 0$ و $R_2 = 2$ و $R_4 = 11$ حل می کنیم.

برای حل این رابطه بایستی سه حالت زیر را بررسی کنیم :

حالت اول: $2n = 6k$		حالت دوم: $2n = 6k + 2$		حالت سوم: $2n = 6k + 4$

که در همه حالات بالا k یک عدد صحیح مثبت است.

بررسی حالت اول: در این حالت که $2n = 6k$است، داریم:

$$\begin{aligned}
R_{2n} &= R_{2n-6} + 1 + h_{2n-6} 1 + h_{2n-4} + 1 + h_{2n-3} + 1 + h_{2n-1} \\
&= R_{2n-6} + 1 + 2^{2n-6} - 1 + 1 + 2^{2n-4} - 1 + 1 + 2^{2n-3} - 1 + 1 + 2^{2n-1} - 1 \\
&= R_{2n-6} + 2^{2n-6} + 2^{2n-4} + 2^{2n-3} + 2^{2n-1} \\
R_{2n} &= R_{2n-12} + 2^{2n-12} + 2^{2n-10} + 2^{2n-9} + 2^{2n-7} + 2^{2n-6} + 2^{2n-4} + 2^{2n-3} + 2^{2n-1} \\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\
R_{2n} &= R_0 + \sum_{k=1}^{n/3} 2^{2n-6k} + 2^{2n-(6k-2)} + 2^{2n-(6k-3)} + 2^{2n-(6k-5)} \\
&= \sum_{k=1}^{n/3} 2^{2n} \left(\frac{1}{2^{6k}} + \frac{1}{2^{6k-2}} + \frac{1}{2^{6k-3}} + \frac{1}{2^{6k-5}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n/3} 2^{2n} \left(\frac{1}{2^{6k}} + \frac{4}{2^{6k}} + \frac{8}{2^{6k}} + \frac{32}{2^{6k}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n/3} \frac{2^{2n}}{2^{6k}} (1+4+8+32) = \sum_{k=1}^{n/3} 45\,(2^{2n-6k}) = 45 \sum_{k=1}^{n/3} 4^{n-3k} = 45\,(4^{n-3} + 4^{n-6} + \cdots + 4^3 + 4^0) \\
R_{2n} &= 45\,(4^0 + 4^3 + \cdots + 4^{n-3})
\end{aligned}$$

واضح است که عبارت داخل پرانتز یک سری هندسی است که جمله اول آن ۱و قدر نسبت آن 4^3است. بنا بر این به راحتی می‌توانیم مجموع این جملات را حساب کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$R_{2n} = 45\left(\frac{(4^3)^{n/3} - 1}{4^3 - 1}\right) = 45\left(\frac{4^n - 1}{4^3 - 1}\right) = \frac{45}{63}(4^n - 1) \Rightarrow R_{2n} = \frac{5}{7}(4^n - 1) \qquad , \quad n = 3k$$

بررسی حالت دوم: در این حالت که $2n = 6k + 2$ است، داریم:

$$R_{2n} = R_{2n-6} + 2^{2n-6} + 2^{2n-4} + 2^{2n-3} + 2^{2n-1}$$

$$R_{2n} = R_2 + \sum_{k=1}^{(2n-2)/6} 2^{2n-6k} + 2^{2n-(6k-2)} + 2^{2n-(6k-3)} + 2^{2n-(6k-5)}$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{(n-1)/3} 45\,(2^{2n-6k}) = 2 + 45 \sum_{k=1}^{(n-1)/3} 4^{n-3k} = 2 + 45(4^1 + 4^4 + \cdots + 4^{n-3})$$

$$R_{2n} = 2 + 45\,(4\,(\frac{(4^3)^{(n-1)/3} - 1}{4^3 - 1})) = 2 + \frac{45}{63}(4^n - 4)$$

$$\Rightarrow R_{2n} = 2 + \frac{5}{7}(4^n - 4) \qquad , \qquad n = 3k + 1$$

بررسی حالت سوم: در این حالت که $2n = 6k + 4$ است، داریم:

$$R_{2n} = R_{2n-6} + 2^{2n-6} + 2^{2n-4} + 2^{2n-3} + 2^{2n-1}$$

$$R_{2n} = R_4 + \sum_{k=1}^{(2n-4)/6} 2^{2n-6k} + 2^{2n-(6k-2)} + 2^{2n-(6k-3)} + 2^{2n-(6k-5)}$$

$$= 11 + \sum_{k=1}^{(n-2)/3} 45\,(2^{2n-6k}) = 11 + 45 \sum_{k=1}^{(n-2)/3} 4^{n-3k} = 11 + 45(4^2 + 4^5 + \cdots + 4^{n-3})$$

$$R_{2n} = 11 + 45\,(4^2\,(\frac{(4^3)^{(n-2)/3} - 1}{4^3 - 1})) = 11 + \frac{45}{63}(4^n - 4^2)$$

$$\Rightarrow R_{2n} = 11 + \frac{5}{7}(4^n - 4^2) \qquad , \qquad n = 3k + 2$$

بنا بر این بطور خلاصه برای هر n داریم:

$$\text{if} \quad n = 3k \qquad , \qquad R_{2n} = \frac{5}{7}(4^n - 1)$$

$$\text{if} \quad n = 3k + 1 \qquad , \qquad R_{2n} = 2 + \frac{5}{7}(4^n - 4)$$

$$\text{if} \quad n = 3k + 2 \qquad , \qquad R_{2n} = 11 + \frac{5}{7}(4^n - 16)$$

۵ نتیجه گیری

مساله برج های هانوی یکی از مسایل مهم ریاضی کاربردی می باشد. در این مقاله روش دیگری جهت حل مساله را ارائه و روش قبلی را اصلاح نمودیم و توانستیم مینیمم تعداد حرکات را برای انتقال دیسک ها به دست آوریم. در پایان برای چند حالت R_{2n} (فرمول جدید) و H_{2n} (فرمول قبلی) را با هم مقایسه می نماییم:

n	H_{2n}	R_{2n}
1	$=2H_2$	$=2R_2$
2	$=13H_4$	$=11R_4$
3	$=60H_6$	$=45R_6$
4	$=251H_8$	$=182R_8$
5	$=1018H_{10}$	$=731R_{10}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

منابع

[1] E**. Lucas,** *Recrations Mathematiques ,volume III ,* **Gauthier-Villars, Paris,1893.**
[2] **A. Sapir,** *The tower of Hanoi with forbidden moves***, The computer journal, 47(1) (2004), pp. 20-24.**
[3] B**. M. Stewart,** *Solution to advanced problem 3918,* **Amer. Math. Monthly, 48 (1941), pp. 217-219.**
[4] **P. K. Stockmeyer,** *Variations on the four-post Tower of Hanoi puzzle,* **Congr. Numer. 102 (1994), pp.3-12**

[5] دکتر بابلیان، اسماعیل، مباحثی در *ریاضیات گسسته*، مبتکران، ۱۳۷۵.