محاسبه تابع گاما توسط روش‌های تجزیه آدومین و آشوب هوموتوپی و مقایسه آنها

طاهر لطفی[1]*، اسماعیل بابلیان[2]، فرج ا... یعقوبی[1]

[1] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد همدان

[2] گروه ریاضی و کامپیوتر ـ دانشگاه تربیت معلم تهران

چکیده

در این مقاله دو روش جدید براساس تجزیه آدومین (ADM) و آشوب هوموتوپی (HPM) برای محاسبه دقیق مقدار تابع گاما ارایه شده است. همچنین مقایسه جواب های به دست آمده توسط این روش‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. با ارایه چند مثال سادگی، کارایی و موثر بودن الگوریتم‌های پیشنهادی نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: روش تجزیه آدومین و آشوب هوموتوپی، تابع گاما.

۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل کاربردهای زیادی در علوم و مهندسی دارند و حل آنها در یاری رساندن به درک و توجیه پدیده‌های علمی اهمیت به سزایی دارد، اما تعداد کمی از این معادلات را می‌توان با روش های آنالیزی حل کرد و اکثر آنها حل آنالیزی ندارند. لذا این معادلات باید با روش های دیگری حل شوند. برخی از روش هایی که در سال های اخیر مورد استفاده قرار گرفته‌اند عبارتند از: [1,3]،[4,5]،[6]،[7,8] و[9,10,11,12].

همچنین برای ملاحظه برخی جزئیات روش های آنالیز غیرخطی توسعه یافته در سال های اخیر می‌توان به [13] مراجعه نمود.

از اوایل سال ۱۹۸۰ تا کنون روش تجزیه آدومین (ADM) برای حل دسته وسیعی از معادلات تابعی به کار گرفته شده است، که از جمله این معادلات می‌توان به معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی و همچنین معادلات انتگرالی همراه با شرایط اولیه و یا مرزی اشاره نمود [14-25].

در این روش جواب معمولا به صورت یک سری نامتناهی به دست می‌آید که به جواب دقیق معادله همگرا می‌شود.

* عهده دار مکاتبات (آدرس پست الکترونیکی: lotfi@iauh.ac.ri) lotfither@Yahoo.com)

در سال های اخیر، کاربرد روش آشوب هوموتوپی (HPM) برای حل مسایل ریاضی مورد توجه واقع شده است. این روش هم مانند روش ADM روشی موثر و راحت برای حل انواع معادلات خطی و غیرخطی می‌باشد. در این روش از تکنیک هوموتوپی در توپولوژی استفاده می‌شود و هوموتوپی طوری ساخته می‌شود که دارای یک پارامتر مانند p باشد که $p \in [0,1]$.

کارایی، سادگی و دقت روش هوموتوپی برای حل دسته وسیعی از انواع معادلات خطی و غیرخطی همراه با سرعت بالای همگرایی به جواب دقیق نشان داده شده است. البته روش HPM در سال ۱۹۹۸ توسط He پیشنهاد شد [9] و تا کنون به طور موفقیت آمیزی برای حل انواع مختلفی از مسایل به کار رفته است، [26-32]. در این مقاله قصد داریم تابع گاما را توسط یک معادله دیفرانسیل خطی ساده مرتبه اول و به کمک روش های ADM و HPM محاسبه نماییم. بدین منظور معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را درنظر می گیریم:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = Q(t) \qquad (۱)$$

جواب تحلیلی معادله (۱) عبارت است از:

$$y(t)f(t) = \int Q(t)f(t)dt \qquad (۲)$$

که $f(t) = e^{\int p(t)dt}$

۲ محاسبه تابع گاما

تابع گاما بارها در مسایل فیزیکی و آماری ظاهر می‌شود. همچنین این تابع دارای کاربردهای مستقیم در نظریه معادلات دیفرانسیل می‌باشد به عنوان مثال در تعریف تابع و معادله دیفرانسیل بسل نمی‌توان نقش این تابع را نادیده گرفت. تابع گاما به عنوان تعمیم تابع فاکتوریل هم در نظر گرفته می‌شود، [33]. لذا در این قسمت به معرفی آن می‌پردازیم.

تابع گاما به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad x > 0 \qquad (۳)$$

به منظور محاسبه تابع گاما توسط ADM و HPM معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول زیر را در نظر می گیریم

$$\frac{dy}{dt} - y = t^{x-1} \qquad (۴)$$

جواب تحلیلی (۴) عبارت است از:

$$y(t)f(t) = \int f(t) t^{x-1} dt \qquad (۵)$$

که $f(t) = e^{-t}$. لذا از (۳) و (۵) داریم

$$y(t)e^{-t} \Big|_0^\infty = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma(x) \quad , \quad x > 0 \qquad (۶)$$

۳ محاسبه تابع گاما با استفاده از ADM

برای محاسبه تابع گاما از (۶) توسط ADM، عملگر $L = \frac{d}{dt}$ را معرفی می‌کنیم. لذا می‌توان (۴) را به صورت زیر نوشت:

$$L(y) - y = t^{x-1}, \qquad x > 0 \tag{۷}$$

یا

$$y = -t^{x-1} + L(y). \tag{۸}$$

روش تجزیه آدومین جواب را به صورت سری در نظر می‌گیرد. بدین منظور گیریم

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \tag{۹}$$

که $y_0 = -t^{x-1}$ و

$$y_{i+1} = L(y_i) \text{ و } i = 0,1,2,\ldots \tag{۱۰}$$

در نتیجه از (۶) و (۹) خواهیم داشت

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \left[e^{-t} y(t) \right]_0^{\infty} = \left[e^{-t} \sum_{i=0}^{\infty} y_i \right]_0^{\infty}, \quad x > 0 \tag{۱۱}$$

لازم به ذکر است که همگرایی ADM در [۲۲] و [۳۷-۳۳] مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش بعد سعی می‌کنیم با به کارگیری ADM چند محاسبه برای مقادیر معروف تابع گاما را انجام دهیم.

۳-۱ مثال ها و نتایج محاسباتی با روش ADM

مثال ۳-۱ گیریم $x = 4$. از (۱۱) خواهیم داشت

$$\Gamma(4) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^4 dt = \left[e^{-t} \sum_{i=0}^{\infty} y_i \right]_0^{\infty}$$

از (۱۰) داریم

$$y_0 = -t^{x-1} = -t^3,$$
$$y_1 = L(y_0) = -3t^2,$$
$$y_2 = L(y_1) = -3 \times 2t,$$
$$y_3 = L(y_2) = -3!.$$

و

$$y_i = 0 \qquad , \qquad i = 4,5,\ldots$$

بنابراین

$$\Gamma(4)=\left[e^{-t}(-t^3-3t^2-6t-3\,!)\right]_0^\infty=3\,!$$

مثال ۳-۲ می‌خواهیم ثابت کنیم $\Gamma(n+1)=n\,!$

بدین منظور گیریم $x=n+1$. سپس از (۱۱) داریم

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^n dt=\left[e^{-t}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right]_0^\infty$$

از (۱۰) خواهیم داشت

$$y_0=-t^{x-1}=-t^n,$$
$$y_1=L(y_0)=-nt^{n-1},$$
$$y_2=L(y_1)=-n(n-1)t^{n-2},$$

و

$$y_n=-n(n-1)(n-2)\dots\;(2)(1)t^0=-n!.$$

لذا $y_i=0$ برای $i\geq n+1$.

حال چون $t^m e^{-t}\to 0$ وقتی $t\to\infty$ و $m\in N$، لذا

$$\Gamma(n+1)=\left[\;e^{-t}(-t^n-nt^{n-1}-n(n-1)t^{n-2}-\dots-n\,!\text{-}0)\right]_0^\infty=n\;!$$

مثال ۳-۳ ثابت کنید:

$$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)\qquad,\qquad x>0$$

بنابراین (۱۱) می‌توان نوشت

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt=\left[e^{-t}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right]_0^\infty \tag{۱۲}$$

و از (۱۰) داریم

$$y_0=-t^{x-1},$$
$$y_1=-(x-1)t^{x-2},$$
$$y_2=-(x-1)(x-2)t^{x-3},$$
$$y_i=-(x-1)(x-2)\dots(x-i)t^{x-(i+1)}. \tag{۱۳}$$

گیریم

$$z_{i-1}=-(x-2)\dots(x-i)t^{x-(i+1)}\qquad,\qquad i=1,2,\dots \tag{۱۴}$$

از جای گذاری (۱۴) در (۱۳) داریم

$$y_i=(x-1)z_{i-1}\quad,\qquad i=1,2,\dots \tag{۱۵}$$

بنابراین از (۱۲) و (۱۵) داریم

$$\Gamma(x)=\left[e^{-t}\sum_{i=0}^{\infty}y_i\right]_0^{\infty}=e^{-t}y_0\Big|_0^{\infty}+\left[e^{-t}\sum_{i=1}^{\infty}y_i\right]_0^{\infty}$$

$$=-t^{x-1}e^{-t}\Big|_0^{\infty}+\left[e^{-t}\sum_{i=1}^{\infty}(x-1)z_{i-1}\right]_0^{\infty}$$

$$=0+(x-1)\left[e^{-t}\sum_{i=0}^{\infty}z_i\right]_0^{\infty}=(x-1)\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-2}dt$$

$$=(x-1)\Gamma(x-1)$$

۳-۲ اساس روش آشوب هوموتوپی (HPM)

برای بیان ایده‌های پایه‌ای در این روش، معادله زیر را در نظر می‌گیریم، [۱۱]:

$$A(y)=f(r)\quad,\qquad r\in\Omega \tag{۱۲}$$

که

$$B(y,\frac{\partial y}{\partial r})=0\quad,\quad r\in\Gamma \tag{۱۳}$$

در اینجا A یک عملگر دیفرانسیلی کلی، B عملگر مرزی، $f(r)$ تابع تحلیلی و Γ نیز مرز تعریف شده روی دامنه Ω می‌باشد. می‌توان A را به دو قسمت M و N تقسیم کرد که M قسمت خطی و N قسمت غیرخطی می‌باشند. لذا می‌توانیم (۱۲) را به صورت زیر بنویسیم.

$$M(y)+N(y)=f(r)\quad,\quad r\in\Omega \tag{۱۴}$$

ساختار آشوب هوموتوپی به صورت زیر است:

$$H(v,p)=(1-p)\left[M(v)-M(y_0)\right]+p\left[A(v)-f(r)\right]=0 \tag{۱۵}$$

که

$$v(r,p)\ :\quad \Omega\times[0,1]\to R \tag{۱۶}$$

در معادله (۱۵)، $p\in[0,1]$ پارامتر نشاندنی و y_0 هم تقریب اولیه است. می‌توان فرض نمود که جواب معادله (۱۵) می‌تواند بر حسب یک سری توانی از p مانند زیر بیان شود

$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+p^3v_3+\ldots \tag{۱۷}$$

و بهترین تقریب جواب عبارت است از:

$$y=\lim_{p\to 1}v=v_0+v_1+v_2+\ldots \tag{۱۸}$$

برای همگرایی سری فوق می‌توان به [۱۱] مراجعه نمود.

٤ محاسبه تابع گاما توسط HPM

در این بخش HPM برای محاسبه تابع را در نظر می‌گیریم. با توجه به معادله (۴)، گیریم $M(y) = -y(t)$ و $N(y) = \frac{dy}{dt}$. به عبارت دیگر هوموتوپی ساده زیر را می‌سازیم.

$$M(v) - M(y_0) + pM(y_0) + p[N(v) - f(t)] = 0 \qquad (۱۹)$$

یا

$$p\left[\frac{dv}{dt} - f(t)\right] - v(t) + y_0(t) - py_0(t) = 0$$

سری (۱۷) را در (۱۹) جایگذاری می‌کنیم و ضرایب توان های یکسان p را متحد قرار داده، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&p^0 : M(v_0) - M(y_0) = 0,\\
&p^1 : M(v_1) + M(y_0) + N(v_0) - f = 0,\\
&p^2 : M(v_2) + N(v_1) = 0,\\
&p^3 : M(v_3) + N(v_2) = 0,\\
&\vdots\\
&p^{n+1} : M(v_{n+1}) + N(v_n) = 0.
\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

در نتیجه با توجه به (۶) و (۱۸) داریم

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \left\{e^{-t} y(t)\right\}\Big|_0^\infty = \left\{e^{-t} \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t)\right\}\Big|_0^\infty \quad , \quad x > 1 \qquad (۲۱)$$

٤-۱ مثال‌ها و نتایج محاسباتی با روش HPM

مثال ٤-۱ گیریم $x = 4$. با انتخاب $y_0(t) = 0$، از (۲۰) داریم

$$\begin{aligned}
&v_0(t) = 0,\\
&v_1(t) = -t^3,\\
&v_2(t) = -3t^2,\\
&v_3(t) = -6t,\\
&v_4(t) = -3!,\\
&v_i(t) = 0 \quad , \quad i = 4,5,6,\ldots
\end{aligned}$$

لذا بنابر (۲۱) داریم

$$\Gamma(4) = \left[e^{-t}(-t^3 - 3t^2 - 6t + 3!)\right]_0^\infty = 3!$$

حال اگر در این مثال فرض کنیم $y_0(t) = 1$ ، خواهیم داشت

$$v_0(t) = 1,$$

$$v_1(t) = -1 - t^3,$$
$$v_2(t) = -3t^2,$$
$$v_3(t) = -6t,$$
$$v_4(t) = -3!,$$
$$v_i(t) = 0 \quad , \quad i = 4,5,6,\ldots$$

و دوباره همان نتیجه قبلی به دست خواهد آمد.

مثال ٤-٢ ثابت می‌کنیم $\Gamma(n+1) = n!$. بدین منظور گیریم $x = n+1$ ، آن گاه از (۲۱) داریم

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = \left[e^{-t} \sum_{i=0}^{\infty} v_i \right]_0^\infty$$

با توجه به روابط (۲۰) و انتخاب $y_0(t) = 0$ ، داریم

$$v_0(t) = 0,$$
$$v_1(t) = -t^n,$$
$$v_2(t) = -nt^{n-1},$$
$$v_3(t) = -n(n-1)t^{n-2},$$
$$\vdots$$
$$v_n(t) = -n!,$$
$$v_i(t) = 0 \quad , \quad i = n+1, n+2, \ldots .$$

در این صورت با توجه به اینکه $\lim\limits_{t\to\infty} t^m e^{-t} = 0$ وقتی $m \in N$ ، خواهیم داشت

$$\Gamma(n+1) = \left[e^{-t} (-t^n - t^{n-1} - n(n-1)\, t^{n-2} \ldots - n\,!\text{-}0) \right]_0^\infty = n\,!$$

مثال ٤-٣ ثابت می‌کنیم برای $x > 1$ ، $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$

بدین منظور از (۲۱) می‌توان نوشت

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \left[e^{-t} \sum_{i=0}^{\infty} v_i \right]_0^\infty$$

حال $y_0(t) = 0$ را به عنوان تقریب اولیه درنظر گرفته، لذا با توجه به روابط داده شده در (۲۰) داریم:

$$v_0(t) = 0,$$
$$v_1(t) = -t^{x-1},$$
$$v_2(t) = -(x-1)t^{x-2},$$
$$\vdots$$
$$v_{i+1}(t) = -(x-1)(x-2)\ldots(x-i)t^{x-(i+1)},$$

گیریم $z_{i-1}(t) = -(x-2)\ldots(x-i)t^{x-(i+1)}$. لذا

$$\Gamma(x)=\left[e^{-t}\sum_{i=0}^{\infty}v_i\right]_0^{\infty}=e^{-t}v_1\Big|_0^{\infty}+\left[e^{-t}\sum_{i=2}^{\infty}v_i\right]_0^{\infty}$$

$$=t^{x-1}e^{-t}\Big|_0^{\infty}+\left[e^{-t}\sum_{i=1}^{\infty}(x-1)z_{i-1}\right]_0^{\infty}$$

$$=0+(x-1)\left[e^{-t}\sum_{i=0}^{\infty}z_i\right]_0^{\infty}$$

$$=(x-1)\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-2}dt=(x-1)\Gamma(x-1)$$

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله روش‌های تجزیه آدومین و آشوب هوموتوپی برای محاسبه تابع گاما و بررسی برخی نتایج محاسباتی آن به طور موفقیت آمیزی مورد استفاده قرار گرفت. سادگی و کارایی این دو روش پیشنهادی در مثال هایی نشان داده شد.

همچنین، برخلاف روش‌های متداول پیشین و کلاسیک مبتنی بر انتگرال گیری، این الگوریتم‌ها از عمل مشتق‌گیری، که ساده‌تر از عمل انتگرال گیری است، استفاده می‌کنند. هر دو روش از نظر محاسباتی به نتایج یکسانی منجر می‌شوند. ولی همان طور که در تئوری و مثال ها نشان داده شد، روش آدومین ساده‌تر می‌باشد.

منابع

[1] C. M. Bender, K. S. Pinsky, L. M. Simmons, *A new perturbative approach to nonlinear problems*, Journal of Mathematical Physics, 30 (7) (1989), pp. 1447-1455.

[2] I. Andrianow, J. Awrejcewicz, *Construction of periodic solution to partial differential euations with nonlinear bundary conditions*, Internatioal Journal of Nonlinear Sciences and Numerical simulation, 1 (4), (2000).

[3] J. H. He, *A note on delta-perturbatin expansion method*, Applied Mathematics and Mechanics, 23 (6) (2002), pp. 634-638.

[4] S. J. Liao, *Homotopy analysis method: a new analytic method for nonlinear problems*, Applied Mathematics and Mechanics, (English- Ed.) 19 (10) (1998), pp. 957-962.

[5] J. H. He. *Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method*, International Congress of Mathematicians, Beijign, 20-28 August, 2002.

[6] J. H. He, *Variational iteration method: a kind of nonlinear analystical technique: some examples*, International Journal of Nonlinear Mechanics, 34 (4) (1999), pp. 699-70.

[7] G. Adomian, *Solving frontier problems o physics*: the decomposition method, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[8] G. Adomian, R. Rach, *On the solution of algebraic equations by the decomposition method*, Applied Mathematics and Computation, 105 (1985), pp. 141-166.

[9] J. H. He, *Homotopy perturbation technique*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 178 (1999), pp. 257-262.

[10] J. H. He, *A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems*, International Journal of Non- Linear Mechanics, 35 (1) (2000), pp. 37-43.

[11] J. H. He, *Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique*, Applied Mathematics and Computation, 135 (2003), pp. 73-79.

[12] J. H. He, *Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method*, Applied Mathematics and Computation, 156 (2004), pp. 527-539.

[13] J. H. He, *A review on some new recently developed nonlinear analytical techniques*, International Journal of Nonlinear Sciences an Numerical Simulation, 1 (1) (2000), pp. 51-70.
[14] S. Abbasbandy, M. T. Darvishi, *A numerical solution of Burgers equation by modified Adomian method*, Applied Mathematics and Computation, 163 (2005), pp. 1265-1272.
[15] S. Abbasbandy, *A numerical solution of Blasius equation by Adomians decomposition method and comparison with homotopy perturbation method*, Chaos, Solitons & Fractals, 31, (2007), pp. 257-260.
[16] G. Adomian, R. Rach, *On the solution of algebraic equations by the decomposition method*, Journal of Mathematical Analysis and Application, 105, (1985), pp. 141-166.
[17] G. Adomian, *A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation*, Mathematical and Computer Modelling, 13(7), (1992), pp. 17-43.
[18] G. Adomian, *A review of the decomposition method in applied mathematics*, Journal of Mathematical Analysis and Application, 135, (1988), pp. 501-544.
[19] G. Adomain, *Nonlinear stochastic system theory and applications to physics*, Kluwer, Dordrecht, 1989.
[20] G. Adomian, *Solving frontier problems of physics: the decomposition method*, Kluwer, Dordrecht, 1994.
[21] E. Babolian, J. Biazar, *Solving the problem of biological species living together by Adomian decomposition method*, Applied Mathematics and Computation, 129, (2002), pp. 339-343.
[22] E. Babolian, J. Biazar, *On the order of convergence of Adomian method*, Applied Mathematics and Computation, 130, pp. (2002), 383-387.
[23] E. Babolian, a. Davari, *Numerical implementation of Adomian decomposition method*, Applied Mathematics and Computation, 153. (2004), pp. 301-305.
[24] E. Babolian, J. Biazar, A. R. Vahidi, *A new computational method for Laplace transform by decomposition method*, Applied Mathematics and Computation, 150, (2004), pp. 841-846.
[25] E. Babolian, J. Biazar, A.R. Vahidi, *The decomposition method applied to systems of Fredholm integral equations of the second kind*, Applied Mathematics and Computation, 148 (2004), pp. 443-452.
[26] J. H. He, *The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities*, Applied Mathematics and Computation, 151 (2004), pp. 287-292.
[27] J. H. He, *Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations*, Chaos, Solitons and Fractals, 26 (2005), pp. 695-700.
[28] J. H. He, *Homotopy perturbation method for solving boundary value problems*, Physics Letters A, 350 (2006), pp. 87-88.
[29] J. H. He, *Limit cycle and bifurcation of nonlinear problems*, Chaos, Solitions and Fractals, 26 (3) (2005), pp. 827-833.
[30] J. Biazar, H. Ghazvini, *Exact solutions for nonlinear Sehrodinger equations by He's homotopy perturbation method*, Physics Letters A, 366 (2007), pp. 79-84.
[31] D. D. Ganji, *The application of He's homotopy perturbation method to nonlinear equations arising in heat transfer*, Physics Letters A, 355 (2006), pp. 337-341.
[32] S. Abbasbandy, *Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method*, Applied Mathematics and Computation, 173 (2006), pp. 493-500.
[33] G. B. Arfkan, H. J. Weber, *Mathematical method for physics*, Academic Press, Fifth Edition, 2001.
[34] K. Abbaoui, Y. Cherruault, *Convergence of Adomian's method applied to nonlinear equations*, Mathematical and Computer Modelling, 20 (9), (1994), pp. 69-73.
[35] K. Abbaui, Y. Cherruault, *New ideas for proving convergence of decomposition methods*, Computer Mathematics with Applications, 29 (7), (1996), pp. 103-108.
[36] Y. Cherruault, *Convergence of Adomian's method, Kybernets, 8 (2), (1998), pp. 423-426.*
[37] Y. Cherruault, G. Adomian, *De composition methods, a new proof of convergence*, Mathematical and Computer Modelling, 18, (1993), pp. 103-106.