

## بهبود روش تجزیه آدومین برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

علیرضا وحیدی\* قاسم اسعدی کردشولی<sup>۲</sup> مسعود امان‌زاده<sup>۳</sup>

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرری

گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرری

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات

### چکیده

در روش تجزیه آدومین برای یافتن تقریبی از جواب معادله دیفرانسیل به صورت یک چند جمله‌ای، از بسط تیلور تابع معلوم موجود در معادله، حول نقطه‌ی ابتدای بازه استفاده می‌کنند. این امر سبب می‌شود جواب تقریبی حاصل در نقاط انتهایی نسبت به نقاط ابتدایی بازه از دقت کمتری برخوردار باشد. در این مقاله دو روش برای رفع این مشکل و تصحیح روش تجزیه ارایه شده و نتایج عددی توسط دو مثال برای معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی مورد بررسی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** معادلات دیفرانسیل معمولی، روش تجزیه آدومین، بسط تیلور.

### ۱ مقدمه

یکی از روش‌های عددی که در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته و در حل انواع معادلات تابعی از جمله معادلات جبری، معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال، معادلات انتگرال دیفرانسیل و غیره کاربرد دارد روش تجزیه آدومین است [۱،۲]، که توسط او در سال ۱۹۸۰ معرفی شد. در این روش جواب معادله به صورت یک سری نامتناهی در نظر گرفته می‌شود که غالباً به جواب واقعی معادله همگراست [۳ و ۴].

یکی از پر اهمیت‌ترین تفاوت‌های روش تجزیه با سایر روش‌های عددی برای یافتن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل این است که می‌توان در این روش جواب را به صورت یک چند جمله‌ای محاسبه کرد. برای این منظور از بسط تیلور تابع معلوم حول نقطه ابتدای بازه استفاده می‌شود. از آن جایی که بسط تیلور فقط در نقطه بسط داده شده یعنی نقطه ابتدای بازه دقیق است و هر چه از این نقطه دور شویم از دقت آن کاسته می‌شود [۵] لذا جواب تقریبی که از روش تجزیه به دست می‌آید نیز دارای این نقص می‌باشد. در این مقاله قصد داریم برای تابع معلوم، از تقریب‌های مناسب‌تری نسبت به بسط تیلور حول نقطه‌ی ابتدای بازه استفاده و تاثیر این جایگزینی بر جواب روش تجزیه را بررسی کنیم. برای این کار دو روش پیشنهاد شده است. در روش اول از بسط تیلور حول نقطه‌ی

میانی بازه استفاده می شود و در روش دوم بازه ی داده شده را به چند زیر بازه افراز و روش تجزیه را در هر یک از زیر بازه ها به کار می بریم.

## ۲ روش تجزیه آدومین برای حل معادله دیفرانسیل معمولی

معادله دیفرانسیل مرتبه  $n$  ام زیر را در نظر بگیرید:

$$y^{(n)} = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad a \leq t \leq b \quad (1)$$

$$y(a) = \alpha_0, y'(a) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}.$$

برای یافتن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل فوق با استفاده از روش تجزیه، آن را به صورت

$$Ly(t) + Ry(t) + Ny(t) = g(t) \quad \text{در نظر بگیرید، که در آن } L = \frac{d^n}{dt^n}(\cdot), \text{ جملات خطی، } N \text{ جملات غیر خطی و } g \text{ تابعی معلوم از } t \text{ است. با استفاده از عملگر معکوس } L^{-1} = \int_a^t \int_a^t \dots \int_a^t (\cdot) dt \dots dt \text{ داریم}$$

$$y(t) = f(t) - L^{-1}Ry(t) - L^{-1}Ny(t). \quad (2)$$

که در آن  $f(t)$  حاصل تاثیر عملگر معکوس بر  $g(t)$  و شرایط اولیه داده شده است. فرض کنید که تابع جواب

$$\text{به صورت } y(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i(t) \text{ و جمله غیر خطی به صورت } Ny(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i \text{ است که در آن } A_i \text{ ها}$$

چند جمله ای هایی بر حسب  $y_0, y_1, y_2, \dots$  هستند که به چند جمله ای های آدومین معروفند و از رابطه زیر محاسبه می شوند:

$$A_k = \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k}{d\lambda^k} N \left( \sum_{n=0}^{\infty} y_n \lambda^n \right) \right)_{\lambda=0} \quad (3)$$

در این صورت از رابطه (۲) داریم

$$\sum_{i=0}^{+\infty} y_i(t) = f(t) - L^{-1}R \left( \sum_{i=0}^{+\infty} y_i(t) \right) - L^{-1} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} A_i \right) \quad (4)$$

و مولفه های  $y_0, y_1, y_2, \dots$  با توجه به (۴) از رابطه بازگشتی زیر به دست می آیند:

$$y_0(t) = f(t), \quad (5)$$

$$y_{k+1}(t) = -L^{-1}R y_k(t) - L^{-1}A_k, \quad k \geq 0.$$

با مشخص بودن  $y_0, y_1, y_2, \dots$  تقریب  $n$  جمله ای  $\phi_n(t)$  را برای جواب  $y(t)$  چنین تعریف می کنیم

$$\phi_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(t), \quad \text{به طوری که} \quad y(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n(t). \quad (6)$$

## ۳ روش‌های پیشنهادی

## ۳-۱ بسط تیلور حول نقطه ی میانی بازه

در این روش به جای استفاده از بسط تیلور تابع  $g(t)$  حول نقطه  $t = a$  از بسط تیلور تابع  $g(t)$  حول نقطه

$$\text{میانی بازه یعنی } t = \frac{a+b}{2} \text{ استفاده می شود.}$$

## ۳-۲ افراز بازه

فرض کنید  $a \leq t \leq b$  تابع معلوم موجود در معادله دیفرانسیل باشد. هدف این است که با استفاده از بسط تیلور تقریب یکنواختی برای  $g(t)$  در این بازه ارایه شود. برای این منظور بازه فوق به دو یا چند زیر بازه افراز و در هر زیر بازه از بسط تیلور حول نقطه ابتدای بازه استفاده می شود. به عنوان مثال بازه  $[a, b]$  را به دو زیر بازه به صورت  $\left[ a, \frac{a+b}{2} \right]$  و  $\left[ \frac{a+b}{2}, b \right]$  افراز و در هر یک از زیر بازه‌ها بسط تیلور را به کار می‌بریم. بنابراین چند جمله‌ای  $P(t)$  به عنوان تقریبی برای  $g(t)$  در بازه  $[a, b]$  به صورت زیر خواهد بود:

$$P(t) = \begin{cases} P_1(t) & a \leq t < \frac{a+b}{2} \\ P_2(t) & \frac{a+b}{2} \leq t \leq b \end{cases}$$

که در آن  $p_1(t)$  و  $p_2(t)$  چند جمله‌ای‌های حاصل از بسط تیلور در زیر بازه‌ها می‌باشند.  $p_1(t)$  چند جمله‌ای حاصل از بسط حول نقطه  $t = a$  و  $p_2(t)$  چند جمله‌ای حاصل از بسط حول نقطه  $t = \frac{a+b}{2}$  است.

اکنون معادله دیفرانسیل (۱) را در نظر بگیرید. با افراز بازه داده شده به دو زیر بازه  $\left[ a, \frac{a+b}{2} \right]$  و  $\left[ \frac{a+b}{2}, b \right]$  این معادله به دو معادله دیفرانسیل زیر تبدیل می‌شود

$$y^{(n)} = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad a \leq t < \frac{a+b}{2} \quad (7)$$

$$y(a) = \alpha_0, y'(a) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}.$$

و

$$y^{(n)} = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad \frac{a+b}{2} \leq t \leq b \quad (8)$$

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \bar{\alpha}_0, y'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \bar{\alpha}_1, \dots, y^{(n-1)}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \bar{\alpha}_{n-1}.$$

با به کار بردن روش تجزیه برای معادله (۷) و با استفاده از جواب تقریبی آن که به صورت یک چند جمله‌ای است، مقدار  $\bar{\alpha}_0$  را به صورت تقریبی به دست می‌آوریم و هم چنین برای یافتن مقادیر  $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n-1}$  می‌توان از

چند جمله‌ای جواب معادله (۷) مشتق گرفت. به این ترتیب با داشتن شرایط اولیه‌ی معادله دیفرانسیل (۸) می‌توان روش تجزیه را برای حل آن به کار برد.

#### ۴ مثال‌های عددی

مثال ۱ معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$y'(t) = y(t) + \frac{e^t}{t}, \quad y(1) = 0, \quad 1 \leq t \leq 2 \quad (9)$$

را در نظر بگیرید که دارای جواب دقیق  $y(t) = e^t \text{Lnt}$  است. برای یافتن جواب تقریبی معادله دیفرانسیل (۹) با استفاده از روش تجزیه فرض کنید  $L = \frac{d}{dt}(\cdot)$ . بنابراین  $L^{-1} = \int_1^t (\cdot) dt$  که با اعمال آن روی (۹) داریم:

$$Ly(t) = y(t) + \frac{e^t}{t}, \quad (10)$$

$$y(t) = L^{-1}y(t) + L^{-1} \frac{e^t}{t},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i = y(1) + \int_1^t \sum_{i=0}^{\infty} y_i dt + \int_1^t \frac{e^t}{t} dt,$$

با توجه به رابطه اخیر مولفه‌های  $y_0, y_1, y_2, \dots$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$y_0(t) = y(1) + \int_1^t \frac{e^t}{t} dt, \quad (11)$$

$$y_{i+1}(t) = \int_1^t y_i(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

با استفاده از چهار جمله‌ی بسط تیلور تابع  $\frac{e^t}{t}$  حول نقطه  $t_0 = 1$

$$\frac{e^t}{t} \approx \frac{53e}{24} - \frac{7e}{2}t + \frac{15e}{4}t^2 - \frac{11e}{6}t^3 + \frac{3e}{8}t^4 \quad (13)$$

با جای گذاری (۱۳) در (۱۱) داریم

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y(1) + \int_1^t \left( \frac{53e}{24} - \frac{7e}{2}t + \frac{15e}{4}t^2 - \frac{11e}{6}t^3 + \frac{3e}{8}t^4 \right) dt \\ &= -\frac{53e}{40} + \frac{53et}{24} - \frac{7et^2}{4} + \frac{5et^3}{4} - \frac{11et^4}{24} + \frac{3et^5}{40} \end{aligned} \quad (14)$$

و با استفاده از (۱۲)، مولفه‌های  $y_0, y_1, y_2, \dots$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_1^t y_0(t) dt = \int_1^t \left( -\frac{53e}{40} + \frac{53et}{24} - \frac{7et^2}{4} + \frac{5et^3}{4} - \frac{11et^4}{24} + \frac{3et^5}{40} \right) dt \\ &= \frac{137e}{240} - \frac{53et}{40} + \frac{53et^2}{48} - \frac{7et^3}{12} + \frac{5et^4}{16} - \frac{11et^5}{120} + \frac{et^6}{80} \\ &\vdots \end{aligned}$$

با محاسبه هفت جمله اول سری (۶)، جواب تقریبی مثال ۱ به صورت زیر به دست می آید:

$$y(t) \approx \varphi_v(t) = y_0(t) + \dots + y_7(t) = -\frac{8905743e}{9979200} + \frac{4707699et}{3628800} - \frac{14719et^2}{13440} + \dots + \frac{et^{11}}{4435200}. \quad (15)$$

روش پیشنهادی اول

به جای استفاده از بسط تیلور تابع  $\frac{e^t}{t}$  حول نقطه  $t=1$ ، از بسط حول نقطه  $t=1/5$  به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{e^t}{t} \approx \frac{1}{5} + \frac{4}{5}e^{1/5}t - \frac{2}{5}e^{2/5}t^2 + \frac{1}{5}e^{3/5}t^3 - \frac{1}{5}e^{4/5}t^4 + \frac{1}{5}e^{5/5}t^5 - \dots \quad (16)$$

با قرار دادن (۱۶) به جای تابع معلوم در (۱۱) و روندی مشابه جواب تقریبی زیر حاصل می شود:

$$y(t) \approx \varphi_v(t) = y_0(t) + y_1(t) + \dots + y_7(t) = -2/11087 + 2/20566t - 0/89707t^2 + \dots + 9/70284 \times 10^{-8}t^{11} \quad (17)$$

روش پیشنهادی دوم

با افزایش بازه  $[1, 2]$  به دو زیر بازه  $[1, 1/5]$  و  $[1/5, 2]$ ، معادله دیفرانسیل (۷) به دو معادله دیفرانسیل به صورت:

$$y'(t) = y(t) + \frac{e^t}{t}, \quad y(1) = 0, \quad 1 \leq t < 1/5, \quad (18)$$

و

$$y'(t) = y(t) + \frac{e^t}{t}, \quad y(1/5) = \alpha_0, \quad 1/5 \leq t \leq 2. \quad (19)$$

تبدیل می شود.

ابتدا جواب تقریبی معادله (۱۸) را در بازه  $[1, 1/5]$  توسط روش تجزیه به دست می آوریم. پاسخ این معادله به صورت زیر است.

$$\bar{\varphi}_v(t) = y_0(t) + y_1(t) + \dots + y_7(t) = -\frac{8905743e}{9979200} + \frac{4707699et}{3628800} - \frac{14719et^2}{13440} + \dots + \frac{et^{11}}{4435200}. \quad (20)$$

حال معادله (۱۹) را بر بازه  $[1/5, 2]$  در نظر بگیرید. برای حل معادله در این بازه لازم است که مقدار  $y(1/5) = \alpha_0$  را تعیین کنیم. مقدار  $\alpha_0$  را با استفاده از جواب تقریبی جواب به دست آمده در بازه قبلی یعنی  $\bar{\varphi}_v(t)$ ، از  $[1, 1/5]$  به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$\alpha_0 = y(1/5) \approx \bar{\varphi}_v(1/5) = 1/81913$$

اکنون می‌توان روش تجزیه را برای معادله (۱۹) به کار برد. با محاسبه هفت جمله اول جواب تقریبی در بازه دوم به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_v(t) &= y_0(t) + y_1(t) + \dots + y_7(t) \\ &= -2/10664 + 2/23924t + \dots + 9/702284 \times 10^{-8} t^{11} \end{aligned} \quad (21)$$

بنابراین جواب حاصل از روش دوم به صورت زیر است

$$\varphi_v(t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_v(t), & 1 \leq t < 1/5 \\ \tilde{\varphi}_v(t), & 1/5 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad (22)$$

خطای مطلق روش تجزیه و روش‌های اول و دوم محاسبه و در جدول ۱ ارایه شده‌اند.

$t$	خطای روش تجزیه	خطای روش اول	خطای روش دوم
۱	۰	۰	۰
۱/۱	$1/55 \times 10^{-7}$	$2/48 \times 10^{-4}$	$1/55 \times 10^{-7}$
۱/۲	$9/34 \times 10^{-6}$	$3/40 \times 10^{-4}$	$9/34 \times 10^{-6}$
۱/۳	$1/50 \times 10^{-4}$	$3/88 \times 10^{-4}$	$1/50 \times 10^{-4}$
۱/۴	$5/38 \times 10^{-4}$	$4/30 \times 10^{-4}$	$5/38 \times 10^{-4}$
۱/۵	$1/96 \times 10^{-3}$	$4/78 \times 10^{-4}$	$1/96 \times 10^{-3}$
۱/۶	$5/61 \times 10^{-3}$	$5/27 \times 10^{-4}$	$2/16 \times 10^{-3}$
۱/۷	$1/36 \times 10^{-2}$	$5/85 \times 10^{-4}$	$2/39 \times 10^{-3}$
۱/۸	$2/93 \times 10^{-2}$	$6/46 \times 10^{-4}$	$2/65 \times 10^{-3}$
۱/۹	$5/75 \times 10^{-2}$	$6/94 \times 10^{-4}$	$2/97 \times 10^{-3}$
۲	$1/55 \times 10^{-1}$	$6/84 \times 10^{-4}$	$3/40 \times 10^{-3}$

جدول ۱: خطای مطلق حاصل از روش تجزیه و روش‌های پیشنهادی در مثال ۱

**مثال ۲** مساله مقدار اولیه غیر خطی

$$y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y(t)}{t} - y'(t), \quad y(1) = -1, \quad 1 \leq t \leq 2. \quad (23)$$

را در نظر بگیرید. جواب تحلیلی این معادله  $y(t) = -\frac{1}{t}$  است.

این معادله را با روش تجزیه و روش‌های پیشنهادی حل و جواب‌ها را مقایسه می‌کنیم. با به کارگیری روش تجزیه

$$y_0 = -1 + \int_1^t \frac{1}{t^2} dt, \quad \text{داریم} \quad (24)$$

$$y_1 = -\int_1^t \frac{1}{t} y_0 dt - \int_1^t A_0 dt,$$

$$y_{i+1} = -\int_1^t \frac{y_i}{t} dt - \int_1^t A_i dt, \quad i = 1, 2, \dots$$

اکنون با استفاده از بسط تیلور مرتبه چهار حول نقطه  $t=1$ ، برای توابع  $\frac{1}{t}$  و  $\frac{1}{t^2}$

(۲۵)

$$\frac{1}{t^2} \approx 10 - 20t + 15t^2 - 10t^3 + 5t^4$$

و

$$\frac{1}{t} \approx 5 - 10t + 10t^2 - 5t^3 + t^4$$

(۲۶)

و با توجه به رابطه (۲۴) داریم

$$y_0 = -1 + \int_1^t (10 - 20t + 15t^2 - 10t^3 + 5t^4) dt = -6 + 10t - 20t^2 + 15t^3 - 10t^4 + t^5$$

$$y_1 = -\int_1^t (5 - 10t + 10t^2 - 5t^3 + t^4) y_0 dt - \int_1^t y_0^2 dt = 0/7365 - 6t + 22/5t^2 - \dots - 0/0909091t^{11}$$

⋮

با ادامه این روند تقریب چهار جمله‌ای زیر حاصل می‌شود.

$$y(t) = \varphi_4(t) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 = -5/4664 + 10/4634t + 1/0989t^2 - \dots - 0/012t^{33}$$

با استفاده از روش‌های پیشنهادی اول و دوم و بر اساس آنچه در مثال یک اعمال شد معادله (۲۳) را حل کرده

و نتایج حاصل از مقایسه با جواب دقیق  $y(t) = -\frac{1}{t}$  را در جدول (۲) خلاصه می‌کنیم.

$t$	خطای روش تجزیه	خطای روش اول	خطای روش دوم
۱	۰	۰	۰
۱/۱	$1/06 \times 10^{-6}$	$1/35 \times 10^{-3}$	$1/06 \times 10^{-6}$
۱/۲	$6/26 \times 10^{-5}$	$1/82 \times 10^{-3}$	$6/26 \times 10^{-5}$
۱/۳	$6/60 \times 10^{-4}$	$2/04 \times 10^{-3}$	$6/60 \times 10^{-4}$
۱/۴	$3/45 \times 10^{-3}$	$2/20 \times 10^{-3}$	$3/45 \times 10^{-3}$
۱/۵	$1/23 \times 10^{-2}$	$2/35 \times 10^{-3}$	$7/20 \times 10^{-2}$
۱/۶	$3/44 \times 10^{-2}$	$2/51 \times 10^{-3}$	$7/68 \times 10^{-2}$
۱/۷	$8/14 \times 10^{-2}$	$2/66 \times 10^{-3}$	$8/20 \times 10^{-2}$
۱/۸	$1/69 \times 10^{-1}$	$2/77 \times 10^{-3}$	$9/06 \times 10^{-2}$
۱/۹	$3/17 \times 10^{-1}$	$2/75 \times 10^{-3}$	$1/13 \times 10^{-3}$
۲	$5/44 \times 10^{-1}$	$2/31 \times 10^{-3}$	$1/76 \times 10^{-3}$

جدول ۲: خطای مطلق حاصل از روش تجزیه و روش‌های پیشنهادی در مثال ۲

### نتیجه‌گیری

نتایج عددی نشان می‌دهند که اگر در روش تجزیه به جای استفاده از بسط تیلور حول نقطه ابتدای بازه برای تابع معلوم، از چند جمله‌ای‌های یکنواخت‌تری استفاده کنیم آن‌گاه جوابی که از روش تجزیه حاصل می‌شود یکنواخت‌تر خواهد بود. به عبارت دیگر دقیق بودن چند جمله‌ایی که به عنوان تقریب برای تابع معلوم به کار می‌بریم ارتباط مستقیمی با دقت جواب تقریبی حاصل از روش تجزیه دارد.

منابع

- [1] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [2] G. Adomian, Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics, Kluwer , Dordrecht, 1989.
- [3] Y. Cherruault, Convergence of Adomian s method, Kybernets 18 (2) (1989) 31–39.
- [4] Y. Cherruault, and G.Adomian, Decomposition methods: A New Proof of convergence, Math. Copmut. Modelling 18 (12), 103-106, (1993).
- [5] Richard L. Burdan, J. Dauglas Faires, Numreical Analysis, Seventh Edition, Brooks /Cole, 2001.

Archive of SID