

سری های توانی با ضرایب تابعی و کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و با شرایط اولیه

علی خوش کنار*، محمود سعیدی، موسی ایلی

گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت

چکیده

در این مقاله سری های توانی با ضرایب تابعی معرفی و مطالبی در مورد همگرایی و مشتق گیری از آن ها بیان شده و کاربرد این نوع سری ها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و با شرایط اولیه، مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: سری های توانی، همگرایی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، شرایط اولیه.

۱ مقدمه

سری های توانی معمولی (با ضرایب عددی) حالت خاصی از سری های توابع هستند که روی زیر مجموعه های معینی از \mathbf{R} به نام بازه ی همگرایی تعریف شده اند. از لحاظ ظاهری یک سری توانی با ضرایب تابعی همانند یک سری توانی معمولی است با این تفاوت که به جای ضرایب عددی، توابع قرار گرفته اند. این سری ها نیز حالت خاصی از سری های توابع هستند و اگر ضرایب روی یک زیر مجموعه ی \mathbf{R}^n تعریف شده باشند بررسی همگرایی آن ها نیز روی یک زیر مجموعه معینی از \mathbf{R}^{n+1} صورت می گیرد. در این مقاله فرض می کنیم $n = 1$. همان طور که می دانیم یکی از کاربردهای سری های توانی معمولی، حل دسته ای از معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه است. مشابه چنین کاربردی برای سری های توانی با ضرایب تابعی نیز وجود دارد. در واقع از این گونه سری ها برای حل برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و با شرایط اولیه استفاده می کنیم.

۲ سری های توانی با ضرایب تابعی

در این بخش به معرفی و بررسی وضعیت همگرایی سری های توانی و همچنین شرایطی را که تحت آن می توان از این سری ها نسبت به متغیرها مشتق گیری نمود، می پردازیم.

۱-۲ تعریف

اگر E و F زیرمجموعه‌هایی از \mathbf{R} و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی روی E باشد آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n$ را یک سری تابعی روی $U = E \times F$ می‌نامیم.

۲-۲ قضیه‌های مهم

۱-۲-۲ قضیه (مشتق و همگرایی یک شکل)

اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع مشتق پذیر روی $[a, b]$ باشد به طوری که $\{f'_n\}$ بر $[a, b]$ همگرای یک شکل و به ازای نقطه‌ای مانند x_0 متعلق به $[a, b]$ دنباله $\{f_n(x_0)\}$ همگرا باشد آن گاه $\{f_n\}$ روی $[a, b]$ همگرای یک شکل به تابعی مانند f است که این تابع بر $[a, b]$ مشتق پذیر است و برای هر $x \in [a, b]$ ،

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$$

اثبات: به [۱] مراجعه کنید.

۲-۲-۲ قضیه (مشتق گیری از یک سری توانی با ضرایب تابعی)

فرض کنیم E و F زیرمجموعه‌های بازی در \mathbf{R} باشند. قرار می‌دهیم $U = E \times F$ و فرض می‌کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی روی E باشد که مشتق مرتبه دوم تمامی جملات آن موجود و پیوسته اند و همچنین فرض می‌کنیم سری $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n$ نیز روی U همگرای نقطه‌ای باشد. در این صورت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(x)t^{n-1} \quad , t \in F \text{ و هر } x \in E$$

$$\text{و } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)f_n(x)t^{n-2}$$

ب) اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)t^n$ روی U همگرای نقطه‌ای و سری $\sum_{n=0}^{\infty} f''_n(x)t^n$ روی U نسبت به x همگرای یک شکل باشد، آن گاه برای هر $x \in E$ و هر $t \in F$ ،

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f''_n(x)t^n \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)t^n$$

اثبات: فرض می‌کنیم $x_0 \in E$ و $t_0 \in F$.

الف) چون سری $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)t^n$ روی مجموعه باز F همگراست پس روی F نسبت به متغیر t از هر مرتبه مشتق پذیر است. بنابراین مشتق‌های آن از هر مرتبه در نقطه t_0 موجودند و

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n \right) \Big|_{(x_0, t_0)} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) t^n \right) \Big|_{t=t_0} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(x_0) t_0^{n-1}$$

همچنین

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n \right) \Big|_{(x_0, t_0)} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) t^n \right) \Big|_{t=t_0} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) f_n(x_0) t_0^{n-2} .$$

ب) چون E و F مجموعه های باز هستند پس یک عدد حقیقی و مثبت مانند r وجود دارد که

$[t_0 - r, t_0 + r] \subseteq F$ و $[x_0 - r, x_0 + r] \subseteq E$ قرار می دهیم $p_0 = (x_0, t_0)$ و داریم
 $[x_0 - r, x_0 + r] \times [t_0 - r, t_0 + r] \subseteq U$. اکنون دنباله های توابع $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ ، $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ و $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ و همچنین تابع های حقیقی F ، G و H را روی $[x_0 - r, x_0 + r]$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i(x) t_0^i, \quad G_n(x) = \sum_{i=0}^n f'_i(x) t_0^i, \quad H_n(x) = \sum_{i=0}^n f''_i(x) t_0^i, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t_0^n,$$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) t_0^n \quad \text{و} \quad H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f''_n(x) t_0^n .$$

داریم که $G'_n(x) = H_n(x)$ و $G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x)$.

چون سری $\sum_{n=0}^{\infty} f''_n(x) t_0^n$ روی U نسبت به x همگرایی یک شکل است پس برای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند N وابسته به ε و t_0 (مستقل از x) وجود دارد که برای هر $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ و هر $n \geq N$

$$|H_n(x) - H(x)| = \left| \sum_{i=0}^n f''_i(x) t_0^i - \sum_{n=0}^{\infty} f''_n(x) t_0^n \right| < \varepsilon$$

بنابراین $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ روی $[x_0 - r, x_0 + r]$ همگرایی یک شکل به H است، پس بنا به قضیه (۲-۲-۱)، $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ روی $[x_0 - r, x_0 + r]$ همگرایی یک شکل به G است و برای هر $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$

موجود است به ویژه در x_0 . در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) t_0^n \right) \Big|_{(x_0, t_0)} = \frac{d}{dx} (G(x)) \Big|_{x=x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x_0) t_0^n$$

چون $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ روی $[x_0 - r, x_0 + r]$ همگرایی یک شکل به G است و $F'_n(x) = G_n(x)$ و $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$ ، پس قضیه (۲-۲-۱)، همگرایی یک شکل $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ به F را روی $[x_0 - r, x_0 + r]$ ایجاب می کند. بنابراین F در هر نقطه از $[x_0 - r, x_0 + r]$ مشتق پذیر است به ویژه در x_0 . در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n \right) \Big|_{(x_0, t_0)} = \frac{d}{dx} (F(x)) \Big|_{x=x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x_0) t_0^n .$$

۳-۲-۲ قضیه $\{f_n\}$ روی U همگرایی یک شکل به تابع f است اگر و تنها اگر $\{f_n\}$ روی U یک دنباله کوشی یک شکل باشد.

اثبات) به [۱] مراجعه کنید.

۴-۲-۲ قضیه فرض کنیم E و F زیرمجموعه‌هایی از \mathbf{R} و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی روی E باشد. اگر

$$\{a_n\} \text{ دنباله‌ای از اعداد حقیقی نامنفی باشد که برای هر } x \in E \text{ و هر } n \in \mathbf{N} \text{، } |f_n(x)| \leq a_n \text{ و سری } \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

روی F همگرایی مطلق باشد آن گاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n$ نسبت به x همگرایی یک شکل است.

اثبات) چون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ روی F همگرایی مطلق است پس برای هر $t \in F$ و هر $\varepsilon > 0$ ، عددی طبیعی مانند N

وابسته به t و ε هست که برای هر $N \leq n < m$ ، $\sum_{k=n+1}^m a_k |t|^k < \varepsilon$ ، در نتیجه برای هر $t \in F$ و هر $\varepsilon > 0$ ،

عددی طبیعی مانند N وابسته به t و ε هست که برای هر $x \in E$ و برای هر $N \leq n < m$ ،

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) t^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m a_k |t|^k < \varepsilon . \text{ بنابراین سری } \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n \text{ روی } U \text{ نسبت به } x \text{ همگرایی یک شکل}$$

است.

۳ حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کمک سری‌های توانی با ضرایب تابعی

در این قسمت فرض می‌کنیم E زیرمجموعه‌ی بازی از اعداد حقیقی و u تابعی حقیقی روی $U = E \times \mathbf{R}$

باشد که مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن نسبت به x و t موجود و پیوسته‌اند.

$$۱-۳ \text{ معادله گرما } u_t = c^2 u_{xx}$$

معادله گرما $u_t = c^2 u_{xx}$ را که c یک عدد حقیقی مثبت است با شرط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ در نظر می‌گیریم.

اگر مشتق تابع حقیقی f از هر مرتبه روی E موجود و پیوسته و دنباله‌ی توابع $\{f^{(n)}\}$ روی E کراندار

یک شکل باشد آن گاه معادله گرما، جوابی یکتا به صورت $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) t^n$ دارد که:

(الف) در شرط اولیه صدق می‌کند.

(ب) روی U همگرایی نقطه‌ای است.

(پ) روی U نسبت به x همگرایی یک شکل است.

اثبات) فرض می‌کنیم $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) t^n$ و با جای گذاری در معادله داریم که،

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) u_{n+1}(x) t^n = c^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x) t^n$$

بنابراین به ازای هر $(n+1)u_{n+1}(x) = c^2 u_n''(x)$, $n \geq 0$. با توجه به شرط اولیه، $u_0(x) = f(x)$ و با استقراء ریاضی می توان نشان داد که برای هر $1 \leq n$, $u_n(x) = \frac{c^{2n}}{n!} f^{(2n)}(x)$. این فرمول ها سری $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ را به طور منحصر بفرد مشخص می کنند.

اکنون اعتبار مشتق گیری از سری $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ را روی U نسبت به متغیرهای x و t و همچنین همگرایی آن را بررسی می کنیم. چون دنباله ی توابع $\{f^{(n)}\}$ روی E کراندار یک شکل است پس عددی مثبت مانند M وجود دارد به طوری که برای هر $x \in E$ و هر $n \geq 0$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$. اگر دنباله عددی $\{a_n\}$ را به صورت $a_n = \frac{M}{n!} c^{2n}$ تعریف کنیم، آن گاه برای هر $x \in E$ و هر $n \geq 1$ داریم که $0 \leq a_n$ و $|u_n(x)| \leq a_n$ و $|u_n'(x)| \leq a_n$. بنابراین برای هر $(x, t) \in U$ ، و هر $n \geq 1$ ، $|u_n(x)t^n| \leq a_n |t|^n$ و $|u_n'(x)t^n| \leq a_n |t|^n$. چون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |t|^n = M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{2n}}{n!} |t|^n$ در نتیجه سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ روی R همگرای مطلق است، پس همگراست. بنابراین سری های $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)t^n$ روی U همگرای نقطه ای هستند و همچنین بنابه قضیه (۲-۲-۴)، نسبت x به همگرای یک شکل اند. پس قضیه (۲-۲-۲)، ایجاب می کند که فرمول های زیر برقرارند.

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n(x)t^{n-1}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)t^n$$

و

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)t^n.$$

مثال ۳-۱-۱ اگر فرض کنیم E زیرمجموعه ی باز و کراندار در R باشد آن گاه معادله گرما $u_t = c^2 u_{xx}$ با شرط اولیه $u(x,0) = -x^2$ جوابی یکتا به صورت $u(x,t) = -x^2 - 2c^2 t$ روی $U = E \times R$ دارد.

۲-۳ معادله موج یک بعدی $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

هرگاه مشتق توابع f و g از هر مرتبه روی E موجود و پیوسته و دنباله ی توابع $\{f^{(2n)}\}$ و $\{g^{(2n)}\}$ روی E کراندار یک شکل باشند آن گاه معادله موج یک بعدی $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ با شرایط اولیه $u(x,0) = f(x)$ و $u_t(x,0) = g(x)$ جوابی یکتا به صورت $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ دارد که:

الف) در شرایط اولیه صدق می کند.

ب) روی U همگرای نقطه ای است. پ) روی U نسبت به x همگرای یک شکل است.

اثبات) اگر فرض کنیم $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ آن گاه با قرار دادن آن در معادله موج داریم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)u_{n+2}(x)t^n = c^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)t^n$$

بنابراین به ازای هر $n \geq 0$ ، $(n+1)(n+2)u_{n+2}(x) = c^2 u_n''(x)$ ، بنابه شرایط اولیه، $u_0(x) = f(x)$ و

$u_1(x) = g(x)$ و با استقراء ریاضی می توان نشان داد که برای هر $n \geq 1$ ، $u_{2n}(x) = \frac{c^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(x)$ و

$u_{2n+1}(x) = \frac{c^{2n}}{(2n+1)!} g^{(2n)}(x)$. این فرمول ها سری $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ را به طور منحصر بفرد مشخص می کنند.

حال مجاز بودن مشتق گیری از سری $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ ، نسبت به متغیرهای x و t و همچنین همگرایی آن را ثابت

می کنیم. با توجه به کراننداری یک شکل دنباله های توابع $\{f^{(2n)}\}$ و $\{g^{(2n)}\}$ روی E ، عددی مثبت مانند M وجود دارد به طوری که برای هر $x \in E$ و هر $n \geq 0$ ، $|f^{(2n)}(x)| \leq M$ و $|g^{(2n)}(x)| \leq M$

اگر دنباله عددی $\{a_n\}$ را به صورت

$$a_n = \begin{cases} \frac{c^n}{n!} M & n = 0, 2, 4, \dots \\ \frac{c^{n-1}}{n!} M & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

تعریف کنیم. آن گاه برای هر $x \in E$ و هر $n \geq 0$ ، داریم که $0 \leq a_n$ ، $|u_n(x)| \leq a_n$ ، $|u_n'(x)| \leq a_n$

و $|u_n''(x)| \leq a_n$. بنابراین برای هر $(x,t) \in U$ و هر $n \geq 0$ ، $|u_n(x)t^n| \leq a_n |t|^n$ ، $|u_n'(x)t^n| \leq a_n |t|^n$ ،

و $|u_n''(x)t^n| \leq a_n |t|^n$. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n |t|^n$ به ازای هر مقدار t همگراست پس سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ روی \mathbf{R}

همگرای مطلق است، در نتیجه همگراست. بنابراین سری های $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x)t^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x)t^n$

روی U همگرای نقطه ای هستند و همچنین بنابه قضیه (۲-۲-۴)، نسبت به x همگرای یک شکل اند. پس بنا به

قضیه (۲-۲-۲)، فرمول های مشتق گیری از $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ نسبت به x و t برقرارند.

مثال ۳-۲-۱ معادله موج یک بعدی را با شرایط اولیه $u(x,0) = \sin(x)$ و $u_t(x,0) = \cos(x)$ در نظر

می گیریم که $x \in E = \mathbf{R}$. در این حالت تمام جملات دنباله های $\{f^{(2n)}\}$ و $\{g^{(2n)}\}$ توابعی به صورت

$\pm \sin(x)$ یا $\pm \cos(x)$ هستند. بنابراین، این دنباله ها روی E کراندار یک شکل اند. در نتیجه

$U = E \times \mathbf{R}$ این جواب روی $u(x,t) = \sin(x) + \cos(x)t + \frac{(-1)c^2}{2!} \sin(x)t^2 + \frac{(-1)c^2}{3!} \cos(x)t^3 + \dots$

همگرای نقطه ای و نسبت به x همگرای یک شکل است و می توانیم آن را به صورت

$$u(x,t) = \sin(x) \cos(ct) + \cos(x) \frac{\sin(ct)}{c}$$

۳-۳ معادله تریکومی $tu_{xx} + u_{tt} = 0$

این معادله با شرایط اولیه $u(x,0) = f(x)$ و $u_t(x,0) = g(x)$ جوابی به صورت $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ دارد که $u_1(x) = g(x)$ ، $u_0(x) = f(x)$ و

$$u_{2n+2} = 0 \quad n = 0,1,2,3,\dots$$

$$u_{3n} = \frac{(-1)^n}{2 \times 3 \times 5 \times 6 \times \dots \times (3n-1) \times (3n)} f^{(2n)}(x) \quad n = 1,2,3,\dots$$

$$u_{3n+1} = \frac{(-1)^n}{3 \times 4 \times 6 \times 7 \times \dots \times (3n) \times (3n+1)} g^{(2n)}(x) \quad n = 1,2,3,\dots$$

بنابراین

$$u(x,t) = \left(f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 3 \times 5 \times 6 \times \dots \times (3n-1) \times (3n)} f^{(2n)}(x) t^{3n} \right) + \left(g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \times 4 \times 6 \times 7 \times \dots \times (3n) \times (3n+1)} g^{(2n)}(x) t^{3n+1} \right)$$

چون سری های

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \times 4 \times 6 \times 7 \times \dots \times (3n) \times (3n+1)} t^{3n+1} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 3 \times 5 \times 6 \times \dots \times (3n-1) \times (3n)} t^{3n}$$

روی \mathbf{R} همگرایی مطلق اند پس همگرا هستند. حال اگر دنباله های توابع $\{f^{(2n)}\}$ و $\{g^{(2n)}\}$ روی E کراندار

یک شکل باشند، آن گاه هر یک از سری های $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 3 \times 5 \times 6 \times \dots \times (3n-1) \times (3n)} f^{(2n)}(x) t^{3n}$

و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \times 4 \times 6 \times 7 \times \dots \times (3n) \times (3n+1)} g^{(2n)}(x) t^{3n+1}$ روی U همگرایی نقطه ای و نسبت به x همگرایی

یک شکل هستند. بنابراین سری

$$u(x,t) = \left(f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \times 3 \times 5 \times 6 \times \dots \times (3n-1) \times (3n)} f^{(2n)}(x) t^{3n} \right) + \left(g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \times 4 \times 6 \times 7 \times \dots \times (3n) \times (3n+1)} g^{(2n)}(x) t^{3n+1} \right)$$

نیز چنین است.

مثال ۳-۳-۱ اگر $u(x,0) = \sin(x)$ و $u_t(x,0) = \cos(x)$ آن گاه معادله تریکومی روی $U = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$

جوابی به صورت زیر دارد.

$$u(x,t) = \sin(x) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \times 3 \times 5 \times 6 \times \dots \times (3n-1) \times (3n)} t^{3n} \right) + \cos(x) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \times 4 \times 6 \times 7 \times \dots \times (3n) \times (3n+1)} t^{3n+1} \right)$$

۴ نتیجه گیری

کاری که در این مقاله انجام شد معرفی سری های توانی با ضرایب تابعی و استفاده از آن ها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بود. در واقع با اثبات چند قضیه جالب در خصوص همگرایی و مشتق گیری از این سری ها توانستیم معادلات مهمی را به روش سری های توانی حل کنیم و دیدیم که جواب های به دست آمده به شرایط اولیه بستگی دارند.

یکی از مزیت های مهم این روش سهولت محاسبه جواب ها برای معادلات مورد بحث است که نیازی به انتگرال گیری ندارند ولی نسبت به روش های حل کلاسیک، دامنه عمل کمتری دارد. این روش بیشتر برای معادلات با ضرایب ثابت به کار گرفته شد اما همان طور که دیدیم برای معادلات با ضرایب غیر ثابت نیز قابل استفاده است.

نکته دیگر این که، در معادلاتی که مورد بحث قرار دادیم متغیر x در تابع u ، یک بعدی بود. ما می توانیم تعاریف و قضیه ها را برای حالتی که x یک متغیر چند بعدی است تعمیم دهیم و به کمک آن معادلات چند بعدی (در حالت کلی n بعدی) از جمله گرما، موج و لاپلاس را حل کنیم. حتی در مورد معادلات غیر خطی نیز می توان از این روش استفاده کرد هر چند که بحث در مورد همگرایی وضعیت بسیار پیچیده ای پیدا می کند. این موضوعات می توانند ایده هایی برای کارهای آینده باشند.

منابع

- [۱] اصول آنالیز ریاضی والتر رودین انتشارات علمی و فنی.
- [۲] معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دانشگاه پیام نور.