حل عددی معادله دو بعدی انتقال حرارت هدایت در حالت دائم به روش Relaxation

شهرام قربانی فر[1] ، محسن میرزایی[2]
[1]گروه فنی مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی واحد آستارا
[2]گروه علوم پایه دانشگاه آزاد اسلامی واحد آستارا

چکیده

در این مقاله مساله انتقال حرارت دوبعدی در حالت دائم بررسی شده و برای کاربردهای صنعتی، یک روش حل عددی ارایه می گردد که بر مبنای تفاضل محدود استوار می باشد. در این روش ابتدا ناحیه مورد نظر شبکه بندی شده و دمای اولیه آنها حدس زده می شود و سپس با استفاده از اپراتور Relaxation دمای نقاط به گونه ای تصحیح می گردد که مجموع خطا ها کمینه گردد. شبکه بندی یک بار به صورت مربعی انجام می پذیرد و برای افزایش دقت، ناحیه را با المان های مربعی که ۴۵ درجه نسبت به افق دوران یافته اند شبکه بندی می کنیم [1] تا بتوان از نتایج حالت اول استفاده کرده و زمان محاسبات را کاهش داد.

کلمات کلیدی: انتقال حرارت هدایت، حالت دایم، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، روش عددی حل معادله دیفرانسیل، روش Relaxation.

۱ مقدمه

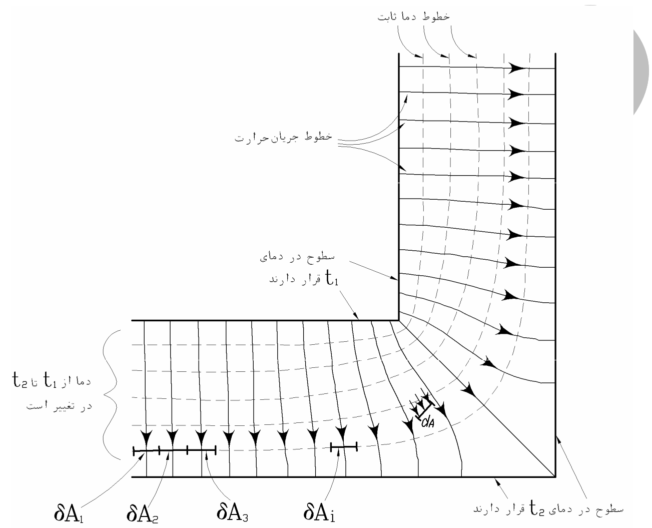
درانتقال حرارت به روش هدایت هنگامی که در یک ماده اختلاف درجه حرارت ایجاد می گردد، انرژی حرارتی به طور خودبخود از نقاط با دمای بیشتر به نقاط با دمای کمتر منتقل می شود. برای توصیف کمی این پدیده از قانون فوریه در هدایت حرارتی استفاده می گردد. این قانون براساس مشاهدات تجربی آزمایشگاهی تبیین شده است. دیواری با هدایت حرارتی k با صفحات موازی به ضخامت dx و به مساحت A در نظر بگیرید که در دو طرف آن اختلاف دمای dt برقرار است. قانون فوریه برای این دیوار در حالت دایم(مستقل از زمان) و یک بعدی به صورت مقابل بیان می گردد:

$$Q = -kA\left(\frac{dt}{dx}\right) \qquad (۱)$$

*عهدار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: sghorbanifar@yahoo.ca

با توجه به این رابطه مشاهده می گردد که محاسبه انتقال حرارت صورت پذیرفته در گرو معلوم بودن گرادیان دما در محیط مورد نظر است. برای مشخص کردن گرادیان دما باید توزیع دما معلوم باشد. بنابراین اهتمام اصلی ما در مسایل انتقال حرارت بر روی یافتن توزیع دما متمرکز می گردد.

انتقال حرارت دو بعدی در حالت دایم و معادلات گرداننده آن برای محاسبه جریان دایم حرارت در حالت دو بعدی از یک هادی با شکل کاملا دلخواه، لازم است توزیع دما بر روی هادی معلوم باشد. در شکل (۱) مقطع جسم همگن جامدی به ضخامت واحد طول (عمود بر صفحه) در حالت دو بعدی نشان داده شده است.



شکل ۱: نمایش خطوط جریان حرارت و هم پتانسیل

با اتصال نقاط با دما یکسان به یکدیگر، می توان خطوط دمای ثابت را تشکیل داد که با خط چین نشان داده شده اند.

با فرض اینکه جسم ایزوتروپیک است، می توان ادعا نمود که جریان حرارت همیشه در راستایی صورت می پذیرد که دارای بیشترین گرادیان دما باشد، یعنی عمود بر خطوط هم دما. در این شکل، خطوط جریان حرارت با زاویه قائمه خطوط دمای ثابت را قطع می کنند.

جریان حرارت گذرنده از یک المان سطحی dA، بنا بر قانون فوریه برابر است با:

$$dQ = -kdA \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)$$

که در آن $\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)$ گرادیان دما ی عمود بر المان سطح dA است.

با توجه به شکل ۱، یک سطح هم دما را انتخاب کرده و آن را به المان های مساحت δA_1، δA_2،... تقسیم می کنیم. به این ترتیب گرادیان دمایی در هر المان قابل محاسبه خواهد بود. لذا خواهیم داشت:

$$dQ_1 = -k\,\delta A_1 \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_1$$

$$dQ_2 = -k\,\delta A_2 \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_2$$

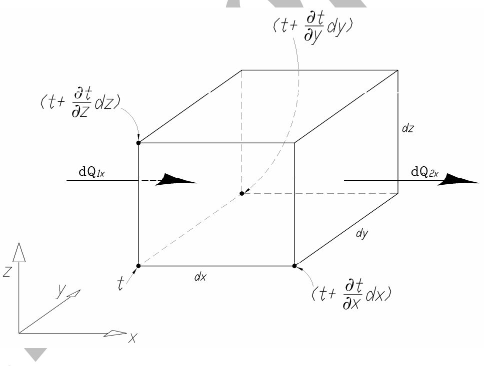
کل حرارت گذرنده از جسم را می توان با انتگرال گیری از این معادله بر روی سرتاسر مساحت A متعلق به سطح هم دما به دست آورد:

$$Q = -\sum_{i=1}^{n} k(\delta A_i)\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_i \qquad (۲)$$

ولی برای استفاده از رابطه فوق باید توزیع دما در داخل جسم تعیین گردد.

۲ معادله دوبعدی حرارت در حالت دایم

برای استخراج معادله دو بعدی حرارت، المان حجمی dV به حجم $dxdydz$ از جسم مورد نظر را در نظر می گیریم. برای سهولت کار، اضلاع المان را در مختصات دکارتی به موازات محور های مختصات فرض می کنیم. (شکل ۲)



شکل ۲: جریان حرارت گذرنده از المان حجمی در راستای x

ایده اصلی در نوشتن معادله دیفرانسیل عبارت است از پیوستگی جریان حرارت یا همان قانون بقای انرژی که در هر حوزه دلخواهی از میدان دمایی برقرار می باشد. یعنی در راستای محور های مختصات، مجموع جریان های ورودی برابر است با مجموع جریان های خروجی. بنابراین اگر مساحتی که جریان در راستای x وارد المان حجم می شود برابر با $dydz$ باشد خواهیم داشت:

$$dQ_{1x} = -k\,(dydz)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$dQ_{2x} = -k\,(dydz)\frac{\partial}{\partial x}\left(t + \frac{\partial t}{\partial x}dx\right)$$

$$dQ_{2x} = -k\,(dydz)\left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}dx\right)$$

و نیز اگر مساحتی که جریان در راستای y وارد المان حجم می شود برابر با $dzdx$ باشد خواهیم داشت:

$$dQ_{1y} = -k\,(dzdx)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)$$

$$dQ_{2y} = -k\,(dzdx)\frac{\partial}{\partial y}\left(t + \frac{\partial t}{\partial y}dy\right)$$

$$dQ_{2y} = -k\,(dzdx)\left(\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}dy\right)$$

همچنین اگر مساحتی که جریان در راستای z وارد المان حجم می شود برابر با $dxdy$ باشد خواهیم داشت:

$$dQ_{1z} = -k\,(dxdy)\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)$$

$$dQ_{2z} = -k\,(dxdy)\frac{\partial}{\partial z}\left(t + \frac{\partial t}{\partial z}dz\right)$$

$$dQ_{2z} = -k\,(dxdy)\left(\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}dz\right)$$

حرارت خالص ورودی به المان حجم برابر است با :

$$\begin{aligned} dQ &= (dQ_{1x} - dQ_{2x}) + (dQ_{1y} - dQ_{2y}) + (dQ_{1z} - dQ_{2z}) \\ &= k\,(dxdydz)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + k\,(dxdydz)\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + k\,(dxdydz)\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \\ &= k\,(dxdydz)\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \end{aligned}$$

در جریان دایم حرارت $dQ=0$ و شرایط دوبعدی خواهیم داشت:

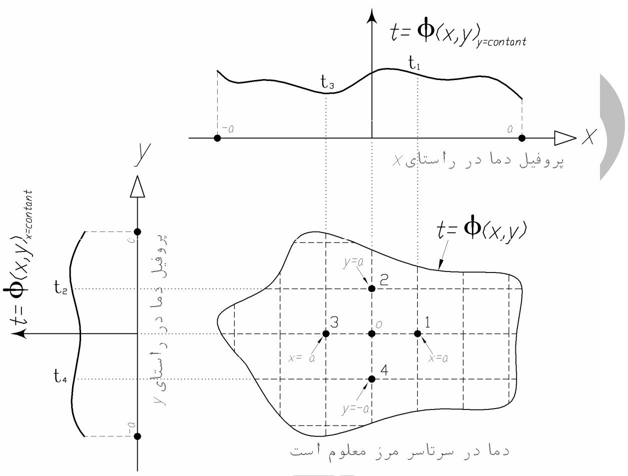
$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \qquad (۳)$$

معادله(۳) به نام معادله دوبعدی حرارت در حالت دایم نامیده می شود.

۲-۱ حل عددی معادله دوبعدی حرارت در حالت دایم

حل تحلیلی معادله دوبعدی حرارت، به جز در چند شکل ساده هندسی، ممکن است بسیار مشکل باشد. جواب نهایی بستگی به شرایط مرزی مساله دارد. ثابت می شود که جواب به دست آمده برای معادله فوق منحصر بفرد است. از این رو حل عددی معادله فوق در شرایط مختلف از اهمیت خاصی بویژه در مهندسی و صنعت برخوردار است[2]. در حل تحلیلی مسایل هدایت که نهایتا می توان دما را به صورت تابعی از x و y به صورت

$t=\phi(x,y)$ به دست آورده وآن را در هر نقطه دلخواهی، حتی در مرز سیستم محاسبه نمود. در حالی که در روش های حل عددی، دمای جسم در چند نقطه محدود محاسبه می گردد. اگر دما به صورت $t=\phi(x,y)$ بیان گردد، نمایش هندسی آن یک رویه فضایی خواهد بود. لذا با یک شبکه شطرنجی این رویه سه بعدی را پوشش می دهیم. می توان به دلخواه هر کدام از نقاط گرهی در شبکه را به عنوان مبدا مختصات انتخاب نمود. برای بررسی تغییرات دما ناچارا باید این رویه را بر روی صفحات دوبعدی تصویر نماییم تا منحنی تغییرات دما در آن صفحه را به دست آوریم.(شکل۳)



شکل ۳: تصویر رویه فضایی دما بر روی محور های مختصات دوبعدی

اغلب می توان تغییرات دما در هر یک از راستا های x و y را بر حسب یک سری توانی بیان نمود. زیرا دما به طور پیوسته تغییر می کند:

$$t=(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots)_{y=\text{constant}}$$
$$t=(c_0+c_1y+c_2y^2+c_3y^3+\dots)_{x=\text{constant}} \tag{۴}$$

با استفاده از سری مک لورن می توان مقدار t را در فاصله x از مبدا مختصات بیان کرد. با استفاده از ضرایب دیفرانسیلی $t=\phi(x)$ در $x=0$:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0}=1b_1 \tag{۵}$$

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{x=0}=1\times 2b_2 \tag{۶}$$

$$\left(\frac{\partial^3 t}{\partial x^3}\right)_{x=0}=1\times 2\times 3b_3 \tag{۷}$$

....

بنابراین تغییرات t در راستای x عبارت است از:

$$t = t_0 + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} \frac{x}{1!} + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 t}{\partial x^3}\right)_{x=0} \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad (۸)$$

مقدار دمای t_1 در فاصله $x=a$ برابر است با:

$$t_1 = t_0 + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} \frac{a}{1!} + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{x=0} \frac{a^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 t}{\partial x^3}\right)_{x=0} \frac{a^3}{3!} + \dots \qquad (۹)$$

و مقدار دمای t_3 در فاصله $x=-a$ برابر است با:

$$t_3 = t_0 - \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} \frac{a}{1!} + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{x=0} \frac{a^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 t}{\partial x^3}\right)_{x=0} \frac{a^3}{3!} + \dots \qquad (۱۰)$$

اگر دو رابطه فوق با هم جمع شوند خواهیم داشت:

$$t_1 + t_3 = 2t_0 + a^2\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_{x=0} \qquad (۱۱)$$

واضح است که با کوچکتر کردن اضلاع شبکه های شطرنجی، دقت این تقریب بالا تر می رود.
یعنی باید a آنقدر کوچک باشد که بتوان از جملات با نمای بالا تر از ۴ صرفنظر کرد[3]. با استدلالی مشابه می توان نشان داد :

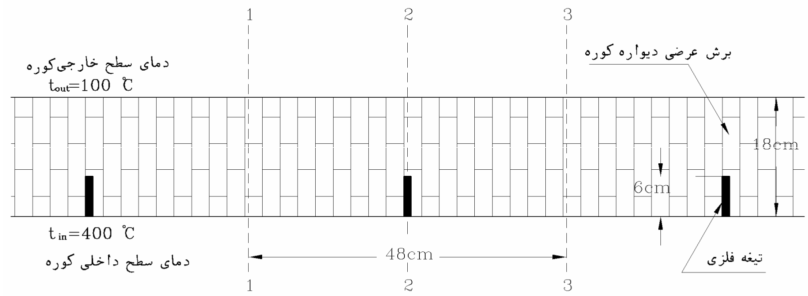
$$t_2 + t_4 = 2t_0 + a^2\left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)_{y=0} \qquad (۱۲)$$

با جایگذاری دو معادله فوق در معادله دوبعدی حرارت، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t_0 = 0 \qquad (۱۳)$$

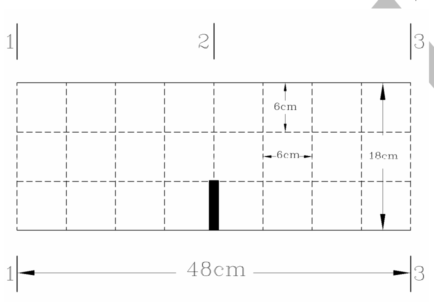
$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t_0 = 0 \qquad (۱۴)$$

معادله(۱۴)، معادله تفاضل محدود نامیده می شود. اکنون با استفاده از این معادله، سعی می کنیم جریان حرارت عبوری از دیوار نشان داده شده در شکل (۴) را که تیغه هایی فلزی در داخل آن قرار دارد حل کنیم. وجود این تیغه ها ماهیت انتقال حرارت را دوبعدی کرده است.



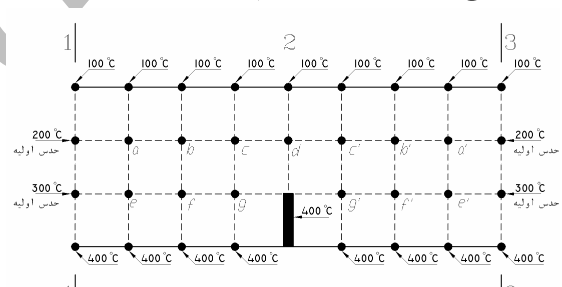
شکل٤: مقطعی از دیواره کوره

با توجه به تکرار تیغه های فلزی در هر $48cm$ و تقارن موجود در هندسه مساله یک قطعه $48cm$ را با شبکه های مربعی به ضلع $6cm$ پوشش می دهیم.(شکل ۵)



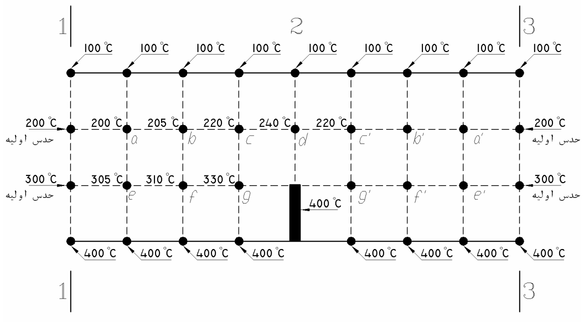
شکل ۵: شبکه بندی قسمتی از دیواره

با توجه به شکل (۱) منطقی است که فرض کنیم گرادیان دما در مقاطع ۱-۱ و۳-۳ بر دیوار عمود می باشند. یعنی گرادیان دما در سرتاسر مقطع ۳-۳ ثابت و عمود بر خطوط جریان است. بدین ترتیب دمای تمام نقاط مرزی شبکه تعیین می شوند. دمای نقاط مرزی با فلش نشان داده شده اند. به دلیل تقارن قطعه مورد بررسی نسبت به مقطع ۲-۲، فقط نقاط سمت چپ مقطع را در نظر می گیریم. (شکل ۶)



شکل ٦ : نمایش شرایط اولیه بر روی نقاط گره

درقدم بعدی باید در سایر نقاط گرهی حدس اولیه ای برای دما داشته باشیم. هر چقدر حدس اولیه به واقعیت نزدیکتر باشد، باعث کوتاه تر شدن پروسه محاسبات خواهد شد. با میانیابی بین دما های معلوم می توان برای سایر نقاط گرهی دمای اولیه ای حدس زد. این حدس را در گوشه بالای سمت چپ هر نقطه می نویسیم. (شکل۷)

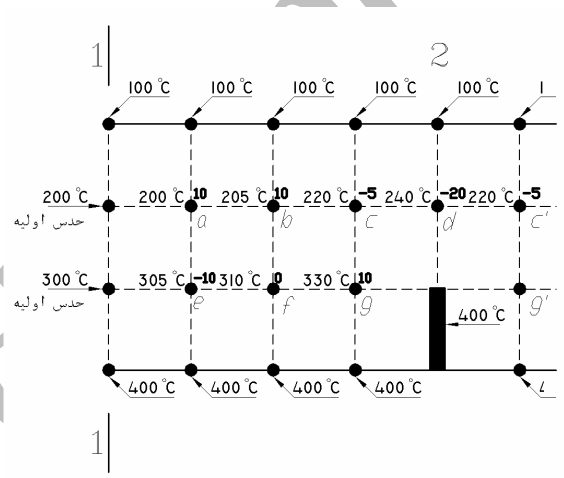


شکل ۷: حدس اولیه دمای نقاط گره که مجهول هستند

رابطه تفاضل محدود در تمام نقاط گرهی صادق است. برای نمونه آن را به نقطه b اعمال می کنیم:

$$t_c + 100 + t_a + t_f - 4t_b = 220 + 100 + 200 + 310 - (4 \times 205) = 10$$

ملاحظه می گردد که خطایی به مقدار 10 وجود دارد. این خطا را باقیمانده(residual) در نقطه b می نامیم. به طریق مشابه، باقیمانده در سایر نقاط گرهی را نیز پیدا کرده و در بالای سمت راست هر نقطه می نویسیم. (شکل ۸)

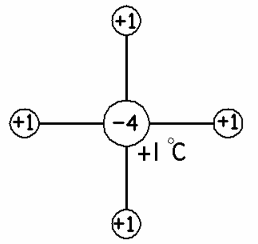


شکل ۸: شروع مراحل تکرار و ایجاد اولین باقیمانده در نقاط

۳ روش Relaxation

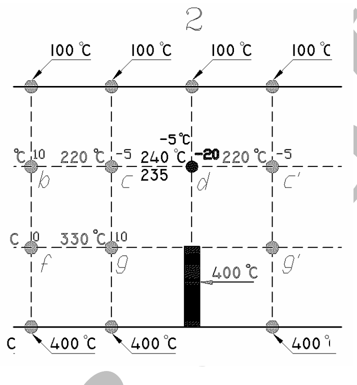
در این روش هدف ما تصحیح دما های حدس زده شده است به گونه ای که مجموع جبری باقیمانده ها به حداقل ممکن برسد.

پروسه تغییر حدس اولیه باید از نقطه ای شروع شود که بیشترین باقیمانده را از نظر مقدار دارد. در اینجا نقطه d بیشترین باقیمانده را دارد که برابر با 20- است. با توجه به رابطه تفاضل محدود به دست آمده، اگر دمای نقطه ای 1درجه افزایش داده شود، باقیمانده آن به اندازه 4- درجه تغییر خواهد کرد. همچنین اگر دمای چهار نقطه همسایه d به اندازه 1 درجه تغییر کند، باقیمانده آن نقاط به اندازه 1+ تغییر خواهد کرد. به طور خلاصه اپراتور روش رلکسیشن در شکل (۹) نشان داده شده است.



شکل ۹: اپراتور **Relaxation**

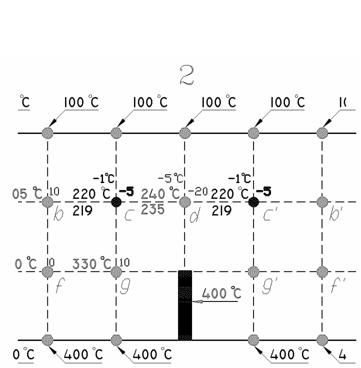
بنابراین برای از بین بردن باقیمانده در d، باید دما را به اندازه $\frac{-20}{4}=-5^oC$ تغییر دهیم. به این ترتیب می توانیم با اعمال تغییر دما در نقطه d به اندازه -5^oC، دمای جدید نقطه d را حدس بزنیم. (شکل ۱۰)



شکل ۱۰: تصحیح دمای اولین نقطه با استفاده از باقیمانده

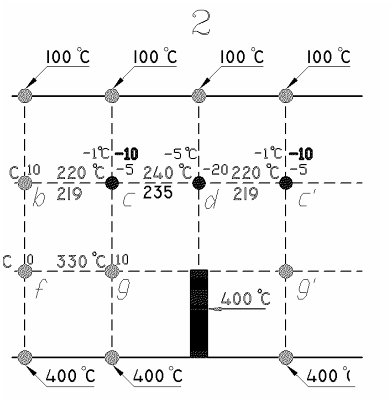
برای از بین بردن باقیمانده در c، باید دما را به اندازه $\left[\frac{-5}{4}\right]=-1^oC$ تغییر دهیم. توجه داشته باشید که در تغییر دما از اعداد کسری اجتناب گردد و اعداد صحیح گرد شده مورد استفاده قرار گیرد، اجباری نیست که باقیمانده ها در هر مرحله حتما صفر شوند[4].

به این ترتیب می توانیم با اعمال تغییر دما در نقطه c به اندازه -1^oC، دمای جدید نقطه c را حدس بزنیم. (شکل ۱۱)



شکل ۱۱ : تصحیح دمای دیگر نقاط با استفاده از باقیمانده

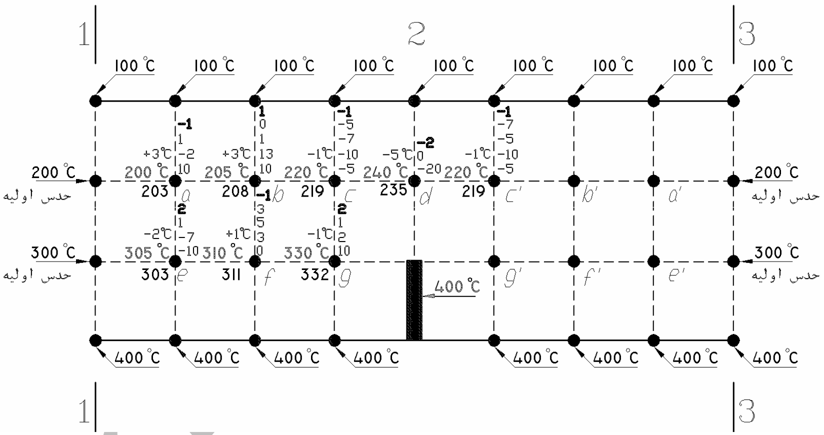
در اثر تغییر دما در نقطه d، باقیمانده جدید در نقاط c و c' از 5- به 10- تغییر می کند. توجه داریم که دو نقطه از ۴ نقطه همسایه نقطه d دمای ثابتی داشته و هیچ تغییری نمی کنند.(شکل۱۲)



شکل ۱۲: ادامه روش تکراری و ایجاد دماهای جدید

از میان مجموعه جدید باقیمانده ها که به روش فوق ایجاد گردید، مجددا بزرگترین آن ها را انتخاب کرده و پروسه فوق را تکرار می کنیم.

حاصل نهایی محاسبات به صورت شکل(۱۳) خواهد بود:



شکل ۱۳: پایان محاسبات و تعیین دمای نقاط گرهی

نتیجه محاسبات در جدول ۱ خلاصه شده است.

	باقیمانده در:	a	b	c,c'	d	e	f	g
	مجموعه باقیمانده ها در آغاز محاسبات:	10	10	5	-20	-10	0	10
مرحله	محاسبات							
(1)	d تغییر درنقطه -5°C	–	–	-10	0	–	–	–
(2)	a تغییر درنقطه +3°C	-2	13	–	–	-7	–	–
(3)	b تغییر درنقطه +3°C	1	1	-7	–	–	3	–
(4)	g تغییر درنقطه +2°C	–	–	-5	–	–	3	–
(5)	e تغییر درنقطه -2°C	-1	–	–	–	1	3	–
(6)	c تغییر درنقطه -1°C	–	0	-1	-2	–	–	1
(7)	f تغییر درنقطه +1°C	–	1	–	–	2	-1	2
	جمع مجموعه باقیمانده ها در انتهای محاسبات=0	-1	1	-1	-2	2	-1	2

جدول ۱

با مشخص شدن توزیع دما در داخل دیوار با استفاده از قیاس " میله های هادی" ، جریان حرارت عبوری قابل محاسبه است.

بر اساس این قیاس، جریان حرارت از نقطه b به سمت دیوار بیرونی کوره (به ازای هر متر ارتفاع دیوار که در شکل عمود بر سطح کاغذ است) برابر است با $k(100-t_b)$ - بنابراین کل حرارت خروجی از این مقطع 48cm با توجه به تقارن هندسی دیوار عبارت است از:

$$Q_{out}=2\left(\frac{k(200-100)}{2}\right)+2k(203-100)+2k(208-100)+2k(219-100)+k(235-100)=895k$$

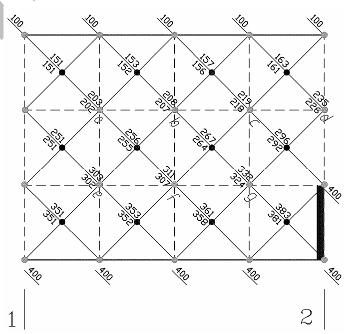
با محاسبه جریان ورودی از وجه داغ دیوار، جواب فوق چک می شود:

$$Q_{in}=2\left(\frac{k(400-300)}{2}\right)+2k(400-303)+2k(400-311)+4k(400-332)+k(400-235)=909k$$

جمله $4k$ به علت تاثیر تیغه فلزی از هر دو سطح خود بر روی نقاط g و g' و جمله $k(400-235)$ به علت تاثیر دمای تیغه فلزی بر روی نقطه d می باشد. لذا:

$$Q=\frac{Q_{in}+Q_{out}}{2}=\frac{909k+895k}{2}=902k$$

برای آن که از دقت جواب مطمئن شویم از شبکه های کوچکتر استفاده می کنیم. به این منظور به گونه ای تقسیم بندی ها را انجام می دهیم که نقاط قبلی نیز زیر مجموعه ای از نقاط جدید باشند و بنابراین به عنوان نقاط معلوم محسوب شده و به میزان قابل توجهی حجم محاسبات را کاهش خواهیم داد. این عمل زمانی میسر است که همانند شکل (۱۴) تقسیم بندی ها به توسط مربعاتی به ضلع $\frac{6}{\sqrt{2}}$ انجام پذیرد.



شکل ۱۴

نتایج بر روی شبکه جدید ثبت شده اند. در این حالت خواهیم داشت:

$$Q=\frac{Q_{in}+Q_{out}}{2}=\frac{862k+880k}{2}=871k$$

اگر تیغه های فلزی استفاده نمی شد، جریان حرارت یک بعدی بوده و انتقال حرارت صورت پذیرفته برابر بود با:

$$Q = -k \ \frac{.48 \times 1100 - 400)}{.18} = 800k$$

٤ نتیجه گیری

یکی از مسایل رایج در صنعت، یافتن توزیع دما بر روی مقطع دیوار کوره های صنعتی و دودکش ها است تا اولا: بررسی شود که دما از میزان قابل تحمل برای مصالح به کار رفته فرا تر نرود و ثانیا: اتلاف حرارتی محاسبه گردد. معادلات گرداننده چنین تحولاتی معمولا از نوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی است. برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی در حالت کلی تا کنون نرم افزارهای متعددی ایجاد و توسعه یافته اند که به دلیل گستردگی و انعطافشان، استفاده از آنها نیازمند تبحر در مشبدی ناحیه مورد نظر وسپس معرفی مدل ریاضی آن مش بندی به نرم افزار است. معمولا یادگیری و استفاده از این نرم افزارها جهت حل یک یا چند مساله کاربردی در صنعت که هر مهندسی ممکن است با آن روبرو گردد از نظر زمانی مقرون به صرفه نیست. روش حاضربا تاکید بر محاسبات دستی مستقیم بر روی هندسه شکل مورد نظر، ابزاری است موثر جهت بررسی مساله انتقال حرارت در حالت دایم با صرف کمترین وقت و انرژی.

منابع

[1] G. F. C. Rogers and Y.R. Mayhew, "Engineering Thermodynamics Work and Hat Transfer, Longman, 1980.
[2] Frank P. Incropera and David P. De Witt, "Introduction to Heat Transfer", John Wiley & Sons, 2002.
[3] J. P. Holman, “Heat Transfer", McGraw Hill, 2001.
[4] FLUENT.INC press may2001.