ترکیب DEA فازی و AHP برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری

زینب صادقی صادق آبادی، صابر ساعتی*، سعید محرابیان، عاطفه خدادوست
گروه ریاضی دانشگاه پیام نور واحد تهران
گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال
گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم
گروه ریاضی دانشگاه پیام نور واحد تهران

چکیده

این مقاله روشی را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری فازی ارایه می‌دهد. توسط ترکیب دو روش تحلیل پوششی داده‌های فازی و AHP، یک مدل تلفیقی فازی با استفاده از مفهوم α-برش ارایه می‌شود که به ازای αهای مختلف، داده‌های فازی در مرحله تشکیل ماتریس مقایسات زوجی تبدیل به داده‌های قطعی می‌شوند. لذا ماتریس مقایسات زوجی حاصل بر اساس α-برش‌های مختلف به دست می‌آید. بنابراین، می‌توان به ازای α-برش‌های مختلف رتبه‌بندی‌های متفاوتی به دست آورد که بر پایه آن می‌توان بهترین گزینه را انتخاب کرد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌های فازی، تحلیل سلسله مراتبی، رتبه‌بندی اعداد فازی، اعداد فازی مثلثی، α-برش.

۱ مقدمه

تصمیم‌گیری یکی از اساسی‌ترین موضوعاتی است که همواره بشر، حتی در زندگی روزمره خود با آن روبرو است. برای انجام یک کار خاص، ممکن است ما با گزینه‌های مختلفی مواجه باشیم که از بین آن ها باید بهترین گزینه را انتخاب نماییم. بسیاری از تصمیم‌ها دارای معیارهای گوناگون کمی و کیفی است که این معیارها در پاره‌ای از مواقع در تعارض با یکدیگر می‌باشند. این نوع تصمیم‌گیری‌ها را تصمیم‌گیری‌های چند معیاره (MCDM) می‌نامند. روش‌های مختلفی برای پشتیبانی از فرآیند تصمیم‌گیری چند معیاره ارایه شده است [۱]. یکی از کاربردی‌ترین فنون تصمیم‌گیری چند معیاره، فرآیند تجزیه و تحلیل سلسله مراتبی (AHP) است که در سال ۱۹۸۰ به وسیله Saaty [۱۰] ارایه شد. این روش برای ارزیابی تصمیم‌گیری‌های چند معیاره پیچیده فردی و گروهی و انتخاب یک گزینه از بین چند گزینه و یا رتبه‌بندی آن ها بر اساس چند معیار و یا مجموعه‌ای از معیارها به کار می‌رود.

*عهدار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: ssaatim@yahoo.com

یکی از مشکلات AHP که معمولا موجب نگرانی تصمیم‌گیرندگان می‌شود وجود قضاوت‌های ذهنی در تشکیل ماتریس مقایسات زوجی است. بنابراین، برای رتبه‌بندی گزینه‌ها بر مبنای مقایسات زوجی روش تحلیل سلسله مراتبی کارایی خوبی ندارد. اخیراً، به کمک روش تحلیل پوششی داده‌ها [۲]، اقدام به بهینه‌سازی روش AHP شده و کارایی این روش را در رتبه‌بندی گزینه‌ها بالا برده‌اند [۶، ۱۱، ۱۳-۱۵].

کاربرد مجموعه‌های فازی در مسایل تصمیم‌گیری یکی از مهمترین و کارآمدترین کاربردهای این نظریه در مقایسه با نظریه مجموعه‌های کلاسیک می‌باشد [۱۷]. در واقع نظریه تصمیم‌گیری فازی، تلاش می‌کند که ابهام و عدم قطعیت‌های ذاتی موجود در ترجیحات، اهداف و محدودیت‌های موجود در مسایل تصمیم‌گیری را بر طرف کند [۱۸]. در بررسی مسایل کاربردی بالاخص در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، داده‌های ورودی و خروجی با مقادیر مقیاس‌های نادقیق مورد بررسی قرار گرفته است. در همین راستا، Cooper و همکارانش [۳]، مساله بررسی تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های نادقیق را عنوان نمودند. در ادبیات تحقیق تحلیل پوششی داده‌ها می‌توانیم چندین رویکرد فازی برای ارزیابی کارایی پیدا نماییم [۴-۹، ۱۲،۱۶].

این مطالعه یک روش رتبه‌بندی جدید با مقایسات اولویت زوجی را پیشنهاد می‌کند. در این مقاله، دو روش DEA و AHP در محیط فازی مورد بررسی قرار می‌گیرند که با استفاده از تلفیق این دو روش، به ارزیابی و رتبه‌بندی گزینه‌ها می‌پردازیم. در روش پیشنهادی ابتدا یک مدل CCR تحلیل پوششی داده‌های فازی و یک مدل کارایی متقاطع برای هر زوج از واحدهای فازی، بدون در نظر گرفتن سایر واحدها، حل می‌گردد. سپس با استفاده از نتایج به دست آمده از حل مدل‌های DEA فازی، ماتریس مقایسات زوجی تشکیل و با حل مدل فرآیند تحلیل سلسله مراتبی، رتبه‌بندی انجام می‌گیرد. در این روش ماتریس مقایسات زوجی بدون وجود قضاوت‌های ذهنی تصمیم‌گیرنده به دست می‌آید.

سازماندهی این مقاله چنین است: در بخش بعدی مرور مختصری در زمینه نظریه مجموعه‌های فازی و مفاهیم مقدماتی آن و برخی تعاریف اولیه تحلیل پوششی داده‌ها به عمل آمده است. در بخش سوم، یک زمینه کوتاه درباره روش رتبه‌بندی ترکیبی DEA و AHP تهیه شده است. روش پیشنهادی برای رتبه‌بندی واحدهای فازی به کمک تحلیل پوششی داده‌های فازی و تحلیل سلسله مراتبی در بخش چهارم ارایه شده است و به دنبال آن برای توضیح بیشتر روش پیشنهادی، یک مثال عددی ارایه می‌گردد. بالاخره در بخش ششم بعضی از نتایج برگرفته از روش پیشنهادی ارایه می‌شود.

۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش، برخی از تعاریف مقدماتی مورد نیاز در ارتباط با نظریه مجموعه‌های فازی و تحلیل پوششی داده‌ها ارایه می‌شود.

۲-۱ نظریه مجموعه‌های فازی

نظریه مجموعه‌های فازی که برای نخستین بار توسط زاده [۱۷] ارایه شد، در حل مسایلی که نمی‌توان پارامترها و کمیت‌ها را به طور دقیق تعریف نمود، مورد استفاده قرار می‌گیرد. تفاوت عمده این نظریه و نظریه مجموعه‌های

کلاسیک در تعریف تابع مشخصه می‌باشد. در منطق فازی، تابع مشخصه از حالت دو مقداری به یک تابع پیوسته با برد $[0,1]$ تبدیل شده است. بدین ترتیب، مفهوم تعلق یا عدم تعلق به مفهوم میزان تعلق تغییر یافته است.

تعریف ۱ فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. آنگاه مجموعه $\tilde{A}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود را یک مجموعه فازی می‌نامند:

$$\tilde{A}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}}(x)\right) \middle| x\in X,\mu_{\tilde{A}}(x)\in[0,1]\right\} \tag{1}$$

μ را تابع عضویت گویند که هر $x\in X$ را به یک مقدار در بازه $[0,1]$ تصویر می‌کند. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ را درجه عضویت x در مجموعه $\tilde{A}$ نامند.

تعریف ۲ یک مجموعه فازی نرمال محدب مانند $\tilde{A}$ از R را یک عدد فازی می‌گویند اگر:
الف) $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تک نمایی باشد یعنی دقیقاً یک $x^{\circ}\in R$ وجود داشته باشد که $\mu_{\tilde{A}}(x^{\circ})=1$،
ب) $\mu_{\tilde{A}}(x)$ قطعه قطعه پیوسته باشد،
ج) $\tilde{A}$ محدب باشد.

انجام محاسبات با اعداد فازی به دلیل ساختار خاص آن ها بسیار زمان‌بر و پیچیده می‌باشد. برای تسهیل و کاربردی نمودن اعداد فازی، اعداد فازی مخصوصی در محاسبات به کار گرفته می‌شود. این اعداد خاص به صورت اعداد زنگوله‌ای، ذوزنقه‌ای، مثلثی، L-R مثلثی و L-R ذوزنقه‌ای هستند. یک عدد فازی مثلثی را می‌توان با سه تایی مرتب (l,m,u) نمایش داد، که l حد پایینی، m مقدار میانی و u حد بالایی هستند.

تعریف ۳ برای زیر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X و برای هر $\alpha\in(0,1]$، α-برش $\tilde{A}$ به صورت مجموعه زیر تعریف می‌شود:

$$A_{\alpha}=\left\{x\in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x)\geq\alpha\right\} \tag{2}$$

۲-۲ تحلیل پوششی داده‌ها

روش تحلیل پوششی داده‌ها اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط Charnes و همکاران [۲] توسعه یافت. آن ها مدل CCR را ارایه دادند که به صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
E = \max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp} \\
s.t.: \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0, \qquad j = 1,2,\dots,n, \\
& u_r \ge 0, v_i \ge 0, \qquad r = 1,2,\dots,s \qquad i = 1,2,\dots,m.
\end{aligned} \tag{3}
$$

که در مدل (۳)، n واحد تصمیم‌گیری برای ارزیابی وجود دارد، که هر واحد دارای m ورودی و s خروجی است. مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های واحد j ام ($j = 1,2,\dots,n$) به ترتیب به صورت x_{ij} ($i = 1,2,\dots,m$) و y_{rj} ($r = 1,2,\dots,s$) نشان داده شده، که همگی مثبت می‌باشند. همچنین v_i و u_r متغیرهای تصمیم‌گیری بوده و به ترتیب بیانگر وزن‌های تخصیص داده شده به ورودی iام و خروجی rام می‌باشند.

۳ روش DEA/AHP برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری

روش ترکیبی DEA و AHP که توسط Stern و همکاران [۱۱] ارایه شد شامل دو مرحله می‌باشد. در این روش ابتدا مدل CCR تحلیل پوششی داده‌ها و یک مدل کارایی متقاطع برای هر زوج از واحدها، بدون در نظر گرفتن سایر واحدها، حل می‌گردد. سپس با استفاده از نتایج به دست آمده از حل مدل‌های DEA، ماتریس مقایسات زوجی تشکیل و با حل مدل فرآیند تحلیل سلسله مراتبی رتبه‌بندی انجام می‌شود.

مدل CCR برای دو واحد تصمیم‌گیری A و B به صورت زیر می‌باشد، که در آن کارایی دوبه دوی هر واحد بدون در نظر گرفتن سایر واحدها به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
E_{AB} = \max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rA} \\
s.t.: \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{iA} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rA} \le 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rB} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{iB} \le 0, \\
& u_r \ge 0, v_i \ge 0, \qquad r = 1,2,\dots,s \qquad i = 1,2,\dots,m.
\end{aligned} \tag{4}
$$

در مدل (۴) کارایی واحد A نسبت به واحد B سنجیده می‌شود. برای محاسبه کارایی متقاطع مدل زیر باید حل شود:

$$\begin{aligned} \theta_{BA} = \max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rB} \\ s.t: \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{iB} = 1, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rB} \le 1, \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rA} - E_{AB} \sum_{i=1}^{m} v_i x_{iA} = 0, \\ & u_r \ge 0, v_i \ge 0, \quad r = 1,2,\dots,s \quad i = 1,2,\dots,m. \end{aligned} \tag{۵}$$

که θ_{BA} مقدار بهینه ارزیابی واحد B می‌باشد. به ترتیب مشابه مقادیر E_{BA} و θ_{AB} را به دست می‌آوریم.

با به کارگیری نتایجی که از حل مدل‌های (۴) و (۵) حاصل می‌شود و با استفاده از رابطه زیر، عناصر ماتریس مقایسات زوجی برای هر زوج واحد A و B تشکیل می‌گردد:

$$a_{AB} = \frac{E_{AB} + \theta_{AB}}{E_{BA} + \theta_{BA}} \quad , \quad a_{AA} = 1 \tag{۶}$$

توجه داشته باشید که ماتریس مقایسات زوجی که عناصر آن از رابطه (۶) به دست می‌آید به طور ذهنی به وسیله تصمیم‌گیرنده ارزیابی نشده است بلکه با استفاده از DEA به صورت مقایسات زوجی محاسبه شده است.

در مرحله دوم با استفاده از AHP به رتبه‌بندی ماتریس مقایسات زوجی حاصل از مرحله اول می‌پردازیم. بر اساس نتایج مرحله اول ماتریس مقایسات زوجی تشکیل یافته است. در واقع در مرحله دوم از فرآیند تحلیل سلسله مراتبی یک مدل دو سطحی (سطح هدف و سطح گزینه‌ها) ایجاد شده است. در این مرحله مدل AHP با استفاده از ماتریس مقایسات زوجی تشکیل یافته، حل و رتبه‌بندی گزینه‌ها صورت می‌پذیرد. با محاسبه وزن از روش بردار ویژه Saaty [۱۰] می‌توانیم رتبه هر واحد را به دست آوریم.

٤ روش پیشنهادی برای رتبه‌بندی واحدهای فازی

در این مقاله، یک مدل تلفیقی از تحلیل پوششی داده‌ها به همراه تحلیل سلسله مراتبی مطرح می‌شود که در آن ورودی و خروجی‌ها فازی هستند. در این روش با استفاده از روش α-برش، به ازای αهای مختلف، داده‌های فازی در مرحله تشکیل ماتریس مقایسات زوجی تبدیل به داده‌های قطعی می‌شوند. پس از حل مدل‌های ارایه شده، ماتریس مقایسات زوجی بر اساس α- برش‌های مختلف به دست می‌آید و با حل مدل فرآیند تحلیل سلسله مراتبی یک سطحی، رتبه‌بندی نهایی انجام می‌گیرد. بنابراین، می‌توان به ازای α- برش‌های مختلف، رتبه‌بندی‌های متفاوتی به دست آورد که بر پایه آن بهترین گزینه انتخاب می‌شود.

فرض کنید، علاقه‌مند به ارزیابی n واحد تصمیم‌گیری هستیم که با استفاده از m ورودی، s خروجی را تولید می‌نماید. اطلاعات ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت اعداد فازی مثلثی $\tilde{x}_{ij}=(x_{ij}^{l},x_{ij}^{m},x_{ij}^{u})$ و $\tilde{y}_{rj}=(y_{rj}^{l},y_{rj}^{m},y_{rj}^{u})$ $(j=1,2,\dots,n,\ r=1,2,\dots,s,\ i=1,2,\dots,m)$ می‌باشد. به دلیل کاربردهای فراوان اعداد فازی مثلثی، داده‌ها را به صورت اعداد فازی مثلثی (l,m,u) در نظر می‌گیریم.

برای هر زوج از واحدهای فازی A و B، کارایی فازی واحد A را نسبت به واحد B می‌توان از حل مدل CCR زیر به دست آورد:

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_{AB} = \max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r (y_{rA}^{l}, y_{rA}^{m}, y_{rA}^{u}) \\
s.t: \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i (x_{iA}^{l}, x_{iA}^{m}, x_{iA}^{u}) = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r (y_{rA}^{l}, y_{rA}^{m}, y_{rA}^{u}) \le 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r (y_{rB}^{l}, y_{rB}^{m}, y_{rB}^{u}) - \sum_{i=1}^{m} v_i (x_{iB}^{l}, x_{iB}^{m}, x_{iB}^{u}) \le 0, \\
& u_r \ge 0, v_i \ge 0, \qquad r=1,2,\dots,s \qquad i=1,2,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

اکثر روش‌هایی که برای حل مساله بالا به کار می‌رود، از روش α- برش استفاده می‌کنند [۴، ۵، ۷، ۹، ۱۲]، که با توجه به مقایسات α- برش‌ها رتبه‌بندی صورت می‌گیرد. اما در روش Saati و همکاران [۹]، به جای مقایسه برابری و یا عدم برابری بازه‌ها، یک متغیر در بازه تعریف می‌شود که نه تنها درمحدودیت‌ها صدق می‌کند بلکه مقدار کارایی را هم بهینه می‌کند. در اینجا ما به طور خاص بر روی این رویکرد تمرکز کرده‌ایم. با به کار بردن α- برش، مساله (۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$
\begin{aligned}
(E_{AB})_{\alpha} = \max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r \left[\alpha y_{rA}^{m} + (1-\alpha) y_{rA}^{l}, \alpha y_{rA}^{m} + (1-\alpha) y_{rA}^{u} \right] \\
s.t: \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i \left[\alpha x_{iA}^{m} + (1-\alpha) x_{iA}^{l}, \alpha x_{iA}^{m} + (1-\alpha) x_{iA}^{u} \right] = \left[\alpha + (1-\alpha) 1^{l}, \alpha + (1-\alpha) 1^{u} \right], \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r \left[\alpha y_{rA}^{m} + (1-\alpha) y_{rA}^{l}, \alpha y_{rA}^{m} + (1-\alpha) y_{rA}^{u} \right] \le \left[\alpha + (1-\alpha) 1^{l}, \alpha + (1-\alpha) 1^{u} \right], \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r \left[\alpha y_{rB}^{m} + (1-\alpha) y_{rB}^{l}, \alpha y_{rB}^{m} + (1-\alpha) y_{rB}^{u} \right], \\
& -\sum_{i=1}^{m} v_i \left[\alpha x_{iB}^{m} + (1-\alpha) x_{iB}^{l}, \alpha x_{iB}^{m} + (1-\alpha) x_{iB}^{u} \right] \le 0, \\
& u_r \ge 0, v_i \ge 0, \qquad r=1,2,\dots,s \qquad i=1,2,\dots,m.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

با تعریف روابط:

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_{iB} \in \left[\alpha x_{iB}^{m} + (1-\alpha)x_{iB}^{l}, \alpha x_{iB}^{m} + (1-\alpha)x_{iB}^{u}\right]\\
&\hat{y}_{rB} \in \left[\alpha y_{rB}^{m} + (1-\alpha)y_{rB}^{l}, \alpha y_{rB}^{m} + (1-\alpha)y_{rB}^{u}\right]\\
&l \in \left[\alpha + (1-\alpha)1^{l}, \alpha + (1-\alpha)1^{u}\right]
\end{aligned} \tag{9}$$

و با جاگذاری روابط (۹) در (۸) و تغییر متغیر $\bar{x}_{iB} = v_i \hat{x}_{iB}$ و $\bar{y}_{rB} = u_r \hat{y}_{rB}$ داریم:

$$\begin{aligned}
(E_{AB})_{\alpha} = \ \max \quad & \sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{rA}\\
s.t: \quad & \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{iA} = 1,\\
& \sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{rA} \le 1,\\
& \sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{rB} - \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{iB} \le 0,\\
& v_i\left(\alpha x_{ij}^{m} + (1-\alpha)x_{ij}^{l}\right) \le \bar{x}_{ij} \le v_i\left(\alpha x_{ij}^{m} + (1-\alpha)x_{ij}^{u}\right), \qquad \forall i \ , \ \ j = A, B\\
& u_r\left(\alpha y_{rj}^{m} + (1-\alpha)y_{rj}^{l}\right) \le \bar{y}_{rj} \le u_r\left(\alpha y_{rj}^{m} + (1-\alpha)y_{rj}^{u}\right), \qquad \forall r \ , \ \ j = A, B\\
& u_r \ge 0, v_i \ge 0, \qquad r = 1, 2, \dots, s \qquad i = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{10}$$

با حل مدل (۱۰)، کارایی واحد A نسبت به واحد B به ازای αهای مختلف به دست می‌آید. بعد از به دست آوردن کارایی دو به دوی واحدها نسبت به هم، کارایی متقاطع واحدها را به دست می‌آوریم. $\tilde{\theta}_{BA}$، کارایی متقاطع با ورودی و خروجی‌های فازی است که در واقع مقدار بهینه ارزیابی واحد B را تضمین می‌نماید. برای محاسبه این مقدار، از مدل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_{BA} = \ \max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{rB}\\
s.t: \quad & \sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{x}_{iB} = \tilde{1},\\
& \sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{rB} \le \tilde{1},\\
& \sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{rA} - \tilde{E}_{AB} \sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{x}_{iA} = 0,\\
& u_r \ge 0, v_i \ge 0, \qquad r = 1, 2, \dots, s \qquad i = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{11}$$

با به کار بردن روش Saati و همکاران [۹]، مساله تعیین کارایی متقاطع به شکل زیر در می‌آید:

$$
\begin{aligned}
(\theta_{BA})_\alpha = \max \quad & \sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{rB} \\
s.t.: \quad & \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{iB} = 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{rB} \le 1, \\
& \sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{rA} - (E_{AB})_\alpha \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{iA} = 0, \\
& v_i \left(\alpha x_{ij}^{m} + (1-\alpha) x_{ij}^{l}\right) \le \bar{x}_{ij} \le v_i \left(\alpha x_{ij}^{m} + (1-\alpha) x_{ij}^{u}\right), \qquad \forall i \quad , \quad j = A, B \\
& u_r \left(\alpha y_{rj}^{m} + (1-\alpha) y_{rj}^{l}\right) \le \bar{y}_{rj} \le u_r \left(\alpha y_{rj}^{m} + (1-\alpha) y_{rj}^{u}\right), \qquad \forall r \quad , \quad j = A, B \\
& u_r \ge 0, v_i \ge 0, \qquad r = 1,2,\ldots,s \qquad i = 1,2,\ldots,m.
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

به این ترتیب مقادیر کارایی واحد A نسبت به واحد B به ازای αهای مختلف برابر است با $(E_{AB})_\alpha$ و کارایی متقاطع آن ها به ازای αهای مختلف برابر است با $(\theta_{BA})_\alpha$. به ترتیب مشابه، به ازای αهای مختلف مقادیر $(E_{BA})_\alpha$ و $(\theta_{AB})_\alpha$ را به دست می‌آوریم.

با به کارگیری نتایجی که از حل مدل‌های DEA فازی حاصل می‌شود و با استفاده از رابطه زیر، ماتریس مقایسات زوجی برای هر زوج واحد j و k به ازای αهای مختلف تشکیل می‌گردد.

$$
(a_{jk})_\alpha = \frac{(E_{jk})_\alpha + (\theta_{jk})_\alpha}{(E_{kj})_\alpha + (\theta_{kj})_\alpha} \qquad , \quad a_{jj} = 1
\tag{۱۳}
$$

بنابراین ماتریس مقایسات زوجی به ازای αهای مختلف برای هر دو واحد به شیوه‌ای که ارایه شد، تکمیل و تشکیل می‌گردد. در این ماتریس رابطه $a_{kj} = \frac{1}{a_{jk}}$ برقرار است.

توجه کنید که قطر ماتریس مقایسات زوجی دارای مقدار ۱ بوده و عنصر a_{kj} ارزیابی واحد k نسبت به واحد j می‌باشد.

نکته قابل توجه این است که در مدل اصلی AHP، داده‌های ماتریس مقایسات زوجی ذهنی هستند. اما در مدل ترکیبی، ماتریس مقایسات زوجی غیر ذهنی بوده و در این مقاله مقایسات زوجی توسط روش DEA فازی انجام شده است. البته با این تفاوت که در روش DEA هر واحد به تنهایی با تمامی واحدها ارزیابی می‌شود ولی در این روش برای مقایسه دو به دوی واحدها هر واحد با واحد دیگر مقایسه می‌شود.

بر اساس نتایج مرحله اول، ماتریس مقایسات زوجی را به ازای αهای مختلف تشکیل دادیم. در واقع در مرحله دوم بر اساس نتایج مرحله اول، یک مدل دو سطحی (سطح هدف، سطح گزینه‌ها) ایجاد شده است. برای رتبه‌بندی واحدها احتیاج به محاسبه وزن داریم. برای محاسبه وزن ماتریس مقایسات زوجی، روش‌های متفاوتی

وجود دارد، که از آن جمله می‌توان از روش بردار ویژه Saaty [۱۰] اشاره نمود. بعد از به دست آوردن وزن‌ها، رتبه‌بندی گزینه‌ها را مشخص می‌کنیم. توجه کنید که ماتریس مقایسات زوجی به ازای α- برش‌های مختلف به دست می‌آید. همچنین با افزایش مقدار α مقدار مقطع α افزایش نمی‌یابد. به عبارت دیگر، این مقدار یا کاهش یافته و یا ثابت باقی می‌ماند. بدین معنی که همه مقاطع α از مجموعه اعداد فازی، یک خانواده از مجموعه‌های قطعی تو در تو را تشکیل می‌دهند. بنابراین، تصمیم‌گیرنده بر اساس نتایج حاصل از مقاطع مختلف α می‌تواند بهترین گزینه را انتخاب کند. توجه به این نکته حائز اهمیت است که وزن‌ها و اولویت‌هایی که از ماتریس مقایسات زوجی فوق به دست می‌آید به قضاوت‌های زوجی تصمیم‌گیرنده وابسته نمی‌باشد.

۵ مثال عددی

در این بخش، ابتدا مثال ارایه شده توسط Saati و همکاران [۹] را ملاحظه می‌نماییم. اطلاعات آن در جدول (۱) نشان داده شده است. در این جدول، ۱۰ واحد تصمیم‌گیری با مصرف دو ورودی فازی مثلثی، دو خروجی فازی مثلثی را تولید می‌نماید.

	I_1	I_2	O_1	O_2
A	(۶/۰,۷/۰,۸/۰)	(۲۹/۰,۳۰/۰,۳۲/۰)	(۳۵/۵,۳۸/۰,۴۱/۰)	(۴۰۹/۰,۴۱۱/۰,۴۱۶/۰)
B	(۵/۵,۶/۰,۶/۵)	(۳۳/۰,۳۵/۰,۳۶/۵)	(۳۹/۰,۴۰/۰,۴۳/۰)	(۴۷۸/۰,۴۸۰/۰,۴۸۴/۰)
C	(۷/۵,۹/۰,۱۰/۵)	(۴۳/۰,۴۵/۰,۴۸/۰)	(۳۲/۰,۳۵/۰,۳۸/۰)	(۲۹۷/۰,۲۹۹/۰,۳۰۱/۰)
D	(۷/۰,۸/۰,۱۰/۰)	(۳۷/۵,۳۹/۰,۴۲/۰)	(۲۸/۰,۳۱/۰,۳۱/۰)	(۳۴۷/۰,۳۵۲/۰,۳۶۰/۰)
E	(۹/۰,۱۱/۰,۱۲/۰)	(۴۳/۰,۴۴/۰,۴۵/۰)	(۳۳/۰,۳۵/۰,۳۸/۰)	(۴۰۶/۰,۴۱۱/۰,۴۱۵/۰)
F	(۱۰/۰,۱۰/۰,۱۰/۰)	(۵۳/۰,۵۵/۰,۵۷/۵)	(۳۶/۰,۳۸/۰,۴۰/۰)	(۲۸۲/۰,۲۸۶/۰,۲۸۹/۰)
G	(۱۰/۰,۱۲/۰,۱۴/۰)	(۱۰۷/۰,۱۱۰/۰,۱۱۳/۰)	(۳۴/۵,۳۶/۰,۳۸/۰)	(۳۹۶/۰,۴۰۰/۰,۴۰۵/۰)
H	(۹/۰,۱۳/۰,۱۶/۰)	(۹۵/۰,۱۰۰/۰,۱۰۱/۰)	(۳۷/۰,۴۱/۰,۴۶/۰)	(۳۸۷/۰,۳۹۳/۰,۴۰۲/۰)
K	(۱۲/۰,۱۴/۰,۱۵/۰)	(۱۲۰/۰,۱۲۵/۰,۱۳۱/۰)	(۲۴/۰,۲۷/۰,۲۸/۰)	(۴۰۰/۰,۴۰۴/۰,۴۰۶/۰)
L	(۵/۰,۸/۰,۱۰/۰)	(۳۵/۰,۳۸/۰,۳۹/۰)	(۴۸/۰,۵۰/۰,۵۱/۰)	(۴۷۰/۰,۴۷۰/۰,۴۷۰/۰)

جدول ۱: ورودی و خروجی‌های فازی برای ۱۰ واحد تصمیم‌گیری

نتایج حاصل از حل روش پیشنهادی برای مقایسه دو به دو واحدها با یکدیگر، به ازای $\alpha = ۰/۸$ به صورت ماتریس مقایسات زوجی زیر است:

$$D_{٠/٨} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ K \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & K & L \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc}
١ & ١ & ١/٢٦٦ & ١/٢٥٧ & ١/٤٣٦ & ١/٣٧١ & ١/٦٥٠ & ١/٥١٣ & ١/٩٢٠ & ٠/٩٩٢ \\
١ & ١ & ١/٤١٢ & ١/٤٠٧ & ١/٣٧٢ & ١/٦٢٠ & ٢/١٠٢ & ١/٨٩٥ & ٢/٦٤٧ & ١ \\
٠/٧٩٠ & ٠/٧٠٨ & ١ & ١ & ١ & ١ & ١ & ١ & ١/٠٨١ & ٠/٦٩٣ \\
٠/٧٩٦ & ٠/٧١١ & ١ & ١ & ١ & ١ & ١/١٦٦ & ١/٠٥١ & ١/٤٠٧ & ٠/٦٧٣ \\
٠/٦٩٦ & ٠/٧٢٩ & ١ & ١ & ١ & ١ & ١/٠١٤ & ١ & ١/٢٥٥ & ٠/٦٣٠ \\
٠/٧٣٠ & ٠/٦١٧ & ١ & ١ & ١ & ١ & ١ & ١ & ١ & ٠/٦٤٤ \\
٠/٦٠٦ & ٠/٤٧٦ & ١ & ٠/٨٥٨ & ٠/٩٨٧ & ١ & ١ & ١ & ١/١٠٤ & ٠/٥٢٦ \\
٠/٦٦١ & ٠/٥٢٨ & ١ & ٠/٩٥١ & ١ & ١ & ١ & ١ & ١ & ٠/٥٨٣ \\
٠/٥٢١ & ٠/٣٧٨ & ٠/٩٢٥ & ٠/٧١١ & ٠/٧٩٧ & ١ & ٠/٩٠٦ & ١ & ١ & ٠/٣٣٦ \\
١/٠٠٨ & ١ & ١/٤٤٣ & ١/٤٨٦ & ١/٥٨٨ & ١/٥٥٤ & ١/٩٠٣ & ١/٧١٥ & ٢/٩٧٤ & ١
\end{array}\right] \end{array}$$

بر اساس ماتریس مقایسات زوجی تولید شده به روش DEA فازی، امتیاز نهایی هر گزینه به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$A = ٠/١٢٧ \quad B = ٠/١٤٢ \quad C = ٠/٠٨٩ \quad D = ٠/٠٩٣ \quad E = ٠/٠٨٨$$
$$F = ٠/٠٨٦ \quad G = ٠/٠٨٠ \quad H = ٠/٠٨٢ \quad K = ٠/٠٦٩ \quad L = ٠/١٤٤$$

رتبه‌بندی نهایی گزینه‌ها به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$L > B > A > D > C > E > F > H > G > K$$

امتیاز نهایی هر گزینه به ازای α-برش‌های مختلف در جدول ۲ فراهم شده است و تصمیم گیرنده بر اساس امتیازاتی که به دست آورده می‌تواند بهترین گزینه را انتخاب کند.

α	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L
٠	٠/١٠٦	٠/١٠٧	٠/٠٩٨	٠/٠٩٧	٠/٠٩٧	٠/٠٩٣	٠/٠٩٢	٠/٠٩٨	٠/٠٨٦	٠/١٢٧
٠/٢	٠/١١٠	٠/١١١	٠/٠٩٦	٠/٠٩٧	٠/٠٩٥	٠/٠٩٢	٠/٠٩٠	٠/٠٩٥	٠/٠٨٣	٠/١٣١
٠/٤	٠/١١٦	٠/١١٧	٠/٠٩٤	٠/٠٩٦	٠/٠٩٣	٠/٠٩٠	٠/٠٨٧	٠/٠٩١	٠/٠٨٠	٠/١٣٦
٠/٦	٠/١٢٢	٠/١٢٤	٠/٠٩٢	٠/٠٩٥	٠/٠٩١	٠/٠٨٨	٠/٠٨٥	٠/٠٨٧	٠/٠٧٧	٠/١٤٠
٠/٨	٠/١٢٧	٠/١٤٢	٠/٠٨٩	٠/٠٩٣	٠/٠٨٨	٠/٠٨٦	٠/٠٨٠	٠/٠٨٢	٠/٠٦٩	٠/١٤٤
١	٠/١٣٣	٠/١٤٧	٠/٠٨٧	٠/٠٩٦	٠/٠٨٤	٠/٠٨٥	٠/٠٧٨	٠/٠٧٨	٠/٠٦٩	٠/١٤٧

جدول ۲: امتیاز نهایی گزینه ها بر اساس $\alpha-$ برش ها

۶ نتیجه‌گیری

تصمیم‌گیری یکی از مهمترین مشخصه‌های انسانی است و هر فرد در طول شبانه روز تصمیم‌های فراوانی اتخاذ می‌کند. از آنجا که اتخاذ تصمیم صحیح و به موقع می‌تواند تاثیر بسزایی در زندگی شخصی و اجتماعی انسآن ها داشته باشد، ضرورت وجود یک تکنیک قوی که بتواند انسان را در این زمینه یاری کند کاملا محسوس می‌باشد. همواره یکی از مسایل دشوار برای یک تصمیم‌گیرنده، انتخاب بهترین گزینه از میان گزینه‌های موجود است. از طرفی وجود قضاوت‌های ذهنی در ارزیابی گزینه‌ها یکی از مشکلاتی است که معمولا موجب بروز نگرانی تصمیم‌گیرندگان می‌شود. در این مقاله با استفاده از مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی، برنامه‌ریزی فازی، الگوریتمی طراحی شده است که می‌تواند ماتریس مقایسات زوجی قطعی را تولید کند که بدون دخالت قضاوت‌های ذهنی تصمیم‌گیرنده به دست آمده است. لذا قضاوت‌های ذهنی تصمیم‌گیرنده در تعیین اولویت‌ها و ارجحیت‌ها هیچ نقشی ندارد. بدین ترتیب تصمیم‌گیرنده می‌تواند بهترین گزینه را از میان گزینه‌های موجود را طوری انتخاب کند که بیشترین سود و موفقیت را به همراه داشته باشد.

منابع

[۱] اصغرپور، محمدجواد، ۱۳۸۲. تصمیم‌گیری چند معیاره. *انتشارات دانشگاه تهران.*

[2] Charnes, A. Cooper, W.W. Rhodes, E, 1978. Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*.Vol.2, pp: 429-444.

[3] Cooper, W.W. Park, K.S. and Yu, G, 1999. Models for dealing with imprecise data in DEA. *Management Science*.Vol.45, pp: 597-607.

[4] Guo, P, 2009. Fuzzy data envelopment analysis and its application to location problems. *In form. sci, In Press.*

[5] Guo, P. and Tanaka, H, 2001. Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method. *Fuzzy Sets and Systems*.Vol.119, pp: 149–160.

[6] Hosseinzadeh Lotfi, F. Jahanshahloo, G.R. Rezai Balf, F, 2007. Ranking of DMUs on interval data by DEA. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*.Vol.20, pp: 159-166.

[7] Leon, T. Liern, V. Ruiz, J.L, and Sirvent, I, 2003. A fuzzy mathematical programming approach to the assessment of efficiency with DEA models. *Fuzzy Sets and Systems*. Vol.139, pp: 407–419.

[8] Saati, S. Memariani, A, 2005. Reducing weight flexibility in fuzzy DEA. *Applied Mathematics and Computation*.Vol.161, pp: 611-622.

[9] Saati, S. Memariani, A. and Jahanshahloo, G.R, 2002. Efficiency analysis and ranking of DMUs with fuzzy data. *Fuzzy Optimization and Decision Making*.Vol 1, pp: 255-267.

[10] Saaty, T.L, 1980. The analytic hierarchy process. *McGraw-Hill.*

[11] Stern, Z.S. Mehrez, A. Hadad, Y, 2000. An AHP/DEA methodology for ranking decision making units. *Intl. Trans. in Op. Res.*Vol.7, pp: 109-124.

[12] Triantis, K.a and Girod, O, 1998. A mathematical programming approach for measuring technical efficiency in a fuzzy environment. *Journal of Productivity Analysis*.Vol.10, pp: 85–102.

[13] Yang ,T. Kuo, C, 2003. A hierarchical AHP/DEA methodology for the facilities layout design problem. *European Journal of Operational Research*.Vol.147, pp: 128-136.

[14] Wang, Y.M. Luo, Y. Elhag, T.M, 2008. A integrated AHP-DEA methodology for bridge risk assessment. *Computer & Industrial Engineering*. Vol.54, pp: 513-525.

[15] Wang, Y.M. Parkan, C. Luo, Y, 2007. A linear programming method for generating the most favorable weights from a pairwise comparison matrix. *Computer Operation Research.*Vol.35, pp: 3918-3930.

[16] Wen, M. Li, H, 2009. Fuzzy data envelopment analysis (DEA): Model and ranking method. *Journal of Computational and Applied Mathematics, In Press*.

[17] Zadeh, L.A, 1965. Fuzzy sets.*Information and Control*.Vol.8, pp: 338-353.

[18] Zimmermann, H.J, 1996. Fuzzy set theory and its application. *Kluwer Academic Publishers, Boston.*