

حل معادله انتگرال فردهلم نوع دوم با هسته منفرد

محسن ربانی*^۱، همایون مؤتمنی^۲

^۱گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری

^۲گروه کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری

چکیده

معادله انتگرال با هسته منفرد از اهمیت خاصی در شاخه‌های مختلف علوم برخوردار است. لذا در این مقاله سعی داریم با روش انتخاب درست شبکه ای از نقاط به تقریب هسته منفرد معادله انتگرالی دست یابیم. در این راستا برای دستیابی به جواب معادله انتگرال، از پایه‌های متعامد یکه تولید شده بر اساس چند جمله‌ای‌های لژاندر استفاده می‌کنیم که به علت تعامد پایه‌های فوق تعداد عملیات کاهش یافته و ماتریس‌های عملیاتی به صورت قطری ظاهر می‌شوند. در آخر نتایج عددی به دست آمده حاکی از دقت بالای تقریب می‌باشد.

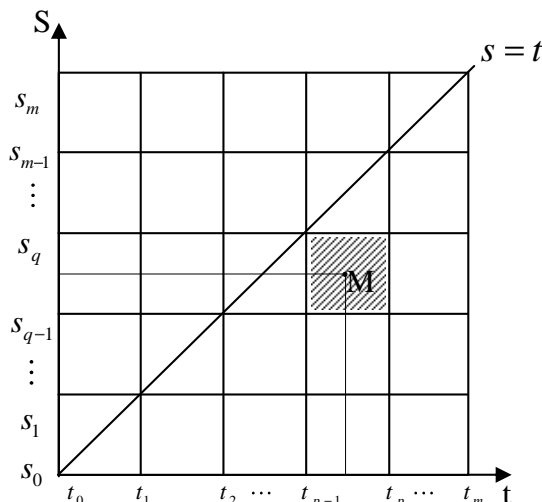
کلمات کلیدی: معادله انتگرال، هسته منفرد، چند جمله‌ای‌های لژاندر، متعامد یکه.

۱ مقدمه

معادله انتگرال فردهلم نوع دوم با هسته منفرد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u(t) - \int_0^1 \frac{u(s)ds}{(t-s)^\alpha} = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (1)$$

که در آن $f(t) \in L^2[0,1]$ و $u(t)$ جواب معادله انتگرال مجهول می‌باشد. با فرض اینکه جواب معادله انتگرال (1) در فضای $L^2[0,1]$ قرار دارد، برای انتخاب نقاط شبکه، محور افقی را در فاصله $[0,1]$ به نقاط t_0, t_1, \dots, t_m و همچنین محور عمودی را در فاصله $[0,1]$ به نقاط s_0, s_1, \dots, s_m تقسیم می‌کنیم. روی هر مربع مثل I_{ij} هسته را با استفاده از پایه لژاندر تقریب می‌زنیم. البته می‌توان از پایه متعامد یکه ی موجک چندگانه ساخته شده بر حسب چند جمله‌ای‌های لژاندر نیز استفاده نمود که پایه لژاندر حالت خاصی از آن می‌باشد. برای نحوه‌ی ساخت موجک چندگانه فوق به [1] مراجعه کنید. کاربردهایی از چند جمله‌ای‌های لژاندر و موجک چندگانه ساخته شده بر حسب چند جمله‌ای‌های لژاندر را می‌توان برای حل معادلات دیفرانسیل - انتگرال و معادلات انتگرال غیر خطی هم‌رشتاین در منابع [5,7] مشاهده کرد. البته معادله (1) توسط منابعی مثل [4,6] نیز حل شده است ولی ما در اینجا با نگرش جدیدی، کارایی روش مان را نشان خواهیم داد. بدین منظور به شبکه نقاط شکل ۱، توجه می‌کنیم.



شکل ۱

منظور از مربع I_{pq} یعنی مربعی که از حاصلضرب فاصله p ام روی محور t ها و فاصله q ام روی محور s ها پدید می آید. بنا بر این داریم

$$[t_0, t_1] \times [S_0, S_1] = I_{11}$$

$$\vdots$$

$$[t_{p-1}, t_p] \times [S_{q-1}, S_q] = I_{pq}.$$

۲ تقریب هسته

بعد فضای X_n را برابر n در نظر می گیریم که هسته $k(t, s)$ در فضای $X_n \times X_n$ به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$k(t, s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \kappa_{ij} b_i(t) b_j(s)$$

پایه متعامد یکه $\{b_i\}_{i=1}^n$ می تواند از چند جمله ای های متعامد یکه لژاندر یا موجک چندگانه متعامد یکه ساخته شده بر حسب چند جمله ای های لژاندر انتخاب گردد. لذا ضرایب تقریب هسته به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$\kappa_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 k(t, s) b_i(t) b_j(s) dt ds = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{b_i(t) b_j(s)}{(t-s)^\alpha} \right] dt ds = \int_0^1 \int_0^1 g_{ij}(t, s) dt ds \quad (2)$$

برای محاسبه ی انتگرال (۲) روی خط $s=t$ به مشکل منفرود بودن هسته بر می خوریم، برای رفع این مشکل طبق شکل ۱ با فرض $s_i = t_i$ به ازای $i = 0, 1, \dots, m$ و انتگرال گیری روی مربع های بالا و پائین خط $s=t$ و روی مربع هایی که خط $s=t$ از روی قطر آن ها می گذرد، انتگرال (۲) را محاسبه می کنیم بنابر این خواهیم داشت:

$$\kappa_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 g_{ij}(t, s) dt ds = \sum_{\substack{p, q=1 \\ p \neq q}}^m \iint_{I_{pq}} g_{ij}(t, s) dt ds + \sum_{p=1}^m \iint_{I_{pq}} g_{ij}(t, s) dt ds. \quad (3)$$

۱-۲ محاسبه انتگرال روی مربع های غیر واقع بر خط $s = t$

نقاط روی محورهای t و s را متساوی الفاصله اختیاری می کنیم بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} t_p &= t_0 + ph = ph \\ S_p &= S_0 + ph = ph. \end{aligned} \tag{۴}$$

برای محاسبه ی انتگرال تابع $g_{ij}(t, s)$ روی مربع I_{pq} با توجه به شکل ۲ به صورت زیر عمل می کنیم که در آن M نقطه مرکز مربع I_{pq} می باشد:

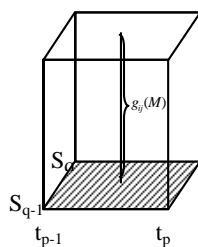
$$\begin{aligned} \iint_{I_{pq}} g_{ij}(t, s) dt ds &\approx (I_{pq} \text{ مساحت مربع}) g_{ij}(t_M, S_M) \\ &= (t_p - t_{p-1})(s_q - s_{q-1}) g_{ij}\left(t_p - \frac{h}{2}, s_q - \frac{h}{2}\right) \end{aligned}$$

با استفاده از متساوی الفاصله بودن نقاط و رابطه (۴) نتیجه می شود که:

$$= h^2 g_{ij}\left(\frac{(2p-1)h}{2}, \frac{(2q-1)h}{2}\right)$$

و با توجه به $h = \frac{1}{m}$ خواهیم داشت:

$$= \frac{1}{m^2} g_{ij}\left(\frac{(2p-1)}{2m}, \frac{(2q-1)}{2m}\right). \tag{۵}$$

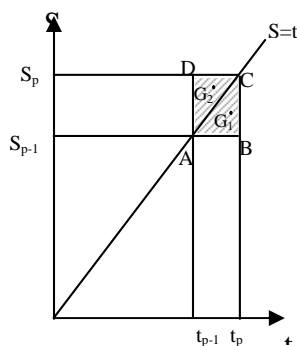


شکل ۲

۲-۲ محاسبه انتگرال روی مربع های واقع بر خط $s = t$

با توجه به شکل ۳ مربع I_{pp} را به دو مثلث پائین و بالای خط $s = t$ تقسیم می کنیم و هر بار مساحت مثلث را ضربدر مقدار تابع $g_{ij}(t, s)$ در نقطه مرکز مثلث می نمایم بدین منظور مختصات نقاط A, B, C, D را در نظر می گیریم که عبارتند از:

$$\begin{aligned} A &= (t_{p-1}, S_{p-1}), B = (t_p, S_{p-1}), C = (t_p, S_p), D = (t_{p-1}, S_p) \\ S_{ABC} &= \frac{h^2}{2}, S_{ADC} = \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$



شکل ۳

مختصات نقاط G_1, G_2 در شکل ۳ به صورت زیر معرفی می گردند:

$$G_1 = \left(\frac{t_A + t_B + t_C}{3}, \frac{s_A + s_B + s_C}{3} \right) = \left(\frac{t_{p-1} + t_p + t_p}{3}, \frac{2s_{p-1} + s_p}{3} \right) \quad (6)$$

$$= \left(\frac{(p-1)h + 2ph}{3}, \frac{2(p-1)h + ph}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{(3p-1)h}{3}, \frac{(3p-2)h}{3} \right)$$

به طور مشابه داریم

$$G_2 = \left(\frac{(3p-2)h}{3}, \frac{(3p-1)h}{3} \right). \quad (7)$$

با توجه به روابط (۶)، (۷) و $h = \frac{1}{m}$ خواهیم داشت

$$\iint_{I_{pp}} g_{ij}(t, s) dt ds = (S_{ABC}) g_{ij}(G_1) + S_{ADC} g_{ij}(G_2)$$

$$= \frac{1}{2m^2} \left[g_{ij} \left(\frac{(3p-1)}{3m}, \frac{(3p-2)}{3m} \right) + g_{ij} \left(\frac{(3p-2)}{3m}, \frac{(3p-1)}{3m} \right) \right]. \quad (8)$$

با در نظر گرفتن روابط (۳)، (۵) و (۸) ضرایب تقریب هسته یعنی K_{ij} ها به صورت زیر به دست می آیند:

$$K_{ij} = \sum_{\substack{p, q=1 \\ p \neq q}}^m \frac{1}{m^2} g_{ij} \left(\frac{(2p-1)}{2m}, \frac{(2q-1)}{2m} \right) \quad (9)$$

$$+ \sum_{p=1}^m \frac{1}{2m^2} \left[g_{ij} \left(\frac{(3p-1)}{3m}, \frac{(3p-2)}{3m} \right) + g_{ij} \left(\frac{(3p-2)}{3m}, \frac{(3p-1)}{3m} \right) \right].$$

از فرمول (۹) ضرایب K_{ij} برای تقریب هسته با m به قدر کافی بزرگ به دست می آیند. که در آن می توان حالت

$p \neq q$ را به پائین و بالای خط $s = t$ به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} \kappa_{ij} &= \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=p+1}^m \frac{1}{m^2} g_{ij} \left(\frac{(2p-1)}{2m}, \frac{(2q-1)}{2m} \right) \\ &+ \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{p=q+1}^m \frac{1}{m^2} g_{ij} \left(\frac{(2p-1)}{2m}, \frac{(2q-1)}{2m} \right) \\ &+ \sum_{p=1}^m \frac{1}{2m^2} \left[g_{ij} \left(\frac{(3p-1)}{3m}, \frac{(3p-2)}{3m} \right) + g_{ij} \left(\frac{(3p-2)}{3m}, \frac{(3p-1)}{3m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

حال بسته به مقدار α در هسته $k(t,s) = \frac{1}{(t-s)^\alpha}$ و $g_{ij}(t,s)$ می توان κ_{ij} را محاسبه نمود.

$$\begin{aligned} \kappa_{ij} &= \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=p+1}^m \frac{1}{m^2} \frac{b_i \left(\frac{2p-1}{2m} \right) b_j \left(\frac{2q-1}{2m} \right)}{\left(\frac{2p-1}{2m} - \frac{2q-1}{2m} \right)^\alpha} + \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{p=q+1}^m \frac{1}{m^2} \frac{b_i \left(\frac{2p-1}{2m} \right) b_j \left(\frac{2q-1}{2m} \right)}{\left(\frac{2p-1}{2m} - \frac{2q-1}{2m} \right)^\alpha} \\ &+ \sum_{p=1}^m \frac{1}{2m^2} \left[\frac{b_i \left(\frac{3p-1}{3m} \right) b_j \left(\frac{3p-2}{3m} \right)}{\left(\frac{3p-1}{3m} - \frac{3p-2}{3m} \right)^\alpha} + \frac{b_i \left(\frac{3p-2}{3m} \right) b_j \left(\frac{3p-1}{3m} \right)}{\left(\frac{3p-2}{3m} - \frac{3p-1}{3m} \right)^\alpha} \right]. \end{aligned}$$

با ساده کردن روابط اخیر κ_{ij} به صورت زیر معرفی می گردد:

$$\begin{aligned} \kappa_{ij} &= \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=p+1}^m \frac{b_i \left(\frac{2p-1}{2m} \right) b_j \left(\frac{2q-1}{2m} \right)}{m^{(2-\alpha)} (p-q)^\alpha} + \sum_{q=1}^{m-1} \sum_{p=q+1}^m \frac{1}{m^2} \frac{b_i \left(\frac{2p-1}{2m} \right) b_j \left(\frac{2q-1}{2m} \right)}{m^{(2-\alpha)} (p-q)^\alpha} \\ &+ \sum_{p=1}^m \frac{1}{2m^{(2-\alpha)}} \left[3^\alpha b_i \left(\frac{3p-1}{3m} \right) b_j \left(\frac{3p-2}{3m} \right) + (-3)^\alpha b_i \left(\frac{3p-2}{3m} \right) b_j \left(\frac{3p-1}{3m} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

در فرمول (۱۱) پایه های موجک چند گانه در حالتی که بازه $[0,1]$ به بازه های کوچکتر تبدیل نگردد همان چند جمله ای های لژاندر متعامدیکه روی بازه $[0,1]$ هستند که در بند ۳ معرفی می گردند.

۳ معرفی چند جمله ای های متعامد یک لژاندر

چند جمله ای متعامد یک لژاندر از فرمول رد ریگنز^۱ به صورت زیر ارایه می گردد. (برای بررسی بیشتر به [2,3] مراجعه شود)

$$L_n(t) = \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t^2)^n], \quad t \in [-1, 1], \quad w(t) = 1. \quad (12)$$

$$L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = t$$

$$(n+1)L_{n+1}(t) = (2n+1)t L_n(t) - nL_{n-1}(t), \quad n \geq 1.$$

همچنین داریم

$$\int_{-1}^1 L_m(t) L_n(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & m = n. \end{cases}$$

برای متعامد یکه سازی چند جمله‌ای لژاندر به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_{-1}^1 (\alpha L_m(t)) (\alpha L_n(t)) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n. \end{cases}$$

بنابراین داریم

$$\alpha = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \quad L_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad L_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t, \dots$$

۳-۱ معرفی چند جمله‌ای‌های متعامد یکه لژاندر روی فاصله [0,1]

با تغییر متغیر $1-2t$ به جای t در فرمول (۱۲) خواهیم داشت

$$L_n(t) = \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t-t^2)^n], \quad t \in [0, 1]. \quad (13)$$

برای متعامد یکه ساختن چند جمله‌ای‌های لژاندر در رابطه (۱۳) از شرط $\int_0^1 (\alpha_j b_j(t))^2 dt = 1$ استفاده می‌کنیم که به عنوان نمونه مقادیر α_j ها به ازای $j = 0, 1, \dots, 7$ به صورت زیر ارایه می‌گردد:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{\sqrt{7}}{8}, \quad \alpha_4 = \frac{3}{16}, \quad \alpha_5 = \frac{\sqrt{11}}{32}, \quad \alpha_6 = \frac{\sqrt{13}}{64}, \quad \alpha_7 = \frac{\sqrt{15}}{128}.$$

همچنین $b_j(t)$ به ازای $j = 0, 1, \dots, 7$ که در این مقاله استفاده شده است به صورت زیر می‌باشند:

$$L_0(t) = 1,$$

$$L_1(t) = \sqrt{3}(2t - 1), \quad (14)$$

$$L_2(t) = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1),$$

$$L_3(t) = \sqrt{7}(20t^3 - 30t^2 + 12t - 1),$$

$$L_4(t) = 3(70t^4 - 140t^3 + 90t^2 - 20t + 1).$$

۴ نتایج عددی

نتایج عددی زیر با استفاده از نرم‌افزار *Mathematica, 5.1* به دست آمده است.

مثال ۱-۴

مساله معادله انتگرال فردهلم نوع دوم با هسته منفرد زیر را با روش فوق حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} u(t) - \int_0^1 \frac{u(s) ds}{(t-s)^1} = 1^2 \left(1 + \text{Ln} \left(\frac{1-t}{t} \right) \right) + t + \frac{1}{2} \\ u(t) = t^2 \end{cases} \quad \text{جواب واقعی:}$$

در حل مثال ۱-۴ از پایه لژاندار در حالت $n=3,4$ استفاده کرده ایم که بعد دستگاه حل شده به ترتیب 3,4 می‌باشد و m تعداد نقاط تقریب روی محور مختصات افقی و عمودی برای تقریب هسته است، در جدول ۱ مشاهده می‌گردد که حل عددی به دست آمده دارای دقت بالایی می‌باشد.

X_n	n	m	خطا
S_0^3	3	300	8.2×10^{-6}
S_0^4	4	100	1.3×10^{-7}

جدول ۱

مثال ۲-۴

مساله معادله انتگرال فردهلم نوع دوم با هسته منفرد زیر را با روش فوق حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} u(t) - \int_0^1 \frac{u(s) ds}{(t-s)^{1/3}} = t^2 \left(1 + \frac{3}{2} \left((t-1)^{2/3} - t^{2/3} \right) - \frac{6}{5} t \left((t-1)^{5/3} - t^{5/3} \right) + \frac{3}{8} \left((t-1)^{8/3} - t^{8/3} \right) \right) \\ u(t) = t^2 \end{cases} \quad \text{حل واقعی:}$$

در حل مثال ۲-۴ از پایه لژاندار در حالت $n=3,4$ استفاده کرده ایم که بعد دستگاه حل شده به ترتیب 3,4 می‌باشد و m تعداد نقاط تقریب روی محور مختصات افقی و عمودی برای تقریب هسته است، در جدول ۲ مشاهده می‌گردد که با وجود بعد کم دستگاه حل عددی به دست آمده دارای دقت بالایی می‌باشد.

X_n	n	m	خطا
S_0^3	3	20	9.0×10^{-5}
S_0^4	4	17	1.0×10^{-6}

جدول ۲

منابع

- [1] B. K. Alpert, A class of Bases in L^2 for the Sparse Representation of Integral Operators, SIAM J. Math. 24(1993), 246-262.
- [2] K. Atkinson, An Introduction to Numerical Analysis University of Iowa, John Wiley & Sons, (1988).
- [3] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Reach Science Publishers, (1978).
- [4] A. Gerasoulis, Piecwise-polynomial quadratures for Cauchy singular Integrals, SIAM. J. Numer. Anal. 23(1986) 891-901.
- [5] M. Maleknejad, M. Rabbani, N. Aghazadeh and M. Karami, A wavelet Petrov-Galerkin method for solving Integro-Differential Equation, International Journal of Computer Mathematics. Vol. 00, No. 0, Month 2008, 1-19.
- [6] F. A. Potra and E. Venturino, low-order methods for Cauchy principle value integrals with endpoint singularities, IMAJ. Numer. Anal. 14(1994).
- [7] M. Rabbani and K. Maleknejad, A Modification for Solving Fredholm-Hammerstein Integral Equations Using Wavelet Basis, Kybernetes: The International Journal of Systems. Cybernetics and management. Vol. 38 Nos 3/4, 2009 pp. 615-620.