ارایه روشی عددی جهت حل معادله درجه چهار و پیاده سازی آن روی کامپیوتر و مقایسه آن با روش های نیوتن و بیرستو

یوسف نجات بخش*، **شکراله زیاری**، **صالح حاجی حسینلو**
دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه
دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه محقق اردبیلی

چکیده

این روش دارای طرحی کاملا تکراری می باشد که جهت تبدیل معادله درجه چهار به حاصل ضرب عوامل درجه دو استفاده می شود. برای این که معادله درجه چهار $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ را به فرم $(x^2+px+q)(x^2+rx+s)=0$ تبدیل کنیم حالت های مختلف مانند $d>0$ و $d<0$ و شرایط دیگر در نظر می گیریم که تحت عنوان قضایایی مطرح و اثبات می شود و پس از آن مقادیر p,q,r,s را به طوردقیق یا تقریبی با دقت مورد نیاز با استفاده از روند تکراری به دست می آوریم و سپس این روش را با دو روش عددی نیوتن و بیرستو از لحاظ دقت ریشه ها و تعداد تکرار مورد نیاز جهت یافتن ریشه ها مقایسه می کنیم.

کلمات کلیدی: معادله درجه چهار، روش عددی، مقایسه، روش عددی نیوتن و بیرستو.

۱ مقدمه

حل مسایل زیادی نیاز به پیدا کردن ریشه ها ی یک چند جمله ای می گردد مانند تعیین مقادیر ویژه یک ماتریس و حل برخی دستگاه های معادلات و حل سیستم های دینامیکی. حل معادله در جه چهار از دیر باز به روش های ترسیمی وتحلیلی مورد بررسی قرار گرفته بود. به عنوان مثال یکی از روش های تحلیلی روش *Ferrari* می باشد که با استفاده از روش *Ferrari* معادله درجه چهار به معادله درجه سوم به فرم $y^3-by^2+(ac-4d)y+4bd-a^2d-c^2=0$ تبدیل می گردد. اگر y_0 ریشه معادله فوق باشد پس از یافتن مقادیر e و f با استفاده از روابط زیر:

$$e=\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_0}$$

*عهدار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: y_nej@yahoo.com

$$f=\frac{-c+\frac{a\,y_0}{2}}{2e}$$

جواب های معادله درجه چهار می تواند از حل دو معادله زیر حاصل گردد:

$$x^2+\frac{1}{2}a\,x+\frac{1}{2}y_0=ex+f$$
$$x^2+\frac{1}{2}a\,x+\frac{1}{2}y_0=-\,ex-f$$

اما این روش تحلیلی تقریبا پیچیده و در عمل مورد استفاده قرار نمی گیرد و در موارد کار بردی از روش های عددی برای حل این گونه معادلات استفاده می شود. برخی از روش های عددی برای حل این گونه معادلات روش بیرستو، روش مولر، روش نیوتن و روش بیرج- ویتا می باشد هر یک از این روش ها نیاز به مقدار اولیه بدون محدودیت جهت تقریب ریشه ی معادله دارند مثلا روش نیوتن نیاز به یک مقدار اولیه و محاسبه ی مشتق چند جمله ای دارد و روش بیرستو نیز به دو مقدار اولیه نیاز دارد ولی روشی که ما در این مقاله به کار برده ایم جهت به دست آوردن کلیه ی ریشه های معادله ی درجه چهار نیاز به یک مقدار اولیه دارد که محدود به بازه ای می باشد.

۲ روند تبدیل معادلات درجه چهار به حاصل ضرب عوامل درجه دو

فرم کلی زیر را برای معادله ی درجه چهار در نظر می گیریم:

$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ معادله فوق را می توان به صورت ضرب دو عامل درجه دو نوشت یعنی به فرم زیر:

$(x^2+px+q)(x^2+rx+s)=0$ با مساوی قرار دادن ضرایب توان های مختلف x روابط زیر بین ضرایب به دست می آید:

$$\begin{cases} p+q=a & (1)\\ q+pr+s=b & (2)\\ qr+ps=c & (3)\\ qs=d & (4)\end{cases}$$

و لذا مساله منجر به تعیین مقادیر مجهول p، q، r، s می گردد با فرض این که مقادیر a، b، c، d معلوم می باشد.

تکرار را با مقدار اولیه $q=q_n$ شروع می کنیم و متناظر با آن مقادیر p، q، r، s از روابط زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{cases} s_n = \dfrac{d}{q_n} & (۵) \\ p_n = (aq_n - c)/(q_n - s_n) & (۶) \\ r_n = a - p_n & (۷) \end{cases}$$

اگر مقادیر فوق درست باشند باید در رابطه (۲) صدق نمایند بنابراین عبارت زیر را محاسبه کرده و سپس بررسی می کنیم که آیا g_n به صفر نزدیک می باشد یا خیر؟

$$g_n = q_n + p_n r_n + s_n - b \qquad (۸)$$

انتخاب مقدار اولیه برای q به طور کامل دلخواه نمی باشد و مقدار آن با توجه به حالت های زیر محدود می گردد:

الف) اگر d منفی باشد قرار می دهیم: $H = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{d}\right) - b$

حالت۱: اگر H مثبت باشد، q بین صفر و $\sqrt{|d|}$ قرار می گیرد.

اثبات: فرض می کنیم g_n تابعی از q_n باشد، اگر $q_n \to 0^+$ آن گاه $g_n \to -\infty$ زیرا:

هرگاه $q_n \to 0^+$ آن گاه $s_n \to -\infty$ (چون $d < 0$) و بنابراین $p_n \to 0$ و از آنجا $r_n \to a$ و بنابراین از رابطه ی (۸) داریم:

$$q_n \to 0^+ + 0(a) + (-\infty) = -\infty$$

اگر $q_n \to \sqrt{|d|}$ آن گاه $g_n \to H$ زیرا:

هرگاه $q_n \to \sqrt{|d|}$ قرار می دهیم $q_n = \sqrt{|d|}(1-\varepsilon)$ (که در آن ε عدد مثبت کوچکی است)آن گاه از رابطه ی $s_n = \frac{d}{q_n}$ داریم:

$$s_n = \frac{d}{\sqrt{|d|}(1-\varepsilon)} \cong -\sqrt{|d|}(1-\varepsilon)$$

(زیرا $\mathrm{d} < 0$; $\sqrt{|d|}.\sqrt{|d|} = |d| = -d$)

$$\Rightarrow q_n + s_n \cong -2\varepsilon\sqrt{|d|} \qquad , \quad \mathrm{q_n} - s_n \cong 2\sqrt{|d|}$$

و بنابراین با استفاده از رابطه ی (۶) داریم:

$$p_n \cong \left[a\sqrt{|d|}(1-\varepsilon) - c\right]/(2\sqrt{|d|}$$

و با استفاده از رابطه ی (۷) داریم:

$$r_n \cong \left[a\sqrt{|d|}(1+\varepsilon) + c\right]/(2\sqrt{|d|}$$

و در نتیجه با استفاده از رابطه ی (۸) داریم:

$$g_n \cong -2\varepsilon\sqrt{|d|} - b + \frac{\left[a\sqrt{|d|}(1+\varepsilon)+c\right]\left[a\sqrt{|d|}(1-\varepsilon)-c\right]}{4\sqrt{|d|}}$$

$$if\ \varepsilon \to 0 \Rightarrow\ g_n \longrightarrow -b + (a\sqrt{|d|}+c)(a\sqrt{|d|}-c)/(4\sqrt{|d|})$$
$$\Rightarrow g_n \longrightarrow -b + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{|d|}\right) = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{|d|}\right) - b$$
$$\Rightarrow g_n \longrightarrow H$$

حال چون $H > 0$ است لذا طبق قضیه مقدار میانی q ای بین $(0,\sqrt{|d|})$ وجود دارد به طوری که $g_n(q) = 0$

حالت ۲: اگر H منفی باشد، q بین $(-\sqrt{|d|},0)$ قرار می گیرد.

اثبات: فرض می کنیم g_n تابعی از q_n باشد، اگر $q_n \to 0^-$ آن گاه $g_n \to +\infty$ و اگر $q_n \to -\sqrt{|d|}$ مانند حالت قبل می توان نشان داد که $g_n \to H$. حال چون $H < 0$ پس طبق قضیه مقدار میانی q ای بین $(-\sqrt{|d|},0)$ وجود دارد به طوری که $g_n(q) = 0$.

حالت۳: اگر $H = 0$ ، $q = \sqrt{|d|}$ و $s = -\sqrt{|d|}$ می باشد.

اثبات: اگر $q_n \to \sqrt{|d|}$ آن گاه $g_n \to H$ و چون $H = 0$ آن گاه $g_n \to 0$ لذا هرگاه $q \to \sqrt{|d|}$ آن گاه $g_n(q) = 0$ و در نتیجه از رابطه ی (۵) داریم:

$$s_n = \frac{d}{q_n} \Rightarrow s_n = \frac{d}{\sqrt{|d|}} \Rightarrow s_n = -\sqrt{|d|}$$

(زیرا $d < 0$ است.)

ب) اگر $d > 0$ باشد و $a^2 d \neq c^2$ آن گاه q در $(0,\sqrt{d})$ قرار دارد.

اثبات: فرض می کنیم g_n تابعی از q_n باشد، اگر $q_n \to 0^+$ آن گاه $g_n \to +\infty$ زیرا $d > 0$ است.

اگر $q_n \to \sqrt{d}$ آن گاه $g_n \to -\infty$ زیرا:

هرگاه $q_n \to \sqrt{d}$ قرار می دهیم $q_n = \sqrt{d}(1-\varepsilon)$ پس از رابطه ی $s_n = \frac{d}{q_n}$ داریم:

$$s_n = \frac{d}{\sqrt{d}(1-\varepsilon)} \cong \sqrt{d}(1+\varepsilon)$$
$$\Rightarrow q_n + s_n \cong 2\sqrt{d} \qquad , \qquad q_n - s_n \cong -2\varepsilon\sqrt{d}$$

و بنابراین با استفاده از رابطه ی (۶) داریم:

$$p_n \cong \left[a\sqrt{d}(1-\varepsilon) - c\right]/(-2\varepsilon\sqrt{d})$$

اگر $\varepsilon \longrightarrow 0$ و $a\sqrt{d} - c < 0$ آن گاه $p_n \to +\infty$.

و اگر $\varepsilon \longrightarrow 0$ و $a\sqrt{d} - c > 0$ آن گاه $p_n \to -\infty$.

و با استفاده از رابطه ی (۷) داریم: هرگاه $\varepsilon \longrightarrow 0$ آن گاه $r_n \to \pm\infty$

و لذا از رابطه ی (۸) داریم $g_n \to 2\sqrt{d} + (\pm\infty)(\mp\infty) - c$ در نتیجه $g_n \to -\infty$ وهرگاه $q_n \to \sqrt{d}$
طبق قضیه مقدار میانی نتیجه می گیریم که اگر $d > 0$ و $a\sqrt{d} \neq c$ یا $a^2 d \neq c^2$ آن گاه q در $(0, \sqrt{d}\,)$قرار دارد.

ج) اگر $d > 0$ باشد و $a^2 d = c^2$ آن گاه $q_n = s_n = \sqrt{d}$.

اثبات: با در نظر گرفتن رابطه ی (۶) اگر $q_n \neq s_n$ یعنی $|q_n - s_n| < \varepsilon$ آن گاه طبق قسمت قبل باید $a\sqrt{d} - c < 0$ یا $a\sqrt{d} - c > 0$ یا به طور خلاصه $a\sqrt{d} \neq c$ و این خلاف فرض $a\sqrt{d} = c$ $(a^2 d = c^2)$ است پس $q_n = s_n = \sqrt{d}$.

توجه داریم که p و r از رابطه های (۱) و (۲) محاسبه می شوند، یعنی این مقادیر از حل دستگاه زیر به دست می آیند:

$$\begin{cases} p + r = a \\ q + pr + s = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p + r = a \\ pr = b - 2\sqrt{d} \end{cases}$$

حل دستگاه فوق منجر به حل معادله درجه دو می گردد که در آن :
$\Delta = a^2 - 4(b - 2\sqrt{d})$. اگر $\Delta > 0$ باشد به راحتی p و r قابل محاسبه اند ولی اگر $\Delta < 0$ باشدضرایب p و r مختلط می شوند. توجه داریم که تجزیه یک معادله ی درجه چهار به عوامل درجه دو همیشه منحصر بفرد نیست. برای مثال اگر تمام ریشه های یک معادله حقیقی باشند چهار عامل خطی ممکن است دو به دو ترکیب شوند و سه عامل درجه دو را بدهند.

انتخاب مقادیر اولیه برای q طبق شرایط الف،ب و ج انجام می شود البته مورد ج نیاز به مقدار اولیه ندارد. شرایط الف و ب بازه ای از مقادیر ممکن q_n رامی دهند. مقدار اولیه برای q مقداری نزدیک مرکز بازه انتخاب می شود و در مرحله ی بعد r_n، g_n، s_n، p_n محاسبه می گردند که به ترتیب از روابط(۵) تا (۸) استفاده می شود. اگر مقدار g_n به ازای مقدار اولیه q_n، دقیقا یا با دقت مورد نیاز صفر شود آن گاه مساله حل شده است در غیر این صورت برای تعیین مقدار بهتری از q_n از نسبت ساده ای استفاده می شود و سپس r_n، g_n، s_n، p_n دوباره محاسبه می شوند.

برای یافتن تقریبی از q_n با دقت بالا می توان از تکنیک عددی موسوم به فرایند ایتکن استفاده کرد این روش هنگامی مناسب است که بخواهیم تعداد مراحل اجرا را به حداقل کاهش دهیم.

فرایند تکرار، زمانی پایا می باشد که g_n با دقت مورد نیاز صفر شود در این صورت آخرین مقادیر محاسبه شده همان p، q، r، s مورد نظر می باشد.

برنامه مربوط به این روش با استفاده از نرم افزار *Matlab* پیاده سازی شده است.

مثال۲-۱ معادله زیر را به کمک تجزیه به عوامل درجه دو حل می کنیم.

$$x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 9x - 11 = 0$$
$$a = -3, b = 7, c = -9, d = -11$$

چون $d < 0$ است لذا با استفاده از حالت (الف) مقدار H را محاسبه می کنیم:

$$H = \frac{1}{4}\left(3^2 - \frac{9^2}{11}\right) - 7 \Rightarrow H < 0$$

لذا q بین صفر و $-\sqrt{11}$ قرار دارد در نتیجه $q_n = -1.6583$ پس از ۳ تکرار مقادیر زیر به دست می آیند:

q_n	s_n	$q_n - s_n$	p_n	r_n	g_n
-1.6942	6.4927	-8.1869	-1.7201	-1.2799	-0.0000

جدول۱

بنابراین تجزیه ی زیر حاصل می گردد:

$$(x^2 - 1.7201x - 1.6942)(x^2 - 1.2799x + 6.4927) = 0$$

و لذا ریشه های معادله عبارتند از:

$$x_1 = 2.420182 \qquad x_2 = -0.700037$$
$$x_3 = 0.639927 + 2.466409\, i \qquad x_4 = 0.639927 - 2.466409\, i$$

مثال۲-۲ معادله زیر را به کمک تجزیه به عوامل درجه دو حل می کنیم.

$$x^4 - 3x^2 + 5x - 5 = 0$$
$$a = 0,\ \ \text{b=-3},\ \ \text{c=5},\ \ \text{d=-5}$$
$$d < 0 \Rightarrow H = \frac{1}{4}\left(a^2 - \frac{c^2}{d}\right) - b \Rightarrow H > 0$$

لذا q بین صفر و $+\sqrt{5}$ قرار دارد و در نتیجه $q_n = +\frac{\sqrt{5}}{2} = +1.1180$ پس از ۴ تکرار مقادیر زیر به دست می آیند:

q_n	s_n	$q_n - s_n$	p_n	r_n	g_n
1.4645	-3.4142	4.8786	-1.0249	1.0249	-0.0000

جدول۲

بنابراین تجزیه زیر حاصل می گردد:

$$(x^2 - 1.0249x + 1.4645)(x^2 + 1.0249x - 3.4142) = 0$$

لذا ریشه های معادله عبارتند از:

$$x_1 = 0.5124 + 1.0963i$$
$$x_2 = 0.5124 - 1.0963i$$
$$x_3 = 1.4050$$
$$x_4 = -2.4299$$

مثال۲-۳ معادله زیر را به کمک تجزیه به عوامل درجه دو حل می کنیم.

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4 = 0$$
$$a = 4,\ b=4,\ c=0,\ d=-4$$
$$d<0 \Rightarrow H=\frac{1}{4}\left(a^2 - \frac{c^2}{d}\right) - b \Rightarrow H = 0$$

لذا بطور مستقیم مقادیر p، q، r، s به دست می آیند.

$$p = 2,\ q=2,\ r=2,\ s=-2$$

بنابراین تجزیه زیر حاصل می شود:

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

لذا ریشه های معادله عبارتند از:

$$x_1 = -1 + i$$
$$x_2 = -1 - i$$
$$x_3 = 0.7321$$
$$x_4 = -2.7321$$

مثال۲-٤ معادله زیر را به کمک تجزیه به عوامل درجه دو حل می کنیم.

$$x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 8x + 9 = 0$$
$$a = 2,\ b=7,\ c=8,\ d=9$$
$$d > 0,\ a^2 d \neq c^2 \Rightarrow 0 < q < \sqrt{d} \Rightarrow 0 < q < 3$$

قرار می دهیم: $q_n = \frac{3}{2} = 1.5$ پس از ۳ تکرار مقادیر زیر به دست می آیند:

q_n	s_n	$q_n - s_n$	p_n	r_n	g_n
2.0489	4.3931	-2.3445	1.6646	0.3354	0.0000

جدول۳

بنابراین تجزیه زیر حاصل می شود:

$$(x^2+1.6646+2.0487)(x^2+0.3354x+4.3931)=0$$

لذا ریشه های معادله عبارتند از:

$$x_1=-0.8323+1.1644i \quad x_2=-0.8323-1.1644i$$

$$x_3=-0.1677+2.0893i \quad x_4=-0.1677-2.0893i$$

مثال۲-۵ معادله زیر را به کمک تجزیه به عوامل درجه دو حل می کنیم.

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0$$
$$a=1,\ b=1,\ c=1,\ d=1$$
$$d>0,\ a^2d=c^2 \Rightarrow q_n s_n=\sqrt{d}=\sqrt{1}=1$$

لذا مقادیر $q=s=1$ می باشند و برای یافتن مقادیر r ، p عبارت زیر را تشکیل می دهیم:

$$\Delta=a^2-4(b-2\sqrt{d})1-4(1-2)=5$$

چون $\Delta>0$ لذا:

$$p=\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180$$
$$r=\frac{a-\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-0.6180$$

بنابراین تجزیه زیر حاصل می شود:

$$(x^2+1.6180x+1)(x^2-0.6180x+1)=0$$

لذا ریشه های معادله عبارتند از:

$$x_1=-0.8090+0.5878i \quad x_2=-0.8090-0.5878i$$
$$x_3=0.3090+0.9511i \quad x_4=0.3090-0.9511i$$

مثال۲-٦ معادله زیر را به کمک تجزیه به عوامل درجه دو حل می کنیم.

$$x^4+6x^3+18x^2-24x+16=0$$

$$a=-6,\ b=18,\ c=-24,\ d=16$$

$$d>0,\ a^2d=c \Rightarrow q_n=s_n=\sqrt{d}=4$$

لذا مقادیر $q = s = 4$ می باشند و برای یافتن مقادیر p ،r عبارت زیر را تشکیل می دهیم:

$$\Delta = a^2 - 4(b - 2\sqrt{d}) = 36 - 4(18 - 2\times 4) = -4$$

چون $d < 0$ لذا مقادیر p ،r مختلط می باشند:

$$p = \frac{a + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-6 + 2i}{2} = -3 + i$$
$$r = \frac{a - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-6 - 2i}{2} = -3 - i$$

بنابراین تجزیه زیر حاصل می شود:

$$(x^2 + (-3 + i)x + 4)(x^2 + (-3 - i)x + 4) = 0$$

لذا ریشه های معادله عبارتند از:

$$x_1 = 1 + i$$
$$x_2 = 2 - 2i$$
$$x_3 = 1 - i$$
$$x_4 = 2 + 2i$$

۳ مقایسه روش ارایه شده با روش های عددی بیرستو و نیوتن

برای یافتن ریشه های معادله $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ روش ارایه شده جهت انجام روند تکرار به یک مقدار اولیه برای پارامتر q در فرم درجه دوم $x^2 + px + q$ نیاز دارد که این مقدار اولیه با توجه به شرایط گفته شده در یکی از بازه های $(0, \sqrt{|d|})$ و $(-\sqrt{|d|}, 0)$ قرار دارد. ولی روش بیرستو برای یافتن ریشه های مختلط یک چند جمله ای به دو مقدار اولیه بدون محدودیت نیاز دارد و روش نیوتن نیز به یک مقدار اولیه بدون محدودیت به عنوان تقریبی از ریشه و به مقدار مشتق چند جمله ای در نقطه شروع نیاز دارد که البته مقادیر $P(x_0)$ و $P'(x_0)$ به روش هورنر به دست می آیند ولی ایراد اساسی روش نیوتن این است که احتمال دارد $P'(x_0)$ در بعضی مواقع صفر شود که در این صورت باید نقطه ی شروع را تغییر داد. البته تعداد تکرارهای لازم جهت یافتن ریشه چند جمله ای در روش نیوتن از دو روش دیگر زیادتر است. روش ارایه شده در شرایط مساوی با تعداد تکرار های کمتری نسبت به روش بیرستو به ریشه های چند جمله ای می رسد که عمدتا این ریشه ها دقیق تر از ریشه های به دست آمده توسط روش بیرستو است. البته دقت ریشه ها توسط این روش ها زمانی کاملا مشاهده می شود که با دقت مضاعف کار کنیم ولی با دقت معمولی ریشه های به دست آمده توسط تمام روش ها یکسان است. اکنون با ارایه چند مثال، سه روش مذکور را از لحاظ تعداد تکرارهای لازم جهت رسیدن به ریشه های چند جمله ای درجه ۴، با هم مقایسه می کنیم.

مثال ۳-۱ تعداد تکرار های لازم جهت رسیدن به ریشه های معادله $x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 9x - 11 = 0$ به سه روش؛ نیوتن، بیرستو و روش ارایه شده را می یابیم.

تعداد تکرار ها با روش نیوتن

تعداد تکرار های لازم جهت رسیدن به هر یک از ریشه های معادله $x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 9x - 11 = 0$ در جدول زیر خلاصه شده است:

نقطه شروع x_0	ریشه	تعداد تکرار
$-\frac{\sqrt{11}}{2}i$	-0.7000	7
$-\frac{\sqrt{11}}{2}i$	0.6399-2.4664i	6
$-\frac{\sqrt{11}}{2}i$	2.4202	7
$-\frac{\sqrt{11}}{2}i$	0.6399-2.4664i	1

جدول٤

تعداد تکرار ها با روش بیرستو

با قرار دادن $p = q = -\frac{\sqrt{11}}{2}i$ پس از ۳ تکرار به عبارت درجه دوم $x^2 - 1.7201x - 1.6942 = 0$ می رسیم که ریشه های آن $x_1 = 2.4202$ و $x_2 = -0.7000$ می باشند و برای رسیدن به عبارت درجه دوم دیگر از تقسیم هورنر استفاده می شود.

تعداد تکرار ها با روش ارایه شده

با قرار دادن $q_n = -\frac{\sqrt{11}}{2}$ پس از ۳ تکرار به تمام ریشه ها می رسیم.

مثال ۳-۲ تعداد تکرارهای لازم جهت رسیدن به ریشه های معادله $x^4 - 3x^2 + 5x - 5 = 0$ به سه روش؛ نیوتن، بیرستو و روش ارایه شده را می یابیم.

تعداد تکرار ها با روش نیوتن

تعداد تکرار های لازم جهت رسیدن به هر یک از ریشه های معادله $x^4 - 3x^2 + 5x - 5 = 0$ در جدول زیر خلاصه شده است:

نقطه شروع x_0	ریشه	تعداد تکرار
$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	0.5124-1.0963i	6
$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	0.5124+1.0963i	8
$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	1.4050	6
$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	-2.4299	1

جدول٥

تعداد تکرار ها با روش بیرستو

با قرار دادن $p = q = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ پس از ۹ تکرار به عبارت درجه دوم $x^2 + 1.0249x - 3.4141 = 0$ می رسیم که ریشه های آن $x_1 = -2.4299$ و $x_2 = 1.4050$ می باشند و برای رسیدن به عبارت درجه دوم دیگر از تقسیم های متوالی هورنر استفاده می شود.

تعداد تکرار ها با روش ارایه شده:

پس از ۴ تکرار به تمام ریشه ها می رسیم.

مثال ۳-۳ تعداد تکرارهای لازم جهت رسیدن به ریشه های معادله $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4 = 0$ به سه روش؛ نیوتن، بیرستو و روش ارایه شده را می یابیم.

تعداد تکرار ها با روش نیوتن

تعداد تکرار های لازم جهت رسیدن به هر یک از ریشه های معادله $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4 = 0$ در جدول زیر خلاصه شده است:

نقطه شروع x_0	ریشه	تعداد تکرار
$-i$	-2.7321	15
$-i$	$-1-i$	12
$-i$	0.7321	6
$-i$	$-1+i$	1

جدول٦

تعداد تکرار ها با روش بیرستو

با قرار دادن $p = q = -1$ پس از ۱۰ تکرار به عبارت درجه دوم $x^2 + 2x - 2 = 0$ می رسیم که ریشه های آن $x_1 = -2.7321$ و $x_2 = 0.7321$ می باشند و برای رسیدن به عبارت درجه دوم دیگر از تقسیم های متوالی هورنر استفاده می شود.

تعداد تکرار ها با روش ارایه شده

بطور مستقیم و بدون تکرار به تمام ریشه ها می رسیم.

مثال ۳-٤ تعداد تکرارهای لازم جهت رسیدن به ریشه های معادله $x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 8x + 9 = 0$ به سه روش؛ نیوتن، بیرستو و روش ارایه شده را می یابیم.

تعداد تکرار ها با روش نیوتن

تعداد تکرار های لازم جهت رسیدن به هر یک از ریشه های معادله $x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 8x + 9 = 0$ در جدول زیر خلاصه شده است:

نقطه شروع x_0	ریشه	تعداد تکرار
$1.5i$	$-0.8323+1.1644i$	7
$1.5i$	$-0.1677+2.0893i$	5
$1.5i$	$-0.8323-1.1644i$	7
$1.5i$	$-0.1677-2.0893i$	1

جدول۷

تعداد تکرار ها با روش بیرستو

با قرار دادن $p=q=1.5$ پس از ۴ تکرار به عبارت درجه دوم $x^2+1.6647x+1.0487=0$ می رسیم که ریشه های آن $x_1=-0.8323-1.1644i$ و $x_2=-0.8323+1.1644i$ می باشند و برای رسیدن به عبارت درجه دوم دیگر از تقسیم های متوالی هورنر استفاده می شود.

تعداد تکرار ها با روش ارایه شده

با قرار دادن $q_n=1.5$ پس از ۳ تکرار به تمام ریشه ها می رسیم.

مثال ۳-۵ تعداد تکرارهای لازم جهت رسیدن به ریشه های معادله $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ به سه روش؛ نیوتن، بیرستو و روش ارایه شده را می یابیم.

تعداد تکرار ها با روش نیوتن

تعداد تکرار های لازم جهت رسیدن به هر یک از ریشه های معادله $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ در جدول زیر خلاصه شده است:

نقطه شروع x_0	ریشه	تعداد تکرار
$0.5i$	$-0.8090+0.5878i$	8
$0.5i$	$0.3090+0.9511i$	7
$0.5i$	$-0.8090-0.5878i$	8
$0.5i$	$0.3090-0.9511i$	1

جدول۸

تعداد تکرار ها با روش بیرستو

با قرار دادن $p=q=0.5$ پس از۱۳ تکرار به عبارت درجه دوم $x^2-0.6180x+1=0$ می رسیم که ریشه های آن $x_1=-0.3090-0.9511i$ و $x_2=0.3090+0.9511i$ می باشند و برای رسیدن به عبارت درجه دوم دیگر از تقسیم های متوالی هورنر استفاده می شود.

تعداد تکرار ها با روش ارایه شده

بطور مستقیم و بدون تکرار به تمام ریشه ها می رسیم.

مثال ۳-٦ تعداد تکرارهای لازم جهت رسیدن به ریشه های معادله $x^4-6x^3+18x^2-24x+16=0$ به سه روش؛ نیوتن، بیرستو و روش ارایه شده را می یابیم.

تعداد تکرار ها با روش نیوتن

تعداد تکرارهای لازم جهت رسیدن به هر یک از ریشه های معادله $x^4-6x^3+18x^2-24x+16=0$ در جدول زیر خلاصه شده است:

نقطه شروع x_0	ریشه	تعداد تکرار
$2i$	$1+i$	6
$2i$	$2+2i$	14
$2i$	$1-i$	6
$2i$	$2-2i$	1

جدول۹

تعداد تکرار ها با روش بیرستو

با قرار دادن $p=q=2$ پس از ۷ تکرار به عبارت درجه دوم $x^2-2x+2=0$ می رسیم که ریشه های آن $x_1=1+i$ و $x_1=1-i$ می باشند و برای رسیدن به عبارت درجه دوم دیگر از تقسیم های متوالی هورنر استفاده می شود.

تعداد تکرار ها با روش ارایه شده

بطور مستقیم و بدون تکرار به تمام ریشه ها می رسیم.

٤ نتیجه گیری

با توجه به اینکه حل معادلات درجه چهار در گرافیک کامپیوتری و پردازش تصویری و حل سیستم های دینامیک نقش مهمی دارد لذا روش ارایه شده ریشه های یک چند جمله ای درجه چهار را با دقت بالایی نسبت به روش های عددی دیگر از جمله بیرستو و نیوتن به دست می دهد و همچنین مزیت عمده ی این روش نسبت به دو روش مذکور با توجه به بررسی های انجام شده در کاهش تکرار فرایند در رسیدن به ریشه ها و نیاز به یک مقدار اولیه با محدودیت برای پارامتر q در فرم x^2+px+q می باشد.

از این روش می توان برای یافتن ریشه های معادلاتی به فرم زیر نیز استفاده کرد:

$$x^{4k}+ax^{3k}+bx^{2k}+cx^{k}+d=0$$

که در آن k عددی طبیعی و بزرگتر از یک است برای حل این گونه معادلات کافی است قرار دهیم $y=x^k$.

البته می توان دقت ریشه ها را افزایش داد که در این صورت هزینه محاسبات بالا می رود. به عنوان کار بعدی می توان راجع به پایداری این روش در مقایسه با دو روش بیرستو و نیوتن تحقیق نمود.

منابع

[1] Forsy the, G. E, M. A. Malcolm and C. B. Moler, Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice-Hall, 1976.

[2] Ralson, A. and Robinowitz, p. A First Course in numerical Analysis, McGraw- Hill, New York 1978.

[3] Conte, S.D and C. deBoor, Elementary Numerical Analysis, New York McGraw –Hill 1981.

[4] Press, W. H. ,S. A. Teukolsky , W.T.Vetterling and B.P.Flanney , Numerical Recipes in C:The Art of Scientific Computing 2nd ed .,Combridge University Press Combridge, Uk,1992.

[5] Quarteroni, A.S.Ricardo and F. saleri, Numerical Mathematics, 2nd ed.Springer, 2007.