محاسبه سری مک لورن توابع توسط روش آشوب هموتوپی

فرج اله محمدی یعقوبی[۱*]، طاهر لطفی[۱]، اسماعیل بابلیان[۲]
[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان-همدان
[۲] گروه ریاضی و کامپیوتر ـ دانشگاه تربیت معلم تهران

چکیده
در این مقاله با استفاده از روش آشوب هموتوپی(HPM)، سری مک لورن تابع داده شده $y=f(x)$ محاسبه می گردد. برای این منظور ابتدا یک معادله مانند $A(f)=0$ برای $y=f(x)$ تشکیل داده و سپس این معادله با روش آشوب هموتوپی حل می شود. در پایان سادگی و کارایی این روش با چندین مثال نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: روش آشوب هموتوپی، سری مک لورن، سری توانی.

۱ مقدمه

در سال های اخیر، روش آشوب هوموتوپی (HPM) به طور موفقیت آمیزی برای حل انواع مختلفی از مسایل ریاضی به کار رفته است[۱۵و۱۴و۸-۱]. این روش که روشی مؤثر و راحت برای حل انواع معادلات خطی و غیرخطی می‌باشد، ابتدا در سال ۱۹۹۸ توسط He پیشنهاد شد [۸]. در این روش از تکنیک هوموتوپی در توپولوژی استفاده مـی‌گردد. کارایی، سادگی و دقت روش آشوب هوموتوپی در حل دسته وسیعی از انواع معادلات خطی وغیرخطی همراه با سرعت بالای همگرایی یکی دیگر از مزایای آن می باشد. از طرفی سری توانی تابع $y=f(x)$ کاربردهای زیادی در ریاضیات و مهندسی دارد. بـرای مثال در حل معادلات این مقاله از طرحی با عنوان" محاسبه سری مک لورن با استفاده از روش آشوب هوموتوپی و بدون مشتق گیری" دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان استخراج شده است.

در دیفرانسیل و نظریه تقریب می توان کاربرد سری توانی را به وضوح مشاهده کرد. بنابراین محاسبه سری توانی توابع اهمیت زیادی دارد [۱۳-۹]. در ریاضیـــات معمولاً از سری تیلور یا مک لورن بـرای نـمایش تابع $y=f(x)$ به صورت سری توانی استفاده می گردد، برای نمایش تابع $f(x)$ به صورت سری تیلور حول نقطه x_0 لازم است که تابع داده شده $f(x)$ دارای مشتق تمام مراتـب در بازه ای که x_0 یک نقطه درونی آن است، باشـد. در این صورت سری تیلور $y=f(x)$ حول نقطه x_0 برابر است با:

*عهدار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: Fm.yaghobi@yahoo.com

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(x-x_0\right)^k \qquad (۱)$$

که

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad (۲)$$

در حالت خاصی که $x_0=0$، به (۱) سری مک لورن تابع $y=f(x)$ گوییم که اهمیت زیادی دارد. برای محاسبه بازه همگرایی سری توانی (۱) به [۱۳-۹] مراجعه کنید.
در محاسبه سری مک لورن توابع به صورت فوق، طبق (۲) نیاز به محاسبه مشتق k-ام $f(x)$ داریم که محاسبه آن در مورد برخی از توابع تا حدودی مشکل می باشد، بویژه اگر $f(x)$ حاصلضرب چندین تابع باشد این مشکل بیشتر هم می شود. روشی که در این مقاله برای به دست آوردن سری مک لورن تابع $y=f(x)$ استفاده می گردد، تنها ممکن است به چند مشتق اولیه $f(x)$ نیاز داشته باشد. در این روش معادله

$$A(f)=0 \qquad (۳)$$

را برای $f(x)$ تشکیل داده و با حل این معادله با استفاده از روش آشوب هموتوپی (HPM)، سری مک لورن تابع $y=f(x)$ به دست می آید.

۲ روش آشوب هموتوپی(HPM)

روش آشوب هموتوپی یک تغییر شکل پیوسته از مساله ای ساده با حل آسان به مساله مورد مطالعه با حل مشکل، می باشد. در این روش، جواب به صورت یک سری در نظر گرفته می شود که در اکثر مواقع این سری دارای همگرایی سریع به جواب واقعی است بـــه طوری که چند جمله اول سری، تقریب بسیار خوبی برای جواب واقعی می باشد. برای حل معادله (۳) توسط روش آشوب هموتوپی عملگر A را به دو قسمت (خطی) M و (غیر خطی) N تقسیم می کنیم. بنابراین معادله (۳) را می توان به شکل زیر نوشت.

$$M(f)+N(f)=0 \qquad (۴)$$

برای به دست آوردن جواب معادله (۴) هموتوپی به شکل زیر را در نظر می گیریم.

$$H(v,p)=(1-p)\left[M(v)-M(y_0)\right]+p\left[A(v)\right]=0 \qquad (۵)$$

یا

$$H(v,p)=M(v)-M(y_0)+pM(y_0)+p\left[N(v)\right]=0 \qquad (۶)$$

در روابط بالا، $y_0 = f(0)$ تقریب اولیـــه (۳) می باشد. ضمناً بـرای انجام محاســبات گوناگون طی یک روند قاعده مند، مانند دسته بندی جملاتی که بـه لحاظ درجه تقریب قابل قیاس هستند، پارامتر $p \in [0,1]$ را در (۵) وارد کردیم. بنابراین واضح است که

$$H(v,0) = M(v) - M(y_0) = 0 \quad , \quad H(v,1) = A(v) = 0$$

در نتیجه تغییر p از 0 تا 1 معادل است با تغییر $H(v,p)$ از $M(v) - M(y_0)$ تا $A(v)$، کـــه در توپولوژی گوییم $M(v) - M(y_0)$ و $A(v)$ هموتوپ می باشند. هچنین $0 \le p \le 1$ را مـی شود پارامتر کوچکی در نظر گرفت، پس با کاربرد تکنیک های آشوب، مـی توان جواب (۵) یا (۶) را با یک سری توانی بر حسب p به صورت زیر بیان کرد:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 + \cdots \tag{۷}$$

اگر $p \to 1$ آن گاه (۵) یا (۶) تقریباً با (۳) یکی می شوند و (۷) تقریبی از جواب (۳) می شود، به عبارتی

$$f(x) = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{۸}$$

سری (۸) در اکثر موارد همگرا می باشد، و سرعت همگرایی آن به $A(v)$ بستگی دارد.

۳ مثال ها و نتایج محاسباتی

با جای گذاری (۷) در (۶) و مساوی قرار دادن ضرایب توان های مختلف p در طرفین نتیجه می شود:

$$\begin{aligned}
p^0 &: \quad M(v_0) - M(y_0) = 0 \Rightarrow v_0 = y_0,\\
p^1 &: \quad M(v_1) + M(y_0) + N_0(v_0) = 0,\\
p^2 &: \quad M(v_2) + N_1(v_0, v_1) = 0,\\
p^3 &: \quad M(v_3) + N_2(v_0, v_2, v_2) = 0,\\
&\quad\vdots\\
p^{n+1} &: \quad M(v_{n+1}) + N_n(v_0, v_2, v_2, \ldots, v_n) = 0.
\end{aligned}$$

در روابط فوق $N_k(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ مجموعه همه جملاتی از $N(v)$ است که ضرایب p^{k+1} می باشند. بنابراین با مـحاسبه v_iها با استفاده از روابـط فوق و جای گداری در (۷) و (۸) سری مـک لورن تابع $f(x)$ به دست می آید.

مثال ۳-۱ برای تابع $f(x)=e^{rx}$ داریم $f'(x)=re^{rx}$ ، درنتیجه $f'(x)=rf(x)$ ، بنابراین می توان تعریف کرد $A(f)=f'(x)-rf(x)=0$ ، $M(f)=f'(x)$ ، $N(f)=-rf'(x)$. و چون $v_0=f(0)=1$ در نتیجه

$$v_1=rx,$$
$$v_2=\frac{r^2}{2}x^2,$$
$$v_3=\frac{r^3}{3!}x^3,$$
$$\vdots$$
$$v_n=\frac{r^n}{n!}x^n.$$

و بنابراین

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}x^n.$$

مثال ۳-۲ فرض کنید $f(x)=\sin(rx)$ ، بنابراین $f''(x)=-r^2\sin(rx)$ ، به عبارتــی $f''(x)=-r^2f(x)$. بنابراین می توان تعریف کرد $A(f)=r^2f(x)+f''(x)=0$ ، $M(f)=f''(x)$ و $N(f)=r^2f(x)$. از آنجا که $A(f)$ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است، پس از p^2 به جای p به عنوان ضریب $A(v)$ در معادله (۵) استفاده می گردد. از طرفی $v_0=f(0)=0$ ، $v_1=\frac{f'(0)}{1!}x=x$ ، بنابراین با این فرض که انتگرال عکس مشتق است و ثابت انتگرال گیری نداریم نتیجه می شود:

$$v_2=0,$$
$$v_3=-\frac{r^3x^3}{3!},$$
$$v_4=0,$$
$$v_5=(-1)^2\frac{r^5x^5}{5!},$$
$$\vdots$$
$$v_{2n}=0,$$
$$v_{2n+1}=(-1)^n\frac{(rx)^{2n+1}}{(2n+1)\ !}$$

بنابراین

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n r^{2n+1}}{(2n+1)\ !}x^{2n+1}.$$

مثال ۳-۳ اگر $f(x)=\cos(rx)$ باشد آن گاه مشابه مثال قبلی داریم $f''(x)=-r^2 f(x)$ ، در نتیجه می توان نوشت $A(f)=r^2 f(x)+f''(x)=0$ ، $M(f)=f''(x)$ و $N(f)=r^2 f(x)$. از آنجا که $A(f)$ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است، پس از p^2 به جای p به عنوان ضریب $A(v)$ در معادله (۵) استفاده می گردد. از طرفی $v_0=f(0)=1$ ، $v_1=\frac{f'(0)}{1!}x=0$، بنابراین با این فرض که انتگرال عکس مشتق است و ثابت انتگرال گیری نداریم نتیجه می شود:

$$
\begin{aligned}
v_2 &= -\frac{r^2}{2}x^2,\\
v_3 &= 0,\\
v_4 &= (-1)^2\frac{r^4}{4!}x^4,\\
v_5 &= 0,\\
&\vdots\\
v_{2n} &= (-1)^n\frac{r^{2n}x^{2n}}{(2n)\,!},\\
v_{2n+1} &= 0.
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$f\,(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n r^{2n}}{(2n)\,!}x^{2n}.$$

مثال ۳-٤ فرض کنید $f(x)=r^x$ با $r>0$ و $r\neq 1$، بنابراین $f'(x)=(\ln r)f(x)$ ، پس می توان تعریف کرد $A(f)=f'(x)-(\ln r)f(x)=0$ ، $M(f)=f'(x)$ و $N(f)=-(\ln r)f(x)$ که $v_0=1$، در نتیجه

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (\ln r)\;x,\\
v_2 &= (\ln r)^2\frac{x^2}{2!},\\
v_2 &= (\ln r)^3\frac{x^3}{3!},\\
&\vdots\\
v_n &= (\ln r)^n\frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

و بنابراین

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln r)^n}{n!}x^n.$$

مثال ۳-۵ برای تابع $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ با ساده کردن طرفین داریم $f(x)-xf(x)=1$ ، بنابراین می توان گفت $A(f)=f(x)-1-xf(x)=0$ ، $M(f)=f(x)-1$ ، $N(f)=-xf(x)$. بنابراین با استفاده از رابطه (۶) می توان نوشت:

$$v-1-(y_0-1)+p(y_0-1)+p[-xv]=0$$

که $y_0=v_0=f(0)=1$ ، پس بنا بر رابطه (۷) برای v و با مساوی قرار دادن ضرایب توان های مختلف p در طرفین رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned}
&p^1:\ v_1=x,\\
&p^2:\ v_2=x^2,\\
&p^3:\ v_3=x^3,\\
&\ \vdots\\
&p^n:\ v_n=x^n.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(x)=v_0+v_1+v_2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

برای تابع فوق با مشتق گیری نتیجه می شود $f'(x)=f^2(x)$ که با حل این معادله با روش آشوب هموتوپی دوباره همین نتیجه به دست می آید.

مثال ۳-۶ برای تابع $f(x)=\dfrac{e^x}{1-x}$ با ساده کردن طرفین داریم $f(x)-xf(x)=e^x$ ، بنابراین می توان گفت $A(f)=f(x)-xf(x)-e^x=0$ ، $M(f)=f(x)$ و $N(f)=-xf(x)-e^x$ که $v_0=1$. پس به طور مشابه با مثال فوق و با استفاده از مثال (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&v_1=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\\
&v_2=x\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right),\\
&v_3=x^2\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right),\\
&\ \vdots\\
&v_n=x^n\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right).
\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن ضرایب توان های یکسان x و استفاده از رابطه (۸) نتیجه می شود:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)x^n.$$

مثال ۳-۷ اگر $f(x)=e^x \sin x$ باشد آن گاه داریم $f^{(4)}(x)=-4e^x \sin x$ ، بنابراین می توان گفت:

$$N(f)=4f(x) \text{ و } M(f)=f^{(4)}(x) \text{ ،} A(f)=f^{(4)}(x)+4f(x)=0$$

که

$$v_0=f(0)=0 \text{ ،} v_1=\frac{f'(0)}{1!}x=x \text{ ،} v_2=\frac{f''(0)}{2!}x^2=x^2 \text{ ،} v_3=\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3=\frac{2}{3!}x^3 .$$

$A(f)$ در اینجامعادله دیفرانسیل مرتبه چهارم است، پس با استفاده از p^4 به جای p به عنوان ضریب $N(v)$ در معادله (۵) و با محاسبه v_nها طبق روش آشوب هموتوپی نتیجه می شود:

$$v_{4n}=0 \quad \text{،} v_{4n+1}=\frac{(-1)^n 4^n}{(4n+1)\ !}x^{4n+1} \quad \text{،} v_{4n+2}=2\frac{(-1)^n 4^n}{(4n+2)\ !}x^{4n+2} \quad \text{،} v_{4n+3}=2\frac{(-1)^n 4^n}{(4n+3)\ !}x^{4n+3}$$

و

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 4^n}{(4n+1)\ !}x^{4n+1}+2\frac{(-1)^n 4^n}{(4n+2)\ !}x^{4n+2}+2\frac{(-1)^n 4^n}{(4n+3)\ !}x^{4n+3}\right].$$

مثال ۳-۸ اگر $f(x)=e^x \cos x$ باشد آن گاه داریم $f^{(4)}(x)=-4e^x \cos x$ ، بنابراین مشابه مثال قبلی داریم:

$$A(f)=f^{(4)}(x)+4f(x)=0 \text{ ،} M(f)=f^{(4)}(x) \text{ ،} N(f)=4f(x)$$

که

$$.v_0=f(0)=1 \text{ ،} v_1=\frac{f'(0)}{1!}x=x \text{ ،} v_2=\frac{f''(0)}{2!}x^2=0 \text{ ،} v_3=\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3=-\frac{2}{3!}x^3$$

$A(f)$ در اینجا نیز معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم است، پس با استفاده از p^4 به جای p به عنوان ضریب $N(v)$ در معادله (۵) و با محاسبه v_nها طبق روش آشوب هموتوپی نتیجه می شود:

$$v_{4n}=\frac{(-1)^{4n} 4^{4n}}{(4n)\ !}x^{4n} \quad \text{،} v_{4n+1}=\frac{(-1)^n 4^n}{(4n+1)\ !}x^{4n+1} \quad \text{،} v_{4n+2}=0 \quad \text{،} v_{4n+3}=-2\frac{(-1)^n 4^n}{(4n+3)\ !}x^{4n+3}$$

و

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 4^n}{(4n)\ !}x^{4n}+\frac{(-1)^n 4^n}{(4n+1)\ !}x^{4n+1}-2\frac{(-1)^n 4^n}{(4n+3)\ !}x^{4n+3}\right].$$

مثال ۳-۹ بـرای $f(x)=\tan(x)$ داریـم $f'(x)=1+\tan^2(x)$. در نتیجه $A(f)=f'(x)-1-f^2(x)=0$ ، $M(f)=f'(x)-1$ و $N(f)=-f^2(x)$. بنا براین $v_0=0$ و

$$
\begin{array}{ll}
v_1 = x & v_2 = 0, \\
v_3 = \dfrac{x^3}{3} & v_4 = 0, \\
v_5 = \dfrac{2x^5}{15} & v_6 = 0, \\
v_7 = \dfrac{17x^7}{315} & v_8 = 0, \\
v_9 = \dfrac{62x^9}{2835} & v_{10} = 0, \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

در نتیجه

$$f(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\cdots .$$

مثال۳-۱۰ تابع $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ را در نظر می گیریم، محاسبه سری مک لورن حقیقی تابع فوق با روش کلاسیک بسیار مشکل می باشد و نیازمند محاسبه مشتقات پیچیده است. برای تابع فوق با طرفین وسطین، معادله $A(f)=f(x)-1+xf(x)+x^2f(x)=0$ را می توان به دست آورد. به علت وجود جملات x و x^2 که هر دو در محاسبه سری مک لورن نقش اساسی دارند، تعمیمی از رابطه (۶) را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$H(v,p)=M(v)-M(y_0)+pM(y_0)+p\left[N(v)\right]+p^2\left[R(v)\right]=0$$

که در آن $M(f)=f(x)-1$ ، $N(f)=xf(x)$ ، $R(f)=x^2f(x)$.

با توجه به اینکه $v_0=f(0)=1$ ، پس بنا بر رابطه (۷) برای v و با مساوی قرار دادن ضرایب توان های مختلف p در طرفین رابطه $H(v,p)=0$ داریم

$$
\begin{array}{ll}
p^1 & : \; v_1 = -x, \\
p^2 & : \; v_2 = 0, \\
p^3 & : \; v_3 = x^3, \\
p^4 & : \; v_4 = -x^4, \\
p^5 & : \; v_5 = 0, \\
\vdots &
\end{array}
$$

بویژه رابطه ی $v_n = -xv_{n-1} - x^2 v_{n-2}$ را برای $n \geq 2$ خواهیم داشت و بنابراین

$$v_{3n} = x^{3n}, \qquad v_{3n+1} = -x^{3n+1}, \qquad v_{3n+2} = 0.$$

در نتیجه

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}$$

٤ نتیجه‌گیری

در این مقاله روش آشوب هموتوپی برای یافتن بسط سری مک لورن توابع ارائه شد. همان طوری کـــه مشاهده شد، روش پیشنهادی بسیار ساده و کاربردی می باشد و برای محاسبه سری مک لورن به بیش از چند مشتق اولیه تابع نیاز ندارد و تنها در بعضی موارد نیاز به انتگرال گیری از چندجمله ای ها دارد که آن هم بسیار ساده می باشد.

منابع

[1] J. H. He, The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities, Applied Mathematics and Computation, 151 (2004), pp. 287-292.
[2] J. H. He, Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, Chaos, Solitons and Fractals, 26 (2005), pp. 695-700.
[3] J. H. He, Homotopy perturbation method for solving boundary value problems, Physics Letters A, 350 (2006), pp. 87-88.
[4] J. H. He, Limit cycle and bifurcation of nonlinear problems, Chaos, Solitions and Fractals, 26 (3) (2005), pp. 827-833.
[5] J. Biazar, H. Ghazvini, Exact solutions for nonlinear Sehrodinger equations by He's homotopy perturbation method, Physics Letters A, 366 (2007), pp. 79-84.
[6] D. D. Ganji, The application of He's homotopy perturbation method to nonlinear equations arising in heat transfer, Physics Letters A, 355 (2006), pp. 337-341.
[7] S. Abbasbandy, Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method, Applied Mathematics and Computation, 173 (2006), pp. 493-500.
[8] J. H. He, Homotopy perturbation technique, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 178 (1999), pp. 257-262.
[9] Richard A. Silverman, Modern Calculusand Analytic Geometry, The Macmillian Company, 1969.
[10] B. Thomas, Ross L. Finney, Calculus and Analytic Geometry, 7th ed, Addison- Wesley, 1988.
[11] David Brannan, A First Course in Mathemastical Analysis, Cambrigde Unversity, Press, 2006.
[12] George F. Simmons, Differential Equations, McGraw-Hill Inc., 1972
[13] Steven G. Krantz, Differential equations demystified, McGraw_Hill Inc, 2005
[14] F. M. Yaghoobi, A new method to compute the Maclaurin series, 40th Annual Iranian Mathematics Conference, August 2009, Available at http://www.aimc40.ir/node/256.
[۱۵] طاهر لطفی، اسماعیل بابلیان، فرج اله محمدی یعقوبی، محاسبه تابع گاما توسط روش‌های تجزیه آدومین و آشوب هوموتوپی و مقایسه آن ها، مجله ریاضیات کاربردی دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان، شماره ۱۴، ۵۷-۴۹، ۱۳۸۶.
[۱۶] فرج اله محمدی یعقوبی، طاهر لطفی، اسماعیل بابلیان، محاسبه تابع بتا توسط روش‌های تجزیه آدومین و آشوب هوموتوپی و مقایسه آن ها، مجله ریاضیات کاربردی دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان، زیر چاپ.