مجله ریاضیات کاربردی واحد لاهیجان، سال ششم، شماره ۲۳، زمستان ۸۸، ص ص ۱۷-۱۱

حل معادلات غیرخطی با استفاده از فنون آشوب و بسط لاگرانژ

طاهر لطفی[۱*]، فرج اله محمدی یعقوبی[۱]، اسماعیل بابلیان[۲]
[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان
[۲] گروه ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه تربیت معلم تهران

چکیده
در این مقاله فنون آشوب و بسط لاگرانژ برای حل معادلات غیرخطی جبری معرفی شده است. همچنین با ارایه چند مثال سادگی، کارایی و مؤثر بودن الگوریتم پیشنهادی نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: بسط لاگرانژ، فنون آشوب، انتگرال کوشی.

۱ مقدمه
مساله یافتن ریشه معادلات جبری غیرخطی را مـی توان اغلب در علوم و مهندسی پیدا کرد. بـــه غیر از فرمول ریشه یابی نیوتن، فرمول های دیگری مانند روش Petkovic برای یافتن ریشه های تکراری چندجمله ای ها [۱] و روش Newton-like iteration که توسط He [۳،۲] پیشنهاد شد، را می توان نام برد. اما یکی از اشکالات مشهور روش های فوق انتخاب مقدار اولیه x_0 است که باید به اندازه کافی نزدیک به جواب واقعی انتخاب شود تا همگرایی روش های فوق را برای ما تضمین کند. یافتن مقدار بحرانی برای x_0 خیلی مشکل می باشد و نیاز به یک الگوریتم کلی و مفید دارد [۴]. به غیر از روش های فوق، روش های دیگری نیز در سال های اخیر برای محاسبه ریشه معادلات مورد استفاده قرار گرفته اند، مانند روش تجزیه آدومین (ADM) و تعمیم آن [۱۲-۵] روش آشوب هموتوپی (HPM) و تعمیم آن [۱۵-۱۳] و روش های دیگر [۲۲-۱۸]. روش های ذکر شده همگی تکراری هستند و بنابراین بعضی وقت ها محاسبه جواب معادله برای nهای بزرگ دشوار و کسل کننده می باشد. در این مقاله ما سعی می کنیم با استفاده از فنون آشوب و بسط لاگرانژ فرمولی صریح و ساده برای حل معادلات غیر خطی ارایه دهیم.

*عهده دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: lotfitaher@yahoo.com

۲ فن اساسی آشوب

ایده اساسی را می توان در عباراتی خلاصه به ساده ترین صورت ارایه کرد [۲۳,۱۶] که ما آن را برای حل معادلات جبری غیر خطی به کار می بریم. برای حل معادله

$$F(u) = v \quad (۱)$$

که به هر علتی مانند غیر خطی بودن یا خطی از مرتبه بالا بودن حل آن مشکل است، فرض می کنیم

$$L(u) = v \quad (۲)$$

یک معادله کمکی باشد که دارای جواب صریح و منحصر به فرد

$$u = T(v) \quad (۳)$$

است. در عمل این امر به معنی آن است که $L(u)$ یک عملگر خطی از u است، یعنی به ازای هر دو تابع u_1 و u_2 و اسکالرهای c_1 و c_2 داریم

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1L(u_1) + c_2L(u_2). \quad (۴)$$

بعد از این فرض می کنیم که L خطی است. بنابراین (۱) را به صورت زیر می نویسیم

$$L(u) + (F(u) - L(u)) = v \quad (۵)$$

با معرفی تابع جدید $N(u) = L(u) - F(u)$، (۵) را به صورت زیر می نویسیم:

$$L(u) = v + N(u) \quad (۶)$$

به منظور تسهیل بررسی مان در زمینه جواب خصوصی (۶)، پارامتر p را معرفی کرده و معادله جدید زیر را در نظر می گیریم:

$$L(u) = v + pN(u). \quad (۷)$$

در بعضی موارد وارد کردن p تنها یک ترفند ریاضی است که به ما اجازه می دهد انواع گوناگونی از محاسبات را طی یک روند قاعده مند انجام دهیم. برای مثال با این تمهید دسته بندی جملاتی که به لحاظ درجه تقریب قابل قیاس هستند به یک اسلوب روش مند و مفید امکان پذیر می شود. اما در موارد زیادی این پارامتر به طور طبیعی پدید می آید و نمایانگر کمیت های فیزیکی گوناگون، همانند ثابت پلانک h، ضریب کوپلینگ (اتصال)، شدت یک تکانه، عکس سرعت نور یا دامنه یک طرف ثانی است. بنابر این آغاز کردن کار با مطالعه معادلاتی که در آن ها p به صفر میل می کند، کاملاً طبیعی و معقول است. از این رو یک جواب برای معادله (۷) به صورت:

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots \quad (۸)$$

جستجو می کنیم، این جواب یک سری توانی بر حسب p می باشد که ضرایب آن مستقل از p هستند. واضح است که جمله نخست u_0 که با قرار دادن $p = 0$ حاصل می شود، یک جواب تقریبی خطی

$$L(u_0) = v \quad (۹)$$

است، جوابی که ما آن را به صورت $u_0 = T(v)$ خواهیم نوشت.

برای به دست آوردن ضرایب بعدی u_1، u_2،... به شیوه ای قاعده مند، u به دست آمده از رابطه (۸) را در (۷) جایگزین می کنیم و با برابر قرار دادن عوامل، رابطه زیر حاصل می شود:

$$L\left(\sum_{i=0} p^i u_i\right) = v + pN\left(\sum_{i=0} p^i u_i\right). \qquad (۱۰)$$

از آنجا که بنا به فرض L یک عملگر خطی است، بنابراین طرف چپ (۱۰) به صورت زیر در می آید:

$$L(u_0) + pL(u_1) + p^2 L(u_2) + \cdots \qquad (۱۱)$$

با فرض اینکه $N(u)$ بر حسب u تحلیلی است، می توانیم طرف راست (۱۰) را به صورت یک سری توانی از p بسط دهیم. بنابراین

$$N\left(u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \cdots\right) = N(u_0) + pN_1(u_0, u_1) + p^2 N_2(u_0, u_1, u_3) + \cdots \qquad (۱۲)$$

در رابطه فوق، همانگونه که نشان داده شده، ضرایب p^k تنها به مقادیر $u_k, \ldots, u_2, u_1, u_0$ وابسته اند. با تلفیق بسط های (۱۱) و (۱۲) و برابر قرار دادن ضرایب توان های p، می توان u_iها را محاسبه و بر حسب v بیان کرد. سری نامتناهی مندرج در (۸) که ضرایب آن به روش یاد شده در بالا محاسبه می شوند، یک جواب صوری معادله اولیه (۷) نامیده می شود. برای به دست آوردن یک جواب صوری (۶) فقط لازم است که قرار دهیم $p = 0$. در قسمت بعدی یک فرمول صریح و ساده برای محاسبه u_iها ارایه می دهیم.

۳ بسط لاگرانژ

شاید ساده ترین معادله ای کـه الگوریتم یاد شده در بالا را بتوان بر آن مورد استفاده قرار داد، عبارت باشد از [۲۳،۱۶]

$$u = a + pg(u) \qquad (۱۳)$$

که در آن a یک کمیت اسکالر و g یک تابع عددی است. چنانچه $g(u)$ یک تابع تحلیلی بر حسب u در همسایگی نقطه $u = a$ و $|p|$ به اندازه کافی کوچک باشد، از طریق کاربرد مستقیم مبانی نظریه توابع با متغیرهای مختلط، می دانیم که یک جواب منحصر به فرد برای (۱۳)، یعنی یک تابع تحلیلی از p در همسایگی $p = 0$ وجود خواهد داشت و چنین جوابی به صورت

$$u = a + ph_1(a) + p^2 h_2(a) + \cdots \qquad (۱۴)$$

خواهد بود که در آن ضرایب توان های p به a وابسته اند. گر چه ضرایب توان های p، را می توان به روش معمولی از طریق مشتق گیری متوالی به دست آورد، اما این رویکرد نسبتاً دشوار و کسل کننده، تنها بخش بسیار اندکی از ساختار توابع $h_k(a)$ را آشکار می کند. قابل توجه است که یک فرمول صریح کاملاً دقیق و نسبتاً ساده، برای نمایش جملات یاد شده در بالا موجود است.

قضیه ۱ (بسط لاگرانژ) فرض کنید $g(z)$ تابعی تحلیلی در روی و درون خم بسته C حول $z=a$ باشد و فرض کنید p، به ازای هر z واقع در محیط C نامساوی

$$\left|pg\left(z\right)\right|<\left|z-a\right| \tag{۱۵}$$

را ارضا کند. در این صورت معادله (۱۳) دارای دقیقاً یک ریشه $u=u(a)$، در درون C است [۱۶].

حال اگر تابع $f(z)$ نیز در درون و روی C تحلیلی باشد، آن گاه می توان نوشت:

$$f(u)=f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n}{n!}\left(\frac{d}{du}\right)^{n-1}\left[f'(a)g(a)^n\right] \tag{۱۶}$$

ساده ترین راه برای حصول این نتیجه استفاده از قضیه انتگرال کوشی است [۱۷]، که طبق آن داریم:

$$f(u)=f(u(a))=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(u(z))}{z-a}dz\,. \tag{۱۷}$$

همچنین طبق رابطه (۱۳) و قضیه بسط لاگرانژ، معادله $u-a-pg\left(u\right)=0$ دارای ریشه منحصر بفرد $u=u\left(a\right)$ در درون C است و اگر این ریشه تکراری باشد آن گاه معادله $\frac{u-a-pg\left(u\right)}{1-pg'\left(u\right)}=0$ ریشه منحصر بفرد ساده در درون C دارد. بنابراین با استفاده مجدد از انتگرال کوشی می توان نوشت:

$$f\left(u\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f\left(w\right)\left(1-pg'\left(w\right)\right)}{w-a-pg\left(w\right)}dw\,. \tag{۱۸}$$

C خم بسته ساده یاد شده در بالاست که شامل تنها یک صفر $w-a-pg(w)$ می باشد. حال با جای گذاری بسط

$$\frac{1}{w-a-pg(w)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n g(w)^n}{(w-a)^n} \tag{۱۹}$$

در رابطه (۱۸) داریم

$$f\left(u\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f\left(w\right)g\left(w\right)^n dw}{\left(w-a\right)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^{n+1}}{2\pi i}\oint_C\frac{f\left(w\right)g\left(w\right)^n g'\left(w\right)dw}{\left(w-a\right)^{n+1}} \tag{۲۰}$$

با جدا کردن جمله اول در سیگمای اول و تغییر اندیس در سیگمای دوم داریم

$$f\left(u\right)=f\left(a\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f\left(w\right)g\left(w\right)^n}{\left(w-a\right)^{n+1}}dw-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n}{2\pi i}\oint_C\frac{f\left(w\right)g\left(w\right)^{n-1}g'\left(w\right)dw}{\left(w-a\right)^n}. \tag{۲۱}$$

همچنین با استفاده از تعمیم قضیه انتگرال کوشی [۱۷] می توان نتیجه گرفت:

$$\oint_C \frac{f(w)g(w)^n}{(w-a)^{n+1}}dw = \oint_C \frac{\left[f(w)g(w)^n\right]'}{n(w-a)^n}dw = \oint_C \frac{f(w)'\,g(w)^n + f(w)ng'(w)g(w)^{n-1}}{n(w-a)^n}dw,$$

با جای گذاری رابطه فوق در (۲۱) داریم

$$f(u) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(w)g(w)^n}{n(w-a)^n}dw \tag{۲۲}$$

و با استفاده از عکس قضیه انتگرال کوشی [۱۷] می توان نوشت:

$$f(u) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}\left(\frac{d}{dw}\right)^{n-1}\left[f'(w)g(w)^n\right]_{w=a} \tag{۲۳}$$

به ویژه برای $f(u)=u$ داریم

$$u = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}\left(\frac{d}{du}\right)^{n-1}\left[g(u)^n\right]_{u=a}. \tag{۲۴}$$

٤ مثال ها و محاسبات

در این بخش کارایی روش پیشنهاد شده را با چندین مثال برای بررسی می کنیم، به[۵]، [۸]، [۲۲–۱۹] رجوع کنید.

مثال ۱ فرض کنید $h(x) = x - k - e^{-x} = 0$ که $k>0$، در نتیجه $x = k + e^{-x}$. برای $k=2$ و $p=1$ با استفاده از (۲۴) داریم

$$x = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left[e^{-nx}\right]_{x=2} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}}{n!}e^{-2n}$$

با انتخاب شانزده جمله اول سری فوق نتیجه می شود $x_{16} = 2.1200282339$ و $h(x_{16}) = 5\times 10^{-9}$.

مثال ۲ برای معادله $h(x) = e^x - 3x^2 = 0$ با انتخاب $p=1$ و استفاده از (۲۴) داریم:

$$x = 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{x/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{3})^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left[e^{nx/2}\right]_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{3})^n n!}\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$$

با انتخاب چهل جمله اول سری فوق نتیجه می شود $x_{40} = 0.910007$ و $h(x_{40}) = 1.70355\times 10^{-6}$.

مثال ۳ اگر $h(x)=x^2-(1-x)^5=0$ آنگاه $x=1-x^{2/5}$، با استفاده از (۲۴) و انتخاب $p=1$ داریم

$$x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}\left[-x^{2n/5}\right]_{x=1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n(2n-5)\cdots(2n-5n+5)}{n!5^{n-1}}$$

با انتخاب هجده جمله اول سری فوق نتیجه می شود $x_{18}=0.34594843$ و $h(x_{18})=4.3629\times10^{-8}$.

مثال ٤ فرض کنید $h(x)=x^3-e^{-x}=0$ در نتیجه $x=e^{-\frac{x}{3}}$. برای $p=1$ با استفاده از (۲۴) داریم

$$x=0+e^{-x/3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^{n-1}}{n!\,3^{n-1}}$$

با انتخاب پنجاه جمله اول سری فوق نتیجه می شود $x_{50}=0.77288$ و $h(x_{50})=-6.669\times10^{-6}$.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله بسط لاگرانژ برای یافتن جواب معادلات غیرخطی استفاده شد که در مقایسه با سایر روش ها بسیار ساده و مفید می باشد و می توان بوسیله این روش جواب تقریبی معادلات غیر خطی را با دقت بالا به دست آورد. ضمناً از مزایای این روش می توان به تکراری نبودن آن، بی نیاز بودن از نقطه شروع و ارایه جواب به طور صریح و بر حسب یک سری توانی اشاره کرد.

منابع

[1] L. Petkovic et al., On the conctruction of simultaneous method for multiple zeros, Non-Linear Anal., Theory , Meth. Appl. 30(1997) 669-676.

[2] J.H. He, Newton-like iteration method for solving algebraic equations, Commun. Nonl-Iinear Sci. Numer. Simulation 3(2) (1998).

[3] J.H. He, Improvement of Newton-like iteration method, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulation 1(2) (2000) 239-240

[4] T. Yamamoto, Historical development in convergence analysis for Newtons and Newt on-loke method, J Comput, Appl, Math,. 124 (2000) 1-23

[5] Adomian G, Rach R., On the solution of algebraic equations by the decomposition method, Math. Anal. Appl., 105, (1985), 141-166.

[6] S. Abbasbandy, M.T. Darvishi, A numerical solution of Burgers equation by modified Adomian method, Appl. Math. Comput., 163 (2005), 1265-1272.

[7] K. Abbaoui, Y. Cherruault, Convergence of Adomian's Method Applied to Nonlinear Equations, Math. Comput. Model., 20(9), (1994), 69-73.

[8] E. Babolian, J. Biazar, Solution of nonlinear equations by modified Adomian decomposition method, Appl. Math. Computation, 132 (2002) 167-172

[9] E. Babolian, J. Biazar, On the order of convergence of Adomian method, Applied Mat- hematics and Computation, 130, (2002), 383-387.

[10] E.Babolian, A. Davari, Numerical implementation of Adomian decomposition method, Appl. Math. Comput., 153, (2004), 301-305.

[11] Y. Cherruault, Convergence of Adomian's Method, Kybernetes, 8(2), 1998, 423-426.

[12] Cherruault Y, Adomian G., Decomposition methods: a new proof of convergence.Math. Comput. Modell., 18, (1993), 103-106.
[13] J.H. He, Homotpy perturbation method, Comp. Math. Appl. Mech. Eng. 178 (1999) 257–262.
[14] J.-H. He, A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for Nonlinear problems, Intm J Nonlinear Mech. 35(1) (2000) 37-43.
[15] S. Abbasbandy, Modified homotopy perturbation method for nonlinear equation and Comparison with Adomian decomposition method, Applied Mathemetics and comput172 (2006) 431-438.
[16] Richard Belman, Perturbation Techniques in Mathematics, Physics, and Engineering. Dover Pub. Inc., New York,1972
[17] Brown. J. W, Churchill. R. V, Coplex Variables and Applications, Sixth Editoin, McGraw-Hill, 1996
[18] T. Yamamoto, Historical development in convergence analysis for Newton's and Newton-like methods, J. Comput. Appl. Math. 124 (2000) 1–23.
[19] Ji. Huan He, Anew iteration method for solving algebraic equations, Appl. Math. 135 (2003) 81-84.
[20] S. Abbasbandy, Improving Newton-Raphson method for nonlinear equations by mod- Ified Adomian decomposition method, Appl. Math. 145 (2003) 887-893.
[21] Changbum chun, Anew iterative method for solving nonlinear equations , Appl. Math, 178 (2006) 415-422.
[22] S. Abbsbandy,Y. Tan, S.J Liao, Newton-Homotopy analysis method for nonlinear eq-Uations, Applied Mathemetics and comput. 188 (2007) 1794=1800.
[23] E. Babolian, T. Lotfi, F. M. Yaghoobi, Solving no linear equation by perturbation technique and Lagrange expansion, extended abstract of the 18^{th} seminar on mathematical analysis and it application, 2009, pp 154-157.