اثرات جایگشت نوفه های سفید و مخلوط در حل عددی معادله دیفرانسیل تصادفی مربوط به مدل زیست ریاضی

رمضان رضاییان[1*]، رحمان فرنوش[2]، غلامحسین یاری[3]

[1] گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات، تهران، ایران

[2] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت، نارمک، تهران، ایران

چکیده

معادله دیفرانسیل معمولی کاربرد فراوانی در مدل بندی پدیده های طبیعی مربوط به علوم زیست شناسی دارد. در این مقاله، معادلات دیفرانسیل مربوط به رشد جلبک ها را در نظر می گیریم. با وارد کردن عوامل تصادفی به پارامترهای مدل، آن را به یک معادله دیفرانسیل تصادفی تبدیل می نماییم. هدف اصلی ما در این مقاله، بررسی اثرات جایگشت نوفه های سفید و مخلوط در مدل تصادفی مربوطه می باشد. معادله دیفرانسیل تصادفی را به روش اویلر – ماریاما به صورت عددی تقریب زده و شبیه سازی مربوطه را به کمک برنامه MATLAB انجام می دهیم.

کلمات کلیدی: معادله دیفرانسیل تصادفی، نوفه سفید گاوسی، نوفه سفید مخلوط، روش اویلر- ماریاما، انتگرال ایتو.

---

۱ مقدمه

سیستم های فیزیکی اغلب به وسیله معادله دیفرانسیل معمولی ODE مدل سازی می شوند، هرچند بسیاری از مدل ها به صورت مطلوبی نمایش داده می شوند، ولی در بسیاری از موارد به علت نادیده گرفته شدن اثرات تصادفی، مدل دقیق و در نتیجه جواب دقیقی به دست نمی آید، در سال های اخیر مدل سازی ریاضی مربوط به حوادث طبیعی و فیزیکی با وجود عامل تصادفی به دلیل کاربرد وسیع آن مورد توجه قرار گرفته است، قسمت عمده ای از این مدل ها در قالب فرآیند تصادفی می باشد. یکی از مهمترین فرآیندهای تصادفی، فرآیند وینر (حرکتی برآونی) است .

یک فرآیند وینر استاندارد $\{W_t : t \geq 0\}$ یک فرآیند گاوسی زمان پیوسته با نموهای مستقل می باشد به طوری که به ازای هر $0 \leq s \leq t$، با احتمال یک $W(0) = 0$, $E(W_t) = 0$ و $Var(W_t - W_s) = t - s$ به عبارتی $W_t - W_s \to N(0,\ t-s)$، به علاوه به ازای هر، $0 \leq t_i \leq t_j \leq t_k \leq t_l$، نموهای $W_{t_i} - W_{t_j}$ و $W_{t_i} - W_{t_k}$ مستقل از هم می باشند[1].

---

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: r.rezaeyan@gmail.com

Archive of SID

www.SID.ir

با اضافه نمودن عوامل تصادفی در معادله دیفرانسیل معمولی (در شرایط اولیه، شرایط مرزی و یا در توصیف تابع سیستم فیزیکی) یک SDE به وجود می آید.

لذا یک SDE، یک ODE است که به صورت مجموعه ای از یک یا چند جمله تصادفی بوده و یا ضرائب پارامتری آن به شکل تابعی از یک متغیر تصادفی می باشد، ODE که دارای ضرائب تصادفی یا مقدار اولیه تصادفی یا ورودی تصادفی و یا حتی ترکیبی از آن ها باشد یک SDE می باشد که جواب آن نسبت به زمان t، مشتق پذیر می باشد. اما SDE ای که با اضافه کردن یک فرآیند تصادفی نامنظم، مانند نوفه سفید گاوسی پدید می آید، به خاطر وجود جملاتی بر حسب فرآیندهای وینر در انتگرال تصادفی مربوطه، جواب آن ها بر حسب t مشتق پذیر نمی باشد و معمولا این گونه از معادلات به صورت انتگرال تصادفی ایتو یا استرانتویچ بیان می شوند[۲].

معادلات دیفرانسیل تصادفی از این نوع کاربردهای وسیع در علوم زیست شناسی، جامعه شناسی، اقتصاد، مدارهای الکتریکی، فعالیت های ماهواره ای و . . . دارد .

در این جا ما مدل ریاضی مربوطه به تشکیل جلبک های کنار حوضچه ها و آب های راکد را که برای اولین بار توسط برتا و کانگ [۵] مطرح شد، را در نظر می گیریم. هدف این مقاله، تجزیه و تحلیل اثرات جایگشت نوفه های سفید و مخلوط روی پارامترهای سیستم مورد نظر می باشد .

برای این منظور در بخش ۲، ما محاسبات تصادفی و انتگرال تصادفی را مطرح می نمائیم، شناسایی مدل مورد نظر را در بخش سه شرح داده و اثرات جایگشت نوفه های سفید و مخلوط را روی پارامترهای مدل در نظر می گیریم. نتایج عددی و شبیه سازی مربوط به تقریب عددی مدل مربوط را در بخش ۴ انجام داده نتیجه گیری می نماییم.

۲ محاسبات تصادفی

فرم کلی معادله دیفرانسیل تصادفی به صورت، $dX_t = f(t, X_t)\,dt + g(t, X_t)\,dW_t$ می باشد، که در آن، f ضریب رانش[7]، g ضریب انتشار[8] و W_t حرکت برآونی m بعدی یا فرآیند وینر می باشد. جواب صحیح معادله دیفرانسیل تصادفی فوق، X_t یک فرآیند برداری n بعدی می باشد که در معادله انتگرالی زیر با مقدار اولیه X_{t_0} برای t های متعلق به $[t_0, T]$ صدق می کند .

$$X_t = \int_{t_0}^{T} f(s, X_s)\, ds + \int_{t_0}^{T} g(s, X_s)\, dW_s$$

اولین انتگرال در معادله انتگرالی فوق، یک انتگرال معمولی است و انتگرال دوم در آن، یک انتگرال تصادفی است که با روش معمولی انتگرال ریمان، اشتیل یس یا انتگرال لبگ قابل حل نمی باشد. برای حل انتگرال های

[7] Drift cofficient
[8] Diffusion cofficient

www.SID.ir

تصادفی، فرض کنید $t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n = T$ یک افزار از بازه $[t_0, T]$ باشد و $\lambda_n = \max(t_i - t_{i-1})$ در این صورت انتگرال ایتو[9]، $\int_{t_0}^{T} g(s, X_s)\, dW_s$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$y_I(t) = \int_{t_0}^{T} g(s, X_s)\, dW_S = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})\,(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \qquad (۱)$$

اگر g، تابعی اندازه پذیر $\int_{t_0}^{T} E(|g(s, X_s)|^2)\, ds \le \infty$ باشد، حد فوق و در نتیجه انتگرال ایتو فوق موجود است [۳, ۴].

نوع دیگر از انتگرال های تصادفی، انتگرال استراتنویچ[10] است که به صورت زیر تعریف می گردد:

$$y_s(t) = \int_{t_0}^{T} g(s, X_s)\, dW_S = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}, X_{t_{i-1}}\right)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \qquad (۲)$$

شرط وجود انتگرال استراتنویچ علاوه بر برقراری شرط وجود انتگرال ایتو، این است که ضریب انتشار، $g(s, X_s)$ تابعی پیوسته نسبت به t و دارای مشتقات جزئی پیوسته نسبت به X_t باشد[۳] و داریم:

$$y_S(t) - y_I(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} g(s, X_s)_j \,.\, g_{k_j}(s, X_s)\, ds$$

وقتی g_{kj}، نماد jاُمین ستون از ماتریس $(n \times m)$ $g_{x_k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}$، می باشد با استفاده از (۱) ما داریم [۳]:

$$y_1(t) = \int_{t_0}^{T} W_S\, dW_S = \frac{W_T^2 - W_{t_0}^2}{2} - \frac{T - t_0}{2}$$

و با استفاده از (۲) نتیجه می شود [۳]:

$$y_s(t) = \int_{t_0}^{T} W_S\, dW_S = \frac{W_T^2 - W_{t_0}^2}{2}$$

از آن جایی که انتگرال های تصادفی را می توان توسط دو روش مجزا (انتگرال های ایتو و انتگرال های استراتنویچ) حل نمود، پس هر انتگرال تصادفی دو جواب مختلف دارد، این دو جواب مختلف توسط فرمول زیر به هم دیگر مربوط اند [۴].

$$X_I(T) = X_I(t_0) + \int_{t_0}^{T} \left[f(\tau, X_1(\tau)) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=}^{n} g_{x_k}(\tau, X_i(\tau))_j\, g_{k_j}(\tau, y_1(\tau)) \right] d\tau$$

$$+ (S) \int_{t_0}^{T} g(\tau, X_1(\tau))\, dW_\tau \qquad (۳)$$

---

9 Ito Integral

10 Stratonovich Integral

Archive of SID

www.SID.ir

یا:

$$X_S(T)=X_S(t_0)+\int_{t_0}^{T}\left[f\left(\tau, X_s(\tau)\right)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} g_{x_k}\left(\tau, X_S(\tau)\right)_j\, g_{k_j}\left(\tau, X_S(\tau)\right)\right]d\tau$$

$$+(I)\int_{t_0}^{T} g\left(\tau, X_S(\tau)\right)dW_\tau \qquad (۴)$$

وقتی که آخرین انتگرال های سمت راست رابطه (۳) و (۴) به ترتیب انتگرال استراتنویچ و انتگرال ایتو می باشد . از (۳) و (۴) نتیجه می شود، معادله دیفرانسیل استراتنویچ،

$$dX_t=\left(f-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(g_{x_k}\right)_j\, g_{k_j}\right)dt+g dW_t \qquad (۵)$$

متناظر با معادله دیفرانسیل ایتو زیر می باشد:

$$dX_t = f d_t + g dW_t$$

که در آن $\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(g_{x_k}\right)_j g_{k_j}$ جمله تصحیح (Correction) می باشد .

حل معادله دیفرانسیل تصادفی به روش تحلیلی همواره امکان پذیر نمی باشد و در خیلی از مواقع مجبوریم از روش عددی جواب SDE را تقریب بزنیم[۶-۱۱]، ساده ترین روش تقریب عددی SDE روش اویلر – ماریاما است [۴] . روش اویلر – ماریاما برای تقریب SDE بر اساس روش عددی اویلر برای ODE است .

فرض کنید $0=t_0<t_1<t_2<...<t_n<...<t_N=T_{N+1}=T$ ، افرازی از بازه $[t_0,T]$ باشد که $t_n=t_0+nh$، وقتی $h=\frac{T-t_0}{n}=t_{n+1}=\int_{t_n}^{t_{n+1}}dt$ متناظر با این افراز داریم:

$$\Delta W_j(t_n)=W_j(t_{n+1})-W_j(t_n)=\int_{t_n}^{t_{n+1}}dW_j(s)$$

و $\Delta W_j(t_n)$ متغیرهای تصادفی گاوسی مستقل از هم با میانگین صفر و واریانس یک می باشد . تقریب اویلر – ماریاما برای SDE:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)\,dW_t$$

برابر است با:

$$X_{n+1}=X_n+f(t_n, X_n)\Delta t_n+g(t_n, X_n)\Delta W(t_n) \qquad (۶)$$

برای دقت جواب عددی SDE، ما از مرتبه قوی همگرایی استفاده می نماییم، یک تقریب عددی تصادفی، همگرا از مرتبه قوی γ است، اگر مقادیر ثابت مثبت δ و k موجود باشند به طوری که [۳]:

$$E\left[\,\left|\,X(T)-X_h(T)\,\right|^2\right]\le kh^{\gamma} \qquad h\in(0,\delta)$$

$X_h(T)$ تقریب عددی SDE فوق می باشد، در [۴] ثابت شده است که روش اویلر- ماریاما همگرای قوی از مرتبه (۰/۵) است .

www.SID.ir

۳ شناسایی مدل

یکی ازاهداف مهم پژوهشگران در تحقیقات و مطالعات زیست شناسی، ارایه مدل ریاضی مناسب برای پدیده های طبیعی است که در روی کره زمین رخ می دهد. یکی از این پدیده ها، فرآیند رشد جلبک ها در کنار حوضچه ها و آب های راکد می باشد که به شدت مورد توجه زیست شناسان قرار گرفته است. برای اولین بار برتا و کانگ در 1998 یک مدل ریاضی برای این موضوع ارایه دادند[۵]. مدل ارایه شده توسط آن ها به شکل یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی به فرم زیر می باشد. آن ها فرض کردند، S تعداد باکتری های سالم، I تعداد باکتری های بیمار و P تعداد باکتری خوار باشند:

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = \alpha\, S(t)\,(1-\dfrac{S(t)+I(t)}{C}) - K\, S(t)\, P(t) \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = K\, S(t)\, P(t) - \lambda\, I(t) \\ \dfrac{dP(t)}{dt} = -\, K\, S(t)\, P(t) - \mu\, P(t) + b\,\lambda\, I(t) \end{cases}$$

که در آن $\alpha > 0$ نرخ باکتری های زنده، $C > 0$ تعداد باکتری های ناقل ویروس، $K > 0$ تعداد باکتری های در تماس با ویروس، $\lambda > 0$و $\mu > 0$ به ترتیب تعداد باکتری ها و ویروس های تلف شده و $b > 0$ تعداد دفعاتی می باشد که یک ویروس با باکتری برخورد می کند و معمولا" بین ده تا صد بار این برخورد انجام می شود(تمام این پارامترها، مقادیر ثابت اند).

در نظر بگیرید T دوره تناوب رکورد باشد، پس $\lambda = \dfrac{1}{T}$ و با فرض این که $\tau = KCt$ و

$$s = \frac{S}{C}, \qquad i = \frac{I}{C}, \qquad p = \frac{P}{C}$$

دستگاه معادلات به شکل زیر در می آید:

$$\begin{cases} \dfrac{ds(t)}{dt} = \alpha\, s(t)\,(1-(s(t)+i(t)) - s(t)\, p(t) \\ \dfrac{di(t)}{dt} = s(t)\, p(t) - l\, i(t) \\ \dfrac{dp(t)}{dt} = -s(t)\, p(t) - k\; p(t) + b\, l\, i(t) \end{cases}$$

وقتی:

$$a = \frac{\alpha}{KC}, \qquad l = \frac{\lambda}{KC}, \qquad k = \frac{\mu}{KC}$$

برای سهولت در محاسبات، بجای τ از t استفاده نمودیم. کلیه خواص ریاضی دستگاه معادلات فوق را می توان در[۹] یافت. برای ایده ما در این مقاله کافی است که بدانیم $1 < b < 1 + k$.

Archive of SID

www.SID.ir

کارلتی و همکارانش در 2004 [۹]، با اضافه کردن عوامل تصادفی به پارامترهای مدل ارایه شده آن را به صورت یک SDE تبدیل نمودند. اگر جایگشت نوفه سفید تصادفی را روی یکی از پارامترها در دستگاه فوق مثلا" p در نظر بگیریم و آن را p_1 بنامیم، پس:

$$\widetilde{p}_1 = p_1 + \alpha\,\xi(t) \tag{۷}$$

که $\alpha \in R$ و $\xi(t)$ یک فرآیند وینر استاندارد است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\frac{ds(t)}{dt} &= a\,s(t)\,(1-(s(t)+i(t))) - s(t)\,p(t)\\ &= a\,s(t)(1-s(t)-i(t)) - s(t)(p_1+\alpha\,\xi(t))\\ &= s(t)[a\,(1-s(t)-i(t)) - p_1] + \alpha\,s(t)\,\xi(t)\end{aligned}$$

با فرض این که، $\xi(t) = \dfrac{dW(t)}{dt}$, $s(t) = X(t)$ [۳, ۴] نتیجه می شود،

$$dX(t) = X(t)[a\,(1-X(t)-i(t)) - p_1]dt + \alpha\,X(t)\,dW(t) \tag{۸}$$

که فرم فوق یک SDE با ضریب رانش $X(t)[a\,(1-X(t)-i(t))-p_1]$، و ضریب انتشار $\alpha\,X(t)$ می باشد که جواب این معادله یک فرآیند ایتو می باشد.

حال در این جا نوفه مخلوط را معرفی می نمائیم. فرآیند $X(t)$ را یک نوفه مخلوط گوییم، هرگاه $X(t)$ در معادله دیفرانسیل خطی زیر صدق کند:

$$dX(t) = r\,X(t)\,dt + X(t)\,(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,dW_k(t)); \qquad X(0) \succ 0 \tag{۹}$$

وقتی $(W_1, W_2, \cdots, W_n)$ یک حرکت برآونی در R^n، $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ و r مقادیر ثابت اند.

لم ۱ جواب صریح فرم (۹) به شکل زیر می باشد:

$$X(t) = X(0)\ \exp\{[r - \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k)^2]t + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,W_k(t)\}$$

اثبات:

$$\begin{aligned}&dX(t) = r\,X(t)\,dt + X(t)\,(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,dW_k(t))\\ &\Rightarrow \frac{dX(t)}{X(t)} = r\,dt + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,dW_k(t)\end{aligned}$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه فوق داریم

$$\int_0^t \frac{dX(s)}{X(s)} = rt + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,W_k(t) \tag{۱۰}$$

www.SID.ir

Archive of SID

برای محاسبه انتگرال سمت چپ رابطه بالا، فرمول ایتورا برای تابع $h(t,x)=Ln(x),\ x>0$ به کار می گیریم[۳]. در نتیجه:

$$d(Ln\,X(t))=\frac{1}{X(t)}.dX(t)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{X^2(t)})(dX(t))^2$$

وقتی[۳]:

$$dt.dt=dt.dW(t)=dW(t).dt=0,\quad dW(t).dW(t)=dt$$

و

$$(dX(t))^2=dX(t).dX(t)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}&d\,(Ln\,X(t))=\frac{d\,X(t)}{X(t)}-\frac{1}{2\,X^2(t)}.X^2(t)(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k)^2\,dt\\&\Rightarrow\frac{dX(t)}{X(t)}=d\,(Ln(X(t))+\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k)^2\,dt\end{aligned}\qquad(۱۱)$$

با جای گذاری رابطه (۱۱) درمعادله (۱۰) داریم:

$$Ln\frac{X(t)}{X(0)}=[r-\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k)^2\,]t+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,W_k(t)$$

یا

$$X(t)=X(0)\exp\{[r-\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k)^2\,]t+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,W_k(t)\}$$

در نتیجه اثبات لم کامل می گردد.

حال فرض می کنیم در (۸) ، $W(t)$ یک نوفه مخلوط به شکل زیر باشد:

$$dW(t)=rW(t)dt+W(t)(\alpha_1\,dW_1(t)+\alpha_2\,dW_2(t)),\qquad W(0)>0\qquad(۱۲)$$

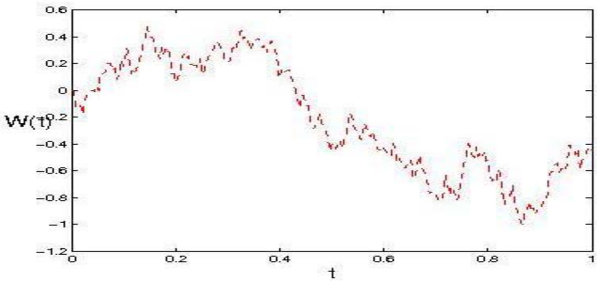
که در آن ضرائب مقادیر ثابت اند. لذا در بخش بعد ، اثرات جایگشت نوفه سفید گاوسی استاندارد و نوفه مخلوط به فرم (۱۲) را روی مدل (۱۰) به صورت عددی بیان می نماییم.

۵ نتایج عددی

در این بخش برای شبیه سازی مدل مورد نظر، ما به یک حرکت برآونی نیاز داریم. فرآیند حرکت برآونی که ما در این بخش از آن استفاده می کنیم در شکل زیر نشان داده شده است.

Archive of SID

www.SID.ir

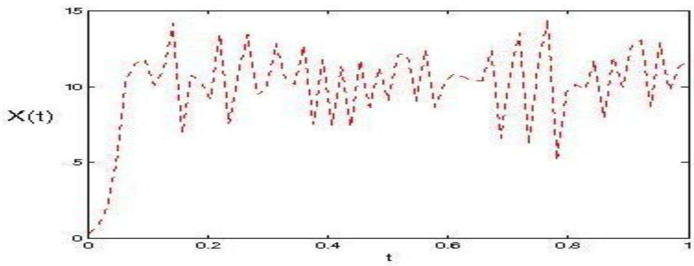


نمودار ۱

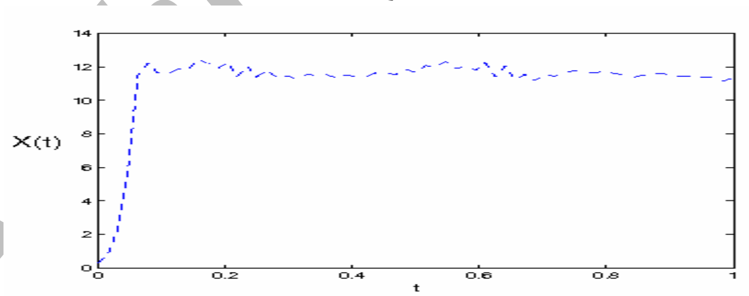
با فرض این که:

$$a = 10,\ \ k = 14/925,\ \ l = 24/628,\ \ t = \frac{1}{KC} = 7/4627,\ \ (s_0, i_0, p_0) = (0/3,\ 0/2,\ 5),$$

نتایج عددی برای مدل تصادفی (۸) و (۱۲) بطور مجزا از هم محاسبه گردیده که در شکل های زیر نشان داده شده است. این نمودارها به کمک برنامه MATLAB برای ۲۵۶ آزمایش مستقل از هم به دست آمده است.



نمودار ۲



نمودار ۳

از مقایسه دو نمودار فوق در می یابیم که در اثر جایگشت نویز مخلوط بجای نویز سفیدگاوسی در SDE مربوط به مدل تشکیل جلبک ها اولا"؛ سرعت همگرایی فرآیند حاصل از مدل (۱۲) نسبت به مدل (۸) بیشتر است و دقت پیش بینی آن هم بالاتر می باشد و با احتمال 99% , X(t) حاصل از مدل (۱۲) در فاصله (10, 12) قرار دارد در حالتی که با توجه به نمودار (۲) این مقدار در فاصله(5, 15) برای مدل (۸) در نوسان است. بنابراین پیش بینی در حالتی که از Mixture noise در مقابل white noise استفاده می نماییم دقیق تر و آسان تر می باشد و جواب پایدارتر است.

www.SID.ir

منابع

[1] S. Karlin, H. M. Taylor, A first course in stochastic processes, AP, 1975.
[2] L. Arnold, Stochastic Differential Equations, Theory and Applications, Wiley, 1974.
[3] B. Oksendal, Stochastic Differential Equations. Springer, (1985).
[4] P.E. Kloeden, E. Platen. Numerical solution of Stochastic Differential Equations, Springer, Berlin,(1995).
[5] E. Bereta, Y. Kuang, Modeling and analysis of a marine bacteriophage infection, Math. Biosc. 149(1998) 57-76.
[6] M. carletti, On the stability properties of a stochastic model for phage-bacteria interaction in open marine environment, Math. Biosci 175(2)(2002) 117-131.
[7] G. N. Milstein, Numerical Integration of SDE, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995
[8] R. Rezaeyan, R. Farnoosh, A comperession between Gaussian and Poissonian noise in the numerical solution of SDE, Word Academic of Sci, Eng, and Tech. January Vol. 37(2009).
[9] M. Carletti, K. Burrage, P.M. Burrage, Numerical simulation of SDEs in biomathematical modeling, Math. Comput. Simulation 64(2004) 271-277.
[10] R. Rezaeyan, R. Farnoosh, An analytical solution of SDEs in biomathematical modeling, 7th con. Prob. and Stoc. Processes, Esfahan(2009).
[11] M.Carletti, Numerical solution of Stochastic Differential problems in the biosciences, j .comp .appl. Math, 185(2006)422-440.

Archive of SID

www.SID.ir